

Metropolis metody

© 2008 Josef Pelikán, CGG MFF UK Praha
<http://cgg.ms.mff.cuni.cz/~pepca/>

Obsah přednášky

- ◆ přehled Monte-Carlo zobrazování
- ◆ efektivnější vzorkování
- ◆ obousměrný Path-tracing
- ◆ Metropolis metody
 - ◆ Metropolis vzorkování
 - ◆ Metropolis výpočet osvětlení
 - ◆ přehled mutací

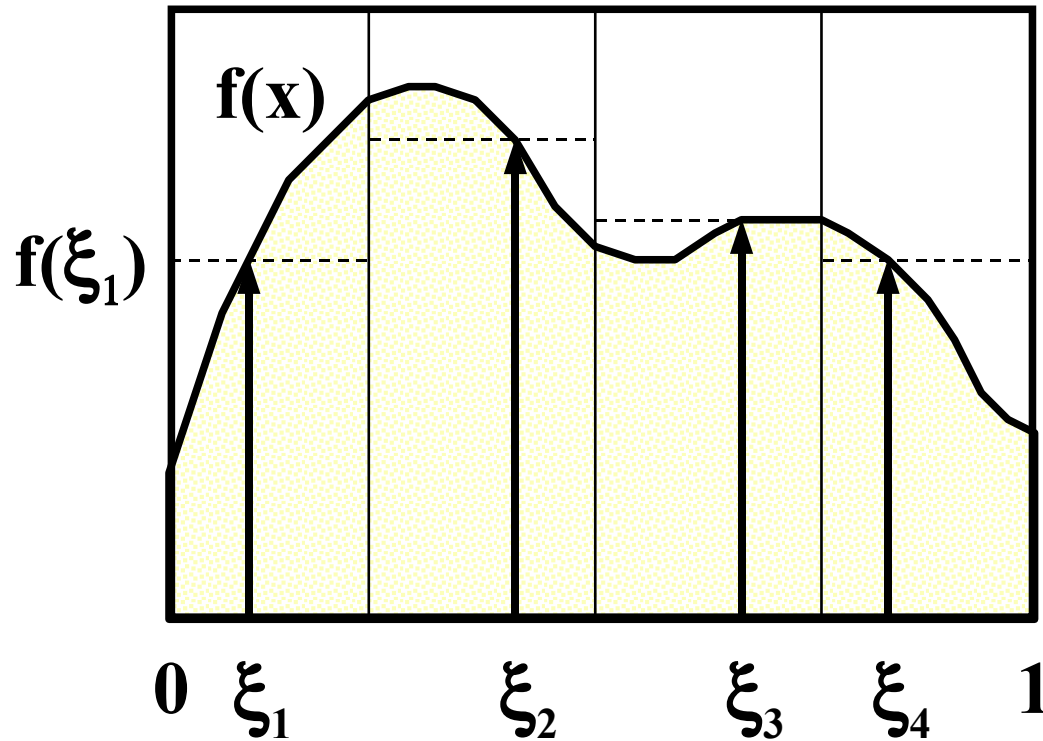
Monte-Carlo zobrazování

- ◆ **Monte-Carlo kvadratura:** integrály zobrazovacích rovnic jsou **mnoho-rozměrné**
 - ◆ anti-aliasing, hloubka ostrosti, rozmazání pohybem
 - ◆ Monte-Carlo metody nejsou citlivé na vyšší dimenze
- ◆ integrandy mají mnoho **nespojností** různých druhů
 - ◆ běžné „naivní“ vzorkování je **málo efektivní**
- ◆ obvykle se **nepožaduje velká přesnost**
 - ◆ lidské vidění má velmi omezenou absolutní citlivost
 - ◆ běžně postačí relativní přesnost $1/2 \div 2 \%$

Urychlení konvergence M–C

- ◆ „jittering“, „stratified sampling“
 - ◆ vzorkování s nižší diskrepancí
- ◆ vzorkování podle důležitosti („importance sampling“)
 - ◆ hustota pravděpodobnosti podobná integrované funkci
 - ◆ generování vzorků s libovolnou hustotou pravděpodob.
- ◆ kombinované odhady, smíšené heuristiky (různé pr.)
 - ◆ každé vzorkování (= hustota pravděpodobnosti) vyjadřuje jednu složku integrované funkce
- **Metropolis vzorkování**

Stratified sampling



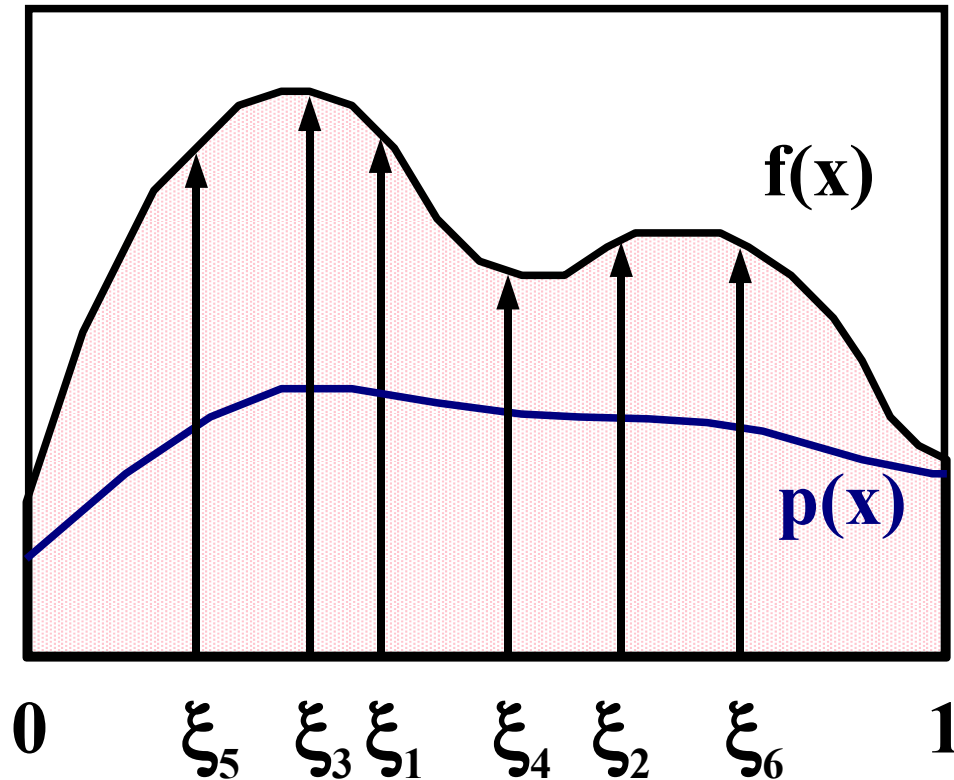
$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} f(x) dx$$

$$\langle I \rangle_{strat} = \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \mu(A_i)$$

$$\xi_i \in A_i$$

- „chytrý“ rozklad na subintervaly:
- funkce $f(x)$ má na subintervalech co nejmenší variaci

Importance sampling



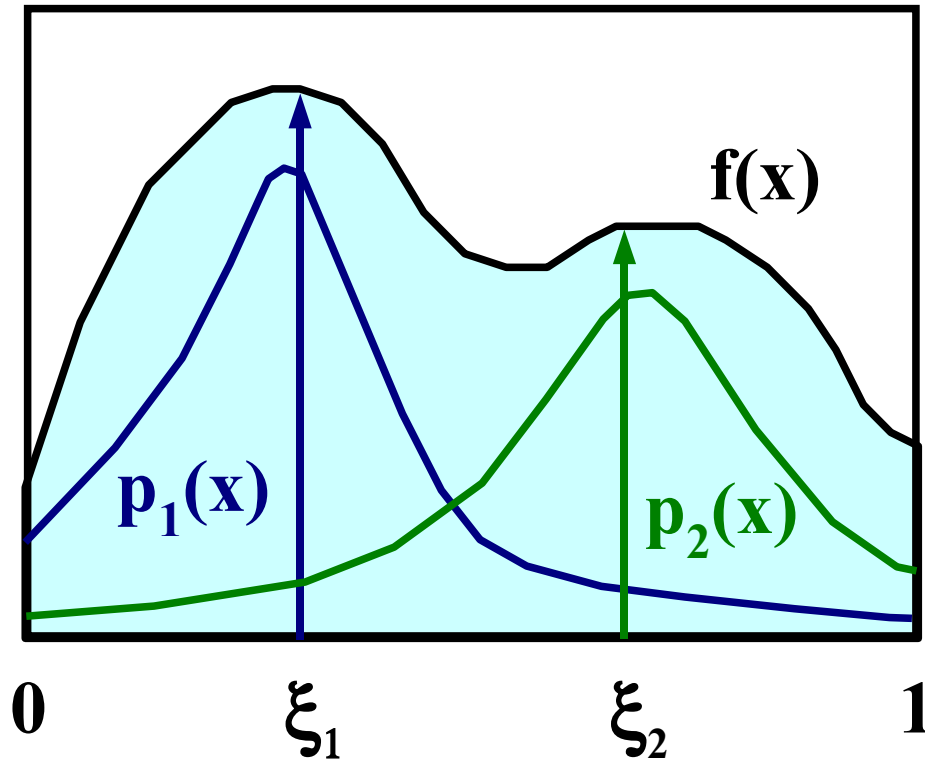
$$\int_0^1 f(x) d\mu(x) = \int_0^1 \frac{f(x)}{p(x)} dp(x)$$

$$\langle I \rangle_{imp} = \frac{f(\xi)}{p(\xi)}$$

$$\xi_i \in Rnd(p)$$

- hustota $p(x)$ má být co nejpodobnější funkci $f(x)$
- ?! efektivní generování vzorků podle hustoty $p(x)$!?

Combined sampling



$$\langle I \rangle_{comb} = \sum_{i=1}^N w_i(\xi_i) \frac{f(\xi_i)}{p_i(\xi_i)}$$

$$\xi_i \in Rnd(p_i)$$

$$0 \leq w_i(x)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i(x) = 1$$

- odhaduje se podle několika náhodných rozdělení
- každé rozdělení může charakterizovat jinou složku $f(x)$..

Obousměrný Path-tracing

Kombinovaná **globální zobrazovací rovnice**:

vlastní emitovaná radiance

GRDF

diskrétní potenciál

$$\Phi(\mathbf{S}) = \iint_{A, \Omega_x} \iint_{A, \Omega_y} L_e(\mathbf{x}, \omega_x) W_e(\mathbf{y}, \omega_y, \mathbf{S}) F(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) \cos \theta_y \cos \theta_x d\omega_y dA_y d\omega_x dA_x$$

integrály přes všechny plochy a směry zdrojů a všechny plochy a směry receptorů

Rekurentní definice GRDF

První odraz:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \underline{\mathbf{y}, \omega_y}) &= \delta(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{y}, \omega_y) + \\
 + \int_{\Omega_z} \mathbf{f}(\mathbf{z}, \omega_x \rightarrow \omega_z) \cdot F(\mathbf{z}, \omega_z \rightarrow \underline{\mathbf{y}, \omega_y}) \cdot \cos \theta_z \, d\omega_z
 \end{aligned}$$

Poslední odraz:

$$\begin{aligned}
 F(\underline{\mathbf{x}, \omega_x} \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) &= \delta(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{y}, \omega_y) + \\
 + \int_{\Omega_y^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega_z \rightarrow \omega_y) \cdot F(\underline{\mathbf{x}, \omega_x} \rightarrow \mathbf{z}, \omega_z) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_z
 \end{aligned}$$

Základy smíšené heuristiky

Lineární kombinace obou rekurzivních vzorců:

$$\underline{F = \delta + w^* T^* F + w T F, \quad w + w^* = 1}$$

Nekonečná Neumannovská řada:

$$\underline{F = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} w_{ij} T^{*i} T^j \delta, \quad \sum_{i=0}^N w_{i,N-i} = 1}$$

T i T^* se odhadují stochasticky pomocí náhodné procházky ukončované ruskou ruletou. Bez odhadu příští události však má tato metoda **velký rozptyl**.

Odhad příští události

S přidáním neuzavřených cest:

$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{bipath,nee}} = \sum_{i=-1}^k \sum_{j=-1}^{k^*} w_{ij} C_{ij}$$

$i = -1, j > 0$: cesta od pozorovatele (bez NEE)

$i = 0, j \geq 0$: cesta od pozorovatele se vzorkem na zdroji

$i > 0, j > 0$: světlo i -krát odražené od zdroje a j -krát od pozorovatele

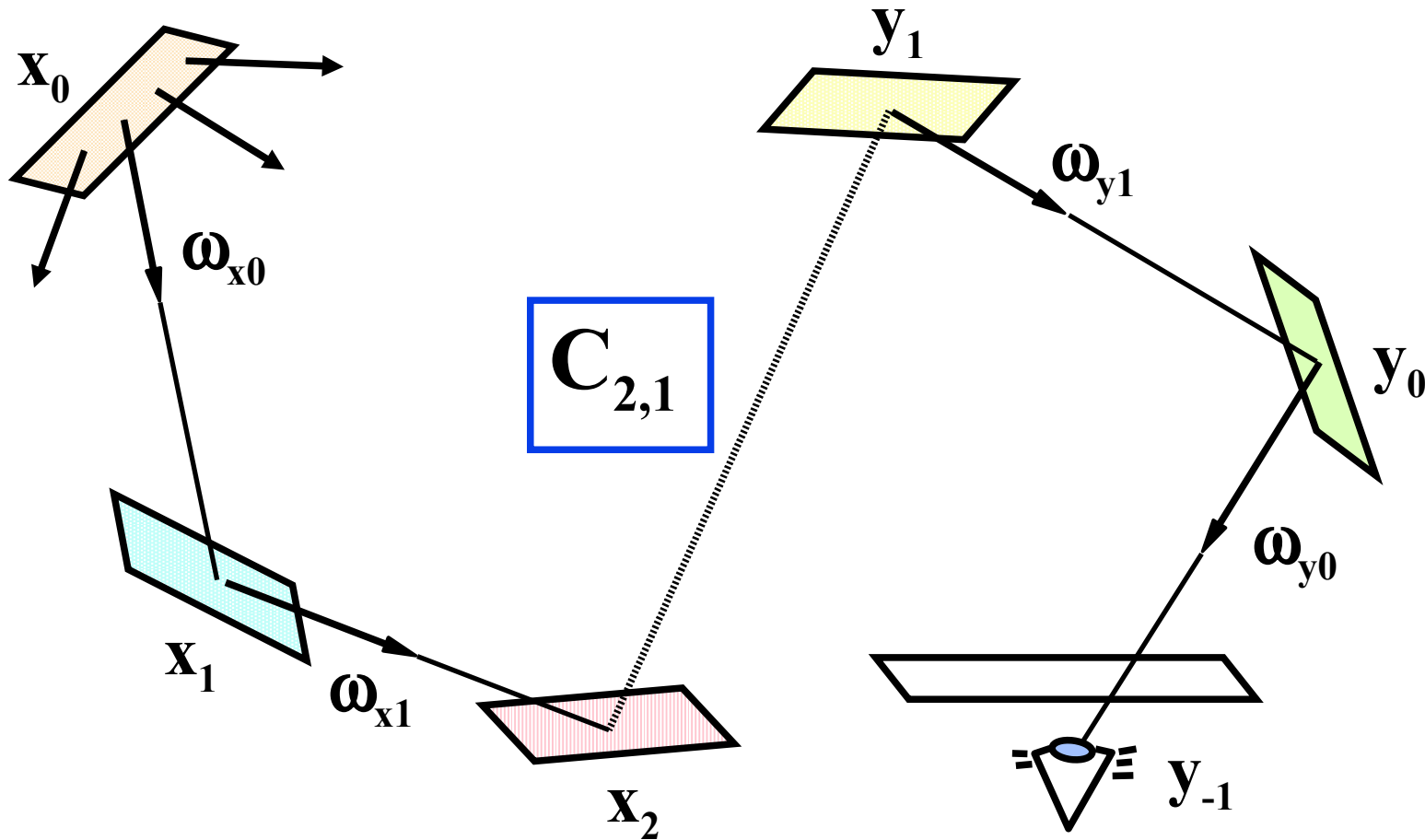
$i \geq 0, j = 0$: cesta od zdroje se vzorkem na receptoru

$i > 0, j = -1$: cesta od zdroje (bez NEE - neefektivní)

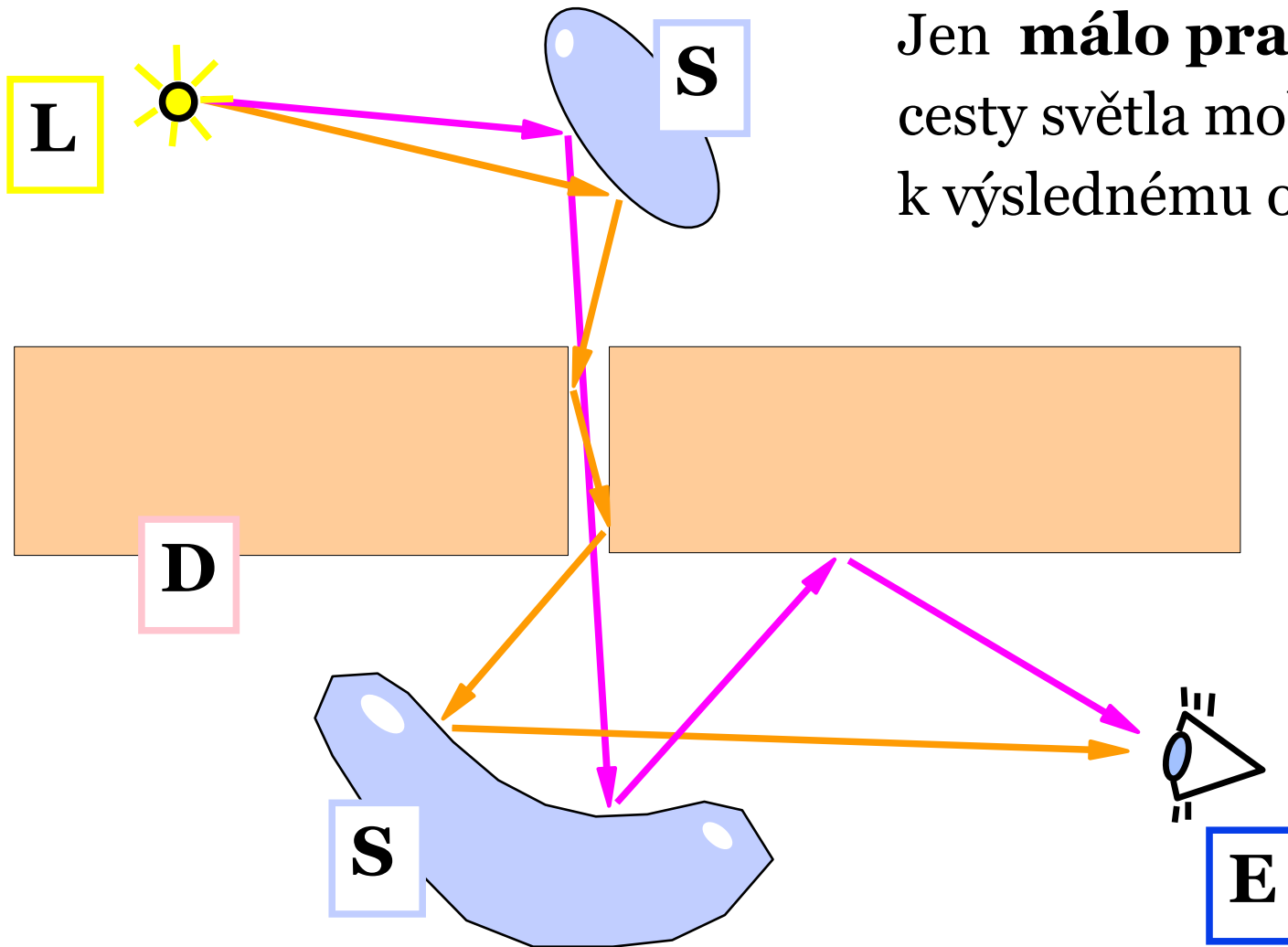
Přehled vzorkování

| závislost příspěvku na | | vzorku na cestě od zdroje světla | | | | |
|---|----------|---|-----------|------------|------------|------------|
| | | x_0 | x_1 | x_2 | x_3 | |
| vzorku na cestě od receptoru | | PT | | $C_{1,-1}$ | $C_{2,-1}$ | $C_{3,-1}$ |
| | y_{-1} | LT | $C_{0,0}$ | $C_{1,0}$ | $C_{2,0}$ | $C_{3,0}$ |
| | y_0 | $C_{-1,1}$ | $C_{0,1}$ | $C_{1,1}$ | $C_{2,1}$ | $C_{3,1}$ |
| | y_2 | $C_{-1,2}$ | $C_{0,2}$ | $C_{1,2}$ | $C_{2,2}$ | $C_{3,2}$ |

Obecná cesta (obousměrná)



Málo efektivní vzorkování cest



Jen **málo** pravděpodobné cesty světla mohou přispět k výslednému obrázku..

Metropolis vzorkování

- ◆ **Nicholas Metropolis** et al, 1953, výpočetní fyzika
- ◆ vzorkování podle dané funkce \mathbf{f} v obtížných podmínkách
- ◆ generuje posloupnost vzorků $\{\mathbf{x}_i\}$ s hustotou úměrnou \mathbf{f}

stavový prostor Ω $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$I(f) = \int_{\Omega} f(x) d\Omega \quad f_{pdf} = f / I(f)$$

generování vzorků $X = \{x_i\}$ $x_i \sim f_{pdf} \propto f$

Přitom není potřeba počítat $I(f)$ ani f_{pdf} !

Základní algoritmus

- ◆ **Markovův řetězec** vzorků: x_i závisí jen na x_{i-1}
- ◆ generátor nového vzorku – „**mutate()**“
- ◆ pravděpodobnost **schválení** – „**accept()**“
 - zajišťuje správnou a stacionární distribuci x_i

```

State x, x0, result[N];

x = x0;
for ( i = 0; i < N; i++ ) {
    // generate next sample
    State x' = mutate( x );
    float a = accept( x, x' );
    if ( random() < a ) x = x';
    result[i] = x;
}

```


Rozšířený algoritmus

- ♦ vzorkuje i oblasti s **nízkou hodnotou $f(x)$**
 - ♦ v limitě má stejný výsledek (distribuci)

```

State x, x0, result[2*N];
float weight;           // standard sample weight
float weights[2*N];    // result weights

x = x0;
for ( i = 0; i < 2*N; ) {
    // generate next sample
    State x' = mutate( x );
    float a = accept( x, x' );
    result[i] = x; weights[i++] = (1-a) * weight;
    result[i] = x'; weights[i++] = a * weight;
    if ( random() < a ) x = x';
}

```

Mutace, přechody, schvalování

- ◆ hustota pravděpodobnosti **přechodu od x k x'**
 - ◆ je dána mutačním předpisem („`mutate()`“)

$$T(x \rightarrow x')$$

- ◆ **pravděpodobnost schválení** tohoto přechodu
 - ◆ musí se spočítat (pozor na chyby!)
 - ◆ je-li určena správně, zajišťuje správnou distribuci výsledků

$$a(x \rightarrow x')$$

Pravděpodobnost schválení $a()$

- ♦ podmínka **stacionární pravděpodobnosti výsledku $f(x)$**

$$f(x) T(x \rightarrow x') a(x \rightarrow x') = f(x') T(x' \rightarrow x) a(x' \rightarrow x)$$

- ♦ **efektivní volba $a()$:**

$$a(x \rightarrow x') = \min \left(1, \frac{f(x') T(x' \rightarrow x)}{f(x) T(x \rightarrow x')} \right)$$

Volba přechodu – cíle, rady

- ◆ pravděpodobnost schválení by měla být co nejvyšší
 - ◆ lépe prozkoumáme stavový prostor
 - ◆ minimalizujeme korelace (alias v grafice)
- ◆ preferujeme přechody, které budou spíše schváleny
 - ◆ tj. přechody mířící do oblastí s větším $f(\mathbf{x})$
- ◆ **adaptivní metody mutace**
 - ◆ můžeme měnit přechodovou funkci na základě zkušenosti
- ➔ musíme jen umět spočítat přechodové hustoty $\mathbf{T}(\dots)$

Diskrétní příklad 1

♦ dvouprvkový stavový prostor: $\Omega = \{a, b\}$
 $f(a) = 9$
 $f(b) = 1$

♦ přechodová funkce:
 $mutate(x) = \begin{cases} a: rnd() < 1/2 \\ b: otherwise \end{cases}$

♦ hustoty/pravděpodobnosti přechodů:

$$T(\{a, b\} \rightarrow \{a, b\}) = 1/2$$

Diskrétní příklad 1

- ♦ pravděpodobnosti schválení:

$$a(a \rightarrow b) = \frac{f(b)}{f(a)} = 1/9$$

$$a(a \rightarrow a) = a(b \rightarrow a) = a(b \rightarrow b) = 1$$

- ověření korektnosti:

$$\frac{a(a \rightarrow b)}{a(b \rightarrow a)} = \frac{f(b)}{f(a)}$$

Diskrétní příklad 2

- ♦ stejný stavový prostor i funkce $f(x)$
- ♦ jiná (vhodnější) přechodová funkce:

$$\text{mutate}_2(x) = \begin{array}{l} a: \text{rnd}() < 9/10 \\ b: \text{otherwise} \end{array}$$

- ♦ hustoty/pravděpodobnosti přechodů:

$$T(\{a, b\} \rightarrow a) = 9/10$$

$$T(\{a, b\} \rightarrow b) = 1/10$$

Diskrétní příklad 2

- ♦ pravděpodobnosti schválení:

$$a(a \rightarrow b) = \frac{f(b)T(b \rightarrow a)}{f(a)T(a \rightarrow b)} = \frac{1 \cdot 9}{9 \cdot 1} = 1$$

$$a(b \rightarrow a) = \frac{f(a)T(a \rightarrow b)}{f(b)T(b \rightarrow a)} = \frac{9 \cdot 1}{1 \cdot 9} = 1$$

$$a(a \rightarrow a) = a(b \rightarrow b) = 1$$

- ➔ lepší přechodová funkce zvětšuje šance schvalování !

Speciální přechodové funkce

- ♦ jestliže je přechodová funkce symetrická

$$\forall a, b \quad T(a \rightarrow b) = T(b \rightarrow a)$$

- ➔ pak je akceptance

$$a(x \rightarrow x') = \min\left(1, \frac{f(x')}{f(x)}\right)$$

- **náhodná procházka Metropolis** (Brownův pohyb):

$$T(x \rightarrow x') = T(|x - x'|)$$

Spojité 1 D příklad

- stavový prostor a kritérium: $\Omega = \mathbb{R}$

$$f^1(x) = \begin{cases} (x - 1/2)^2 & : 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : \textit{otherwise} \end{cases}$$

- chceme generovat vzorky podle f^1 ..

- nejjednodušší přechodová funkce a hustota:

$$mutate_1(x) = rnd()$$

$$T_1(x \rightarrow x') = 1$$

- .. je to náhodná procházka Metropolis

Jiná přechodová funkce

- ◆ přechodová funkce a hustota (à la Brownův pohyb):

$$\mathit{mutate}_2(x) = x + 0.1 \cdot (\mathit{rnd}() - 0.5)$$

$$T_2(x \rightarrow x') = \begin{cases} 10 & : \quad |x - x'| \leq 0.05 \\ 0 & : \quad \mathit{otherwise} \end{cases}$$

- ◆ .. také zde se jedná o náhodnou procházku Metropolis (pro vysoké hodnoty $f(\mathbf{x})$ odmítá „klesat“)

Konvergence

- ◆ samostatná přechodová funkce **mutate₁**
 - konverguje, ale pomalu
- ◆ kombinace **mutate₁** a **mutate₂** (random: 10%, 90%)
 - ◆ konverguje velmi dobře
- ◆ samotná přechodová funkce **mutate₂**
 - ◆ má tendenci „utéci“ do jedné větve a už se nevrátit
 - ◆ potřebuje jednou za čas začít od začátku (výběrem nového \mathbf{x}_0)

Aplikace v M–C kvadratuře

- ♦ určitý integrál ze součinu dvou funkcí:

$$I = \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx$$

- ♦ standardní Monte-Carlo přístup („Importance sampling“)

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i) \cdot g(x_i)}{p(x_i)}$$

where $x_i \sim p(x)$ (arbitrary PDF)

Metropolis kvadratura

- Metropolis přístup používá jednu z funkcí jako hustotu pravděpodobnosti pro vzorkování \mathbf{x}_i :

$$I \approx \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \right] \cdot I(f)$$

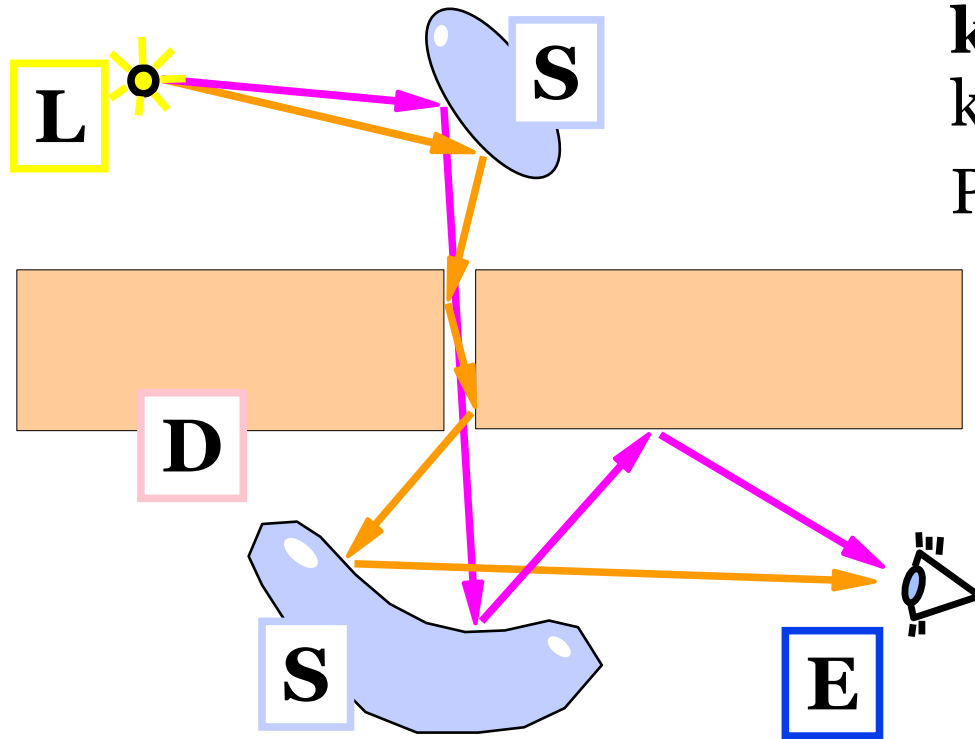
where $x_i \sim f_{pdf}(x)$

$$\text{and } I(f) = \int_{\Omega} f(x) dx$$

... integrál té funkce bychom měli znát:

- konvoluce obrazu (jádro konvoluce)
- BRDF při šíření světla odrazem

Metropolis výpočet osvětlení



Jen úplné cesty ze zdroje
k receptoru přispívají
k výslednému obrázku..

Pouze ty jsou ohodnoceny $f(\mathbf{X}) > 0$

$$f(X) \approx L_e(x_0, \omega_0) \cdot \prod_{i=1}^N \text{brdf}(x_{i-1}, x_i) G(x_{i-1}, x_i)$$

Metropolis výpočet osvětlení

- stavový prostor: prostor **náhodných procházek** potenciálně přenášejících světlo od zdroje do receptoru
- ◆ inicializace: hledání efektivních cest světla
 - ◆ obousměrný Path-tracing
 - ◆ minimalizace zkreslení (počátečních několik mutací nezapočítávám do výsledku)
- ◆ různé typy mutací
 - ◆ perturbace **kamery**: $(L|D)DS^*E$ nahradím (stejná délka)
 - ◆ perturbace **kaustiky**: $(L|D)S^*DE$ nahradím
 - ◆ **delší řetězce**: např. $(L|D)DS^*DS^*DE$ nahrazuji

Výběr mutací

- velká pravděpodobnost schválení mutace
 - ◆ jinak je posloupnost cest hodně konstantní (\rightarrow šum)
- ◆ preferovat rozsáhlé změny cesty světla
 - ◆ jinak jsou vzorky dost podobné (\rightarrow šum)
 - ◆ modifikace delšího úseku cesty světla najednou
- ◆ ergodicita
 - ◆ konvergence ke správnému rozdělení bez ohledu na \mathbf{X}_0
 - ◆ nesmí se mi algoritmus „zaseknout“ v nějaké oblasti..
- ◆ často modifikovat pozici na kameře (čočka, průmětna)

Osvědčené mutace

- **perturbace na kameře (objektivu)**
 - ◆ smažu a nahradím celou cestu $(L|D)DS^*E$
 - ◆ o kousek **náhodně přemístím** pozici na čočce a/nebo v průmětně
 - ◆ k regeneraci úseku cesty se použije Path-tracing
- ◆ **perturbace kaustiky**
 - ◆ podobná jako na kameře, ale poslední odraz je difusní
 - ◆ nahrazení cesty $(L|D)S^*DE$
 - ◆ první smazaný paprsek se odchýlí o **malý náhodný úhel** (exponenciální rozdělení)

Osvědčené mutace

- perturbace **delších řetězců**
 - ◆ smažu a nahradím cesty typu **(L|D)DS*DS*E**
 - ◆ na každém difusním odrazu trochu pozměním směr paprsku k následující lesklé ploše
 - ...
- ◆ náhodný výběr konkrétní mutace
 - ◆ zachovávat maximální variabilitu typu mutace
 - ◆ proměnlivost délky mutovaného řetězce

Literatura – knihy

- ◆ Andrew Glassner: ***Principles of Digital Image Synthesis***, Morgan Kaufmann, 1995
- ◆ Henrik Wann Jensen: ***Realistic Image Synthesis Using Photon Mapping***, A K Peters, 2001
- ◆ Matt Pharr, Greg Humphreys: ***Physically Based Rendering***, Morgan Kaufmann, 2004
- ◆ Philip Dutre, Kavita Bala, Philippe Baekert: ***Advanced Global Illumination***, A K Peters, 2006

Literatura

- ◆ Eric Veach, Leonidas J. Guibas: ***Optimally Combining Sampling Techniques for Monte Carlo Rendering***, SIGGRAPH'95 Proceedings
- ◆ Eric Lafortune: ***Mathematical Models and Monte Carlo Algorithms for Physically Based Rendering***, PhD thesis, KU Leuven, 1996
- ◆ Eric Veach, Leonidas J. Guibas: ***Metropolis Light Transport***, SIGGRAPH'97 Proceedings
- ◆ Eric Veach: ***Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation***, PhD Thesis, 1997

Literatura

- ◆ S. Gortler, M. F. Cohen, P. Slusallek: ***Radiosity and Relaxation Methods***, IEEE CG&A, 16(6), 1994
- ◆ David Cline, Parris Egbert: ***A Practical Introduction to Metropolis Light Transport***, Tech. report, Brigham Young University, 2005
- ◆ Matt Pharr: ***Metropolis Sampling***, slides for cs348b course, May 2003