# Výpočet průsečíků paprsku se scénou



CGG MFF UK Praha

pepca@cgg.mff.cuni.cz

http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/

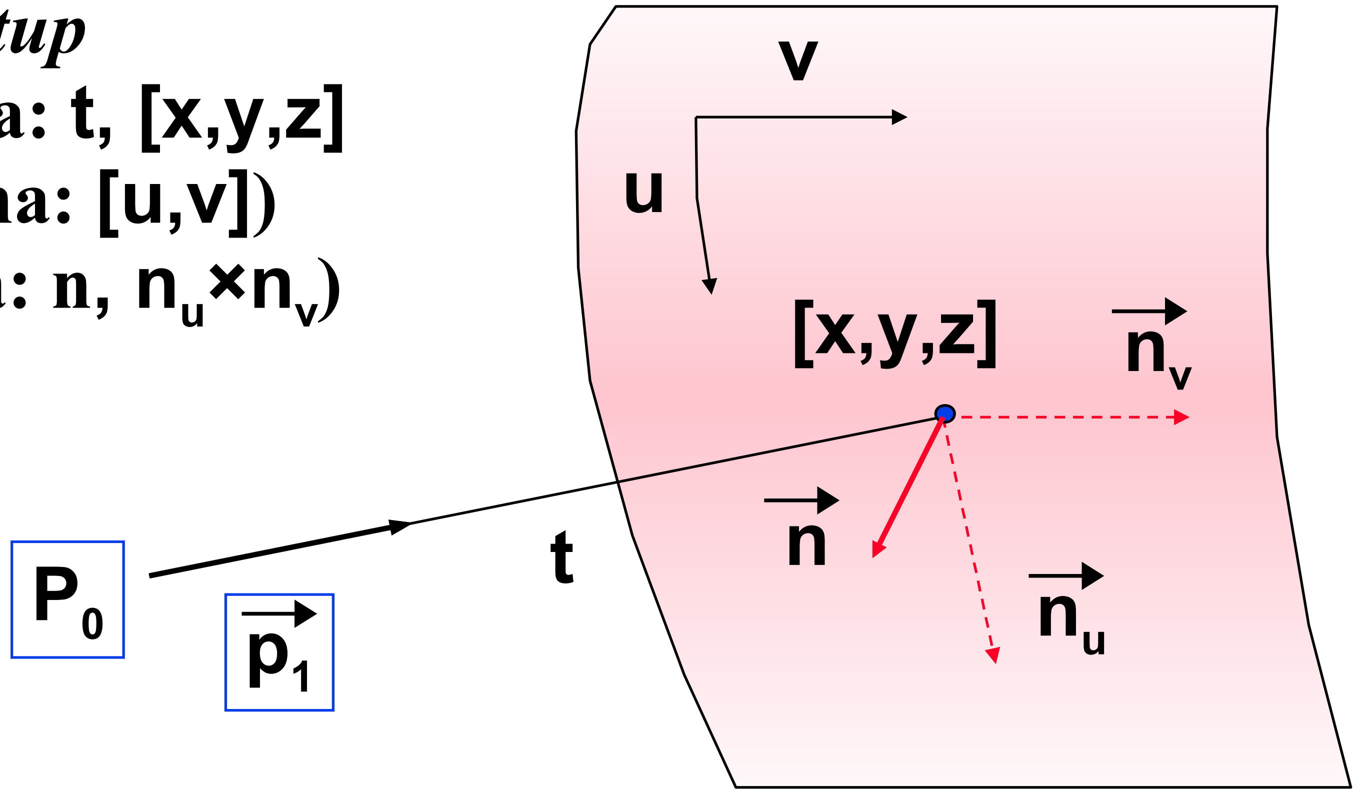
# Průsečík paprsku s tělesem

*výstup*

3D poloha: t, [x,y,z]

(2D poloha: [u,v])

(Normála: n, $n_u \times n_v$)



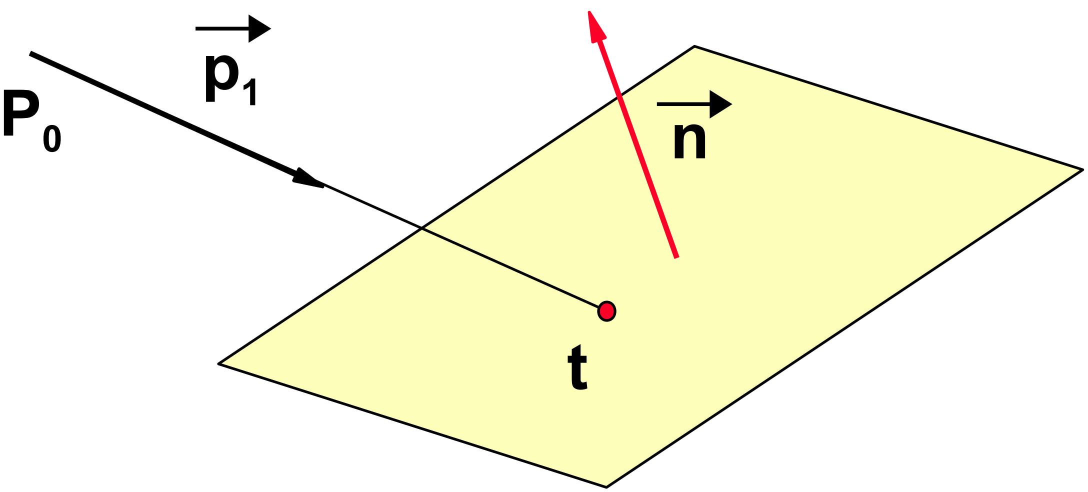

*vstup*

Paprsek: $P_0$, $\vec{p}_1$

# Rovina

***paprsek:***

$$P(t) = P_0 + t \cdot \vec{p}_1$$




***rovina:***

$$\vec{n} = [x_N, y_N, z_N]$$

$$x \cdot x_N + y \cdot y_N + z \cdot z_N + D = 0$$

- průsečík $t = -(\vec{n} \cdot P_0 + D) \,/\, (\vec{n} \cdot \vec{p}_1)$
- negativní: **2**±, **3***, pozitivní: **5**±, **6***, **1**/
- výpočet **[x,y,z]**: **3**±, **3***

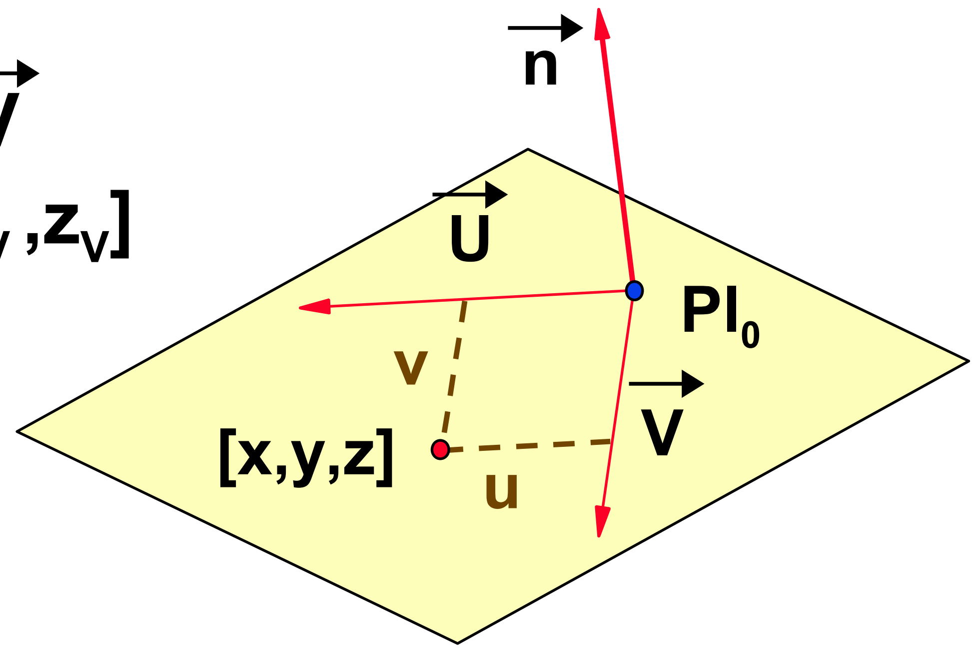
# Inverzní transformace v rovině

*rovina:*

$$Pl(u,v) = Pl_0 + u\cdot \vec{U} + v\cdot \vec{V}$$

$$\vec{U} = [x_U, y_U, z_U],\ \vec{V} = [x_V, y_V, z_V]$$

$$\vec{n} = \vec{U} \times \vec{V}$$




*vstup:* $Pl, \vec{U}, \vec{V}, [x,y,z]$

*výstup:* $[u,v]$

- soustava $\underline{u}\cdot x_u + \underline{v}\cdot x_v = x - Pl_{0x}$

  $\underline{u}\cdot y_u + \underline{v}\cdot y_v = y - Pl_{0y}$

- řešení **[u,v]**: **5±, 5*, 2/**

# Rovnoběžník

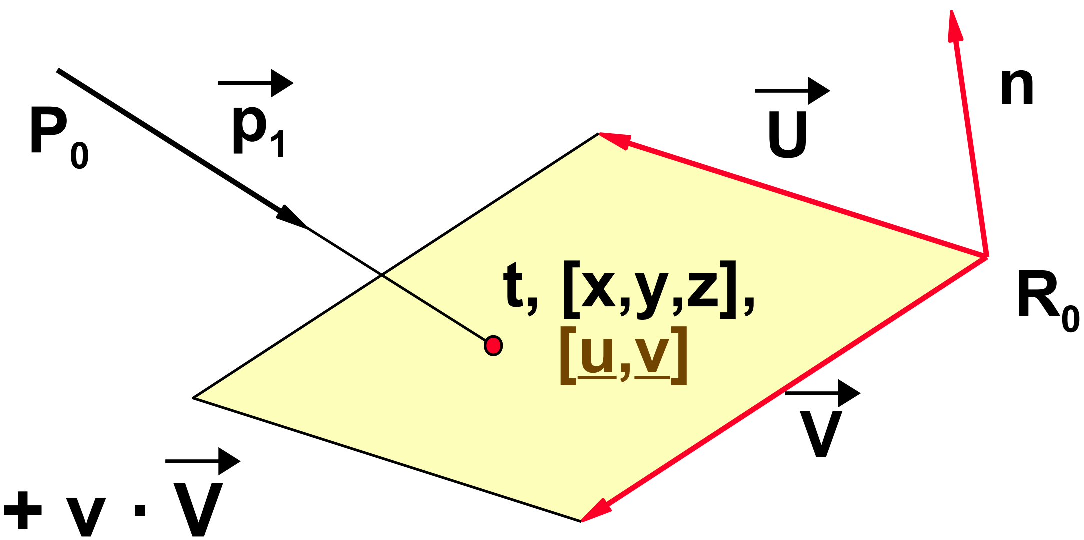
*paprsek:*

$$P(t) = P_0 + t \cdot \vec{p}_1$$

*rovnoběžník:*

$$R(u,v) = R_0 + u \cdot \vec{U} + v \cdot \vec{V}$$

$$0 \leq u,v \leq 1$$

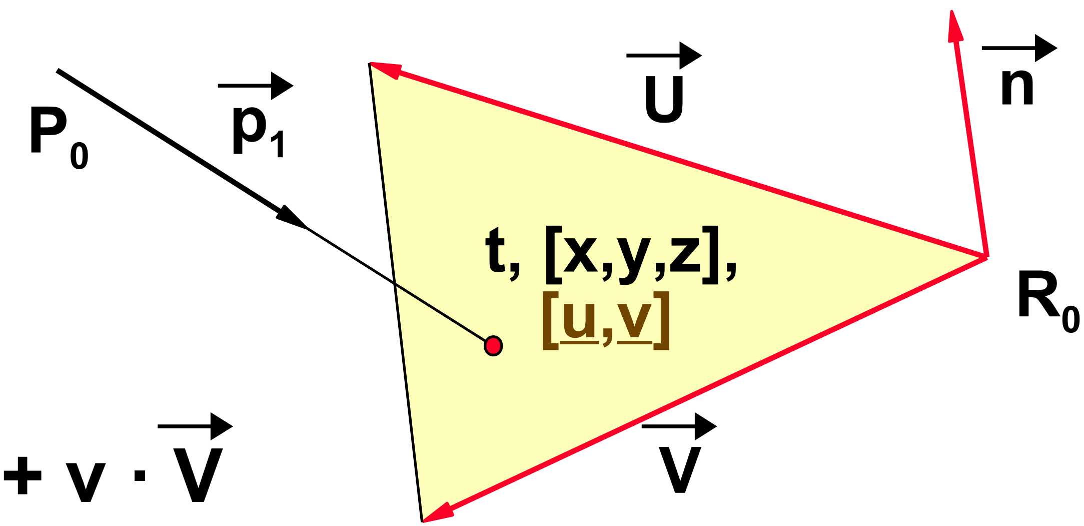



- výpočet **t**, **[x,y,z]**, **[u,v]**, kontrola **u,v**
- pozitivní případ celkem: **13±**, **14***, **3/**, **4≤**

# Trojúhelník

***paprsek:***

$$P(t) = P_0 + t \cdot \vec{p}_1$$




***trojúhelník:***

$$R(u,v) = R_0 + u \cdot \vec{U} + v \cdot \vec{V}$$

$$0 \le u, v, \underline{u+v} \le 1$$

- výpočet **t, [x,y,z], [u,v]**, kontrola **u,v**
- pozitivní případ celkem: **14±, 14*, 3/, 3≤**

# Obecný rovinný mnohoúhelník

*paprsek:*

$P(t) = P_0 + t \cdot \vec{p_1}$

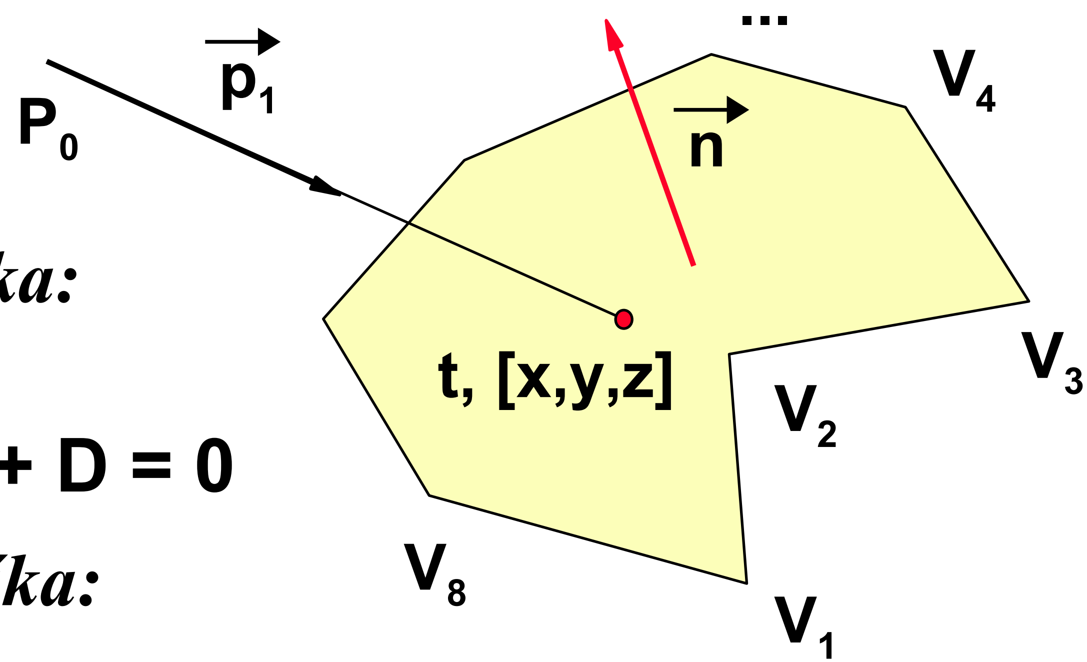
*rovina mnohoúhelníka:*

$\vec{n} = [x_N, y_N, z_N]$

$x \cdot x_N + y \cdot y_N + z \cdot z_N + D = 0$

*vrcholy mnohoúhelníka:*

$V_1, V_2, \ldots V_M$

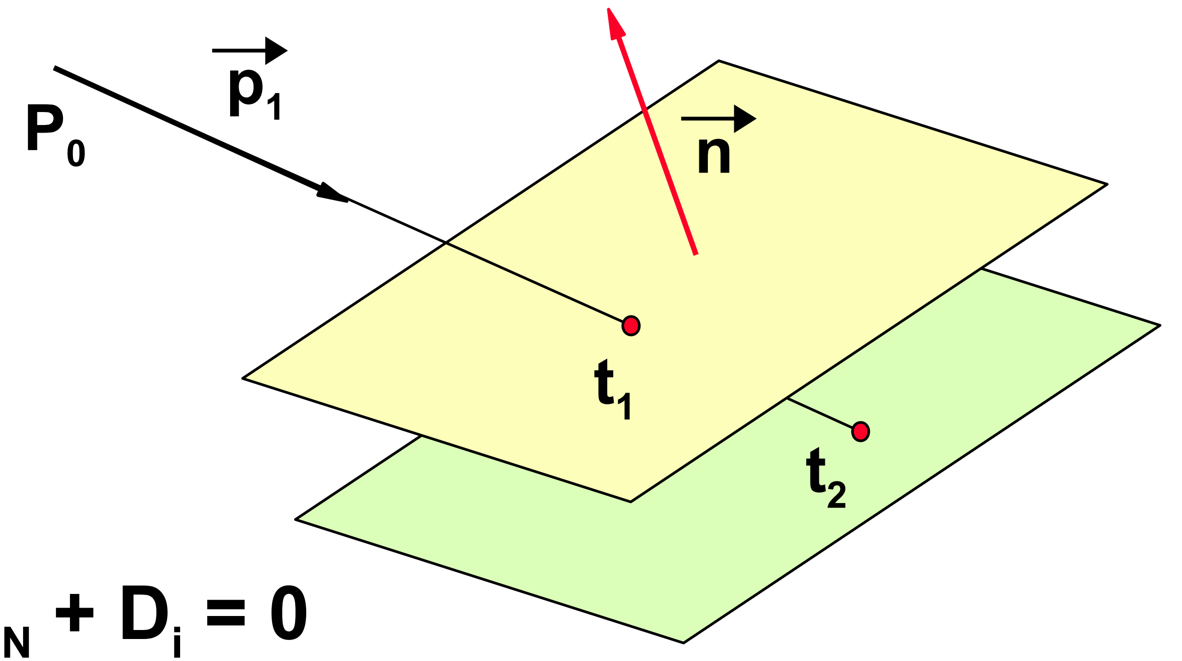



- výpočet **t, [x,y,z]**, test v rovině: **bod×polygon**
- průsečík s rovinou: **8±, 9*, 1/**

# Rovnoběžné roviny

*paprsek:*

$P(t) = P_0 + t \cdot \vec{p_1}$




*rovnoběžné roviny:*

$\vec{n} = [x_N, y_N, z_N]$

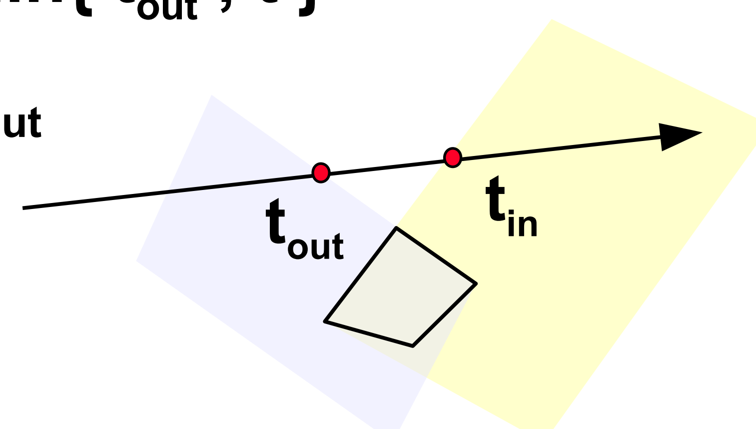
$x \cdot x_N + y \cdot y_N + z \cdot z_N + D_i = 0$

- průsečíky $t_i = -(\vec{n} \cdot P_0 + D_i) / (\vec{n} \cdot \vec{p_1})$
- první rovina: **5**±, **6***, **1**/, každá další: **1**±, **1**/

# Konvexní mnohostěn

- chápu jej jako **průnik K poloprostorů**
  – počítá se maximálně **K** průsečíků paprsku s rovinou
  – **rovnoběžnost** některých rovin (úspora) - např. kvádr
- proměnné $\mathbf{t_{in}}$, $\mathbf{t_{out}}$ inicializované na **0**, **∞**
- průsečík paprsku s poloprostorem: $\langle\, \mathbf{t}, \infty\,)$ resp. $(\,-\infty, \mathbf{t}\,\rangle$

  $\mathbf{t_{in} = \max\{\, t_{in}, t \,\}}$ resp. $\mathbf{t_{out} = \min\{\, t_{out}, t \,\}}$
- předčasně skončím, je-li $\mathbf{t_{in}} > \mathbf{t_{out}}$



# Implicitní plocha

*paprsek:*

$$P(t) = P_0 + t \cdot \vec{p_1}$$

*implicitní povrch:*

$$F(x,y,z) = 0$$

*příklad:*

$$(c - \cos ax) \cos z + (y + a \sin ax) \sin z +$$
$$+ \cos a(x+z) = 0$$

- po dosazení **P(t)** do **F** a úpravách: **F*(t) = 0**
- hledám kořeny funkce **F*(t)**
  – někdy stačí najít **nejmenší kladný kořen** (první průsečík), v CSG potřebuji naopak všechny

# Algebraická plocha

*paprsek:*

$$P(t) = P_0 + t \cdot \overrightarrow{p_1}$$

*algebraická plocha stupně* **d**:

$$A(x, y, z) = \sum_{i,j,k=0}^{i+j+k \le d} a_{ijk} \cdot x^i y^j z^k = 0$$

*příklad* (toroid s poloměry **a, b**):

$$T_{ab}(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2\right)^2 - 4a^2\left(b^2 - z^2\right)$$

- po dosazení **P(t)** do **A** a úpravách: **A*(t) = 0**
- **A*** je polynom stupně nejvýše **d**

# Kvadrika (d=2)

*obecná kvadrika:*

$$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = 0 \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$$

*po dosazení* **P(t)** *do rovnice vychází:*

$$a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0,$$

**kde** $a_2 = P_1^T Q P_1, \quad a_1 = 2P_1^T Q P_0, \quad a_0 = P_0^T Q P_0$

# Rotační kvadrika

*rotační kvadrika v základní poloze:*

$$x^2 + y^2 + az^2 + bz + c = 0$$

*koule:*

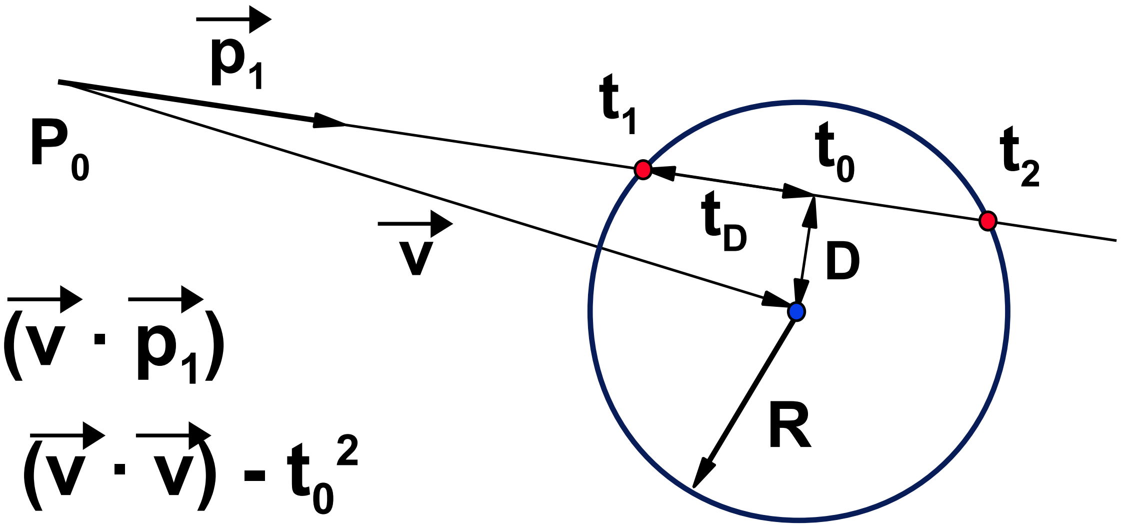
$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

*po dosazení* **P(t)** *do rovnice koule vychází:*

$$t^2\left(P_1 \cdot P_1\right) + 2t\left(P_0 \cdot P_1\right) + \left(P_0 \cdot P_0\right) - 1 = 0$$

# Koule (geometrické řešení)

$$P(t) = P_0 + t \cdot \vec{p_1}$$




- střed tětivy $\quad t_0 = (\vec{v} \cdot \vec{p_1})$
- vzdálenost $\quad D^2 = (\vec{v} \cdot \vec{v}) - t_0^2$
- odchylka $\quad t_D^2 = R^2 - D^2$
- pro $t_D^2 = 0$ je paprsek tečnou koule v $P(t_0)$
- pro $t_D^2 > 0$ existují dva průsečíky: $P(t_0 \pm t_D)$
- negativní: **9±**, **6***, **1<**, pozitivní navíc: **2±**, **1 sqrt**

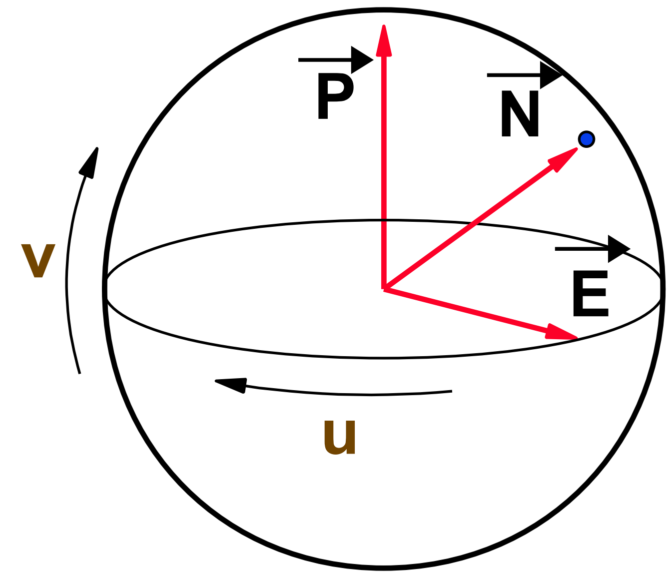
# Inverzní transformace na kouli

*koule:*

$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2 = R^2$

*směr k pólu:* $\vec{P}$, *k rovníku:* $\vec{E}$

$(\vec{P} \cdot \vec{E}) = 0$




*vstup:* $\vec{N}, \vec{P}, \vec{E}$

*výstup:* $[u,v]$ z $[0,1]^2$

$$\Phi = \arccos\left(-\vec{N}\cdot\vec{P}\right), \quad \theta = \frac{\arccos\left[\left(\vec{N}\cdot\vec{E}\right)/\sin\Phi\right]}{2\pi}$$

$$\underline{v = \Phi/\pi}, \quad \left(\vec{P}\times\vec{E}\right)\cdot\vec{N} > 0 \Rightarrow \underline{u = \theta}, \quad \text{jinak } \underline{u = 1-\theta}$$

# Válec a kužel

***jednotkový válec a kužel v základní poloze:***

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

***po dosazení* P(t) *do rovnice válce vychází:***

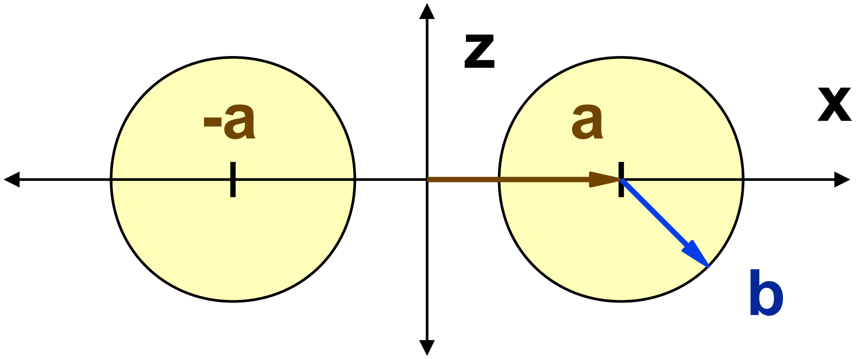
$$t^2\left(x_1^2 + y_1^2\right) + 2t\left(x_0x_1 + y_0y_1\right) + x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$$

***po dosazení* P(t) *do rovnice kužele vychází:***

$$t^2\left(x_1^2 + y_1^2 - z_1^2\right) + 2t\left(x_0x_1 + y_0y_1 - z_0z_1\right) +$$

$$+ x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 0$$

# Toroid




*Dvě kružnice v rovině* **xz**:

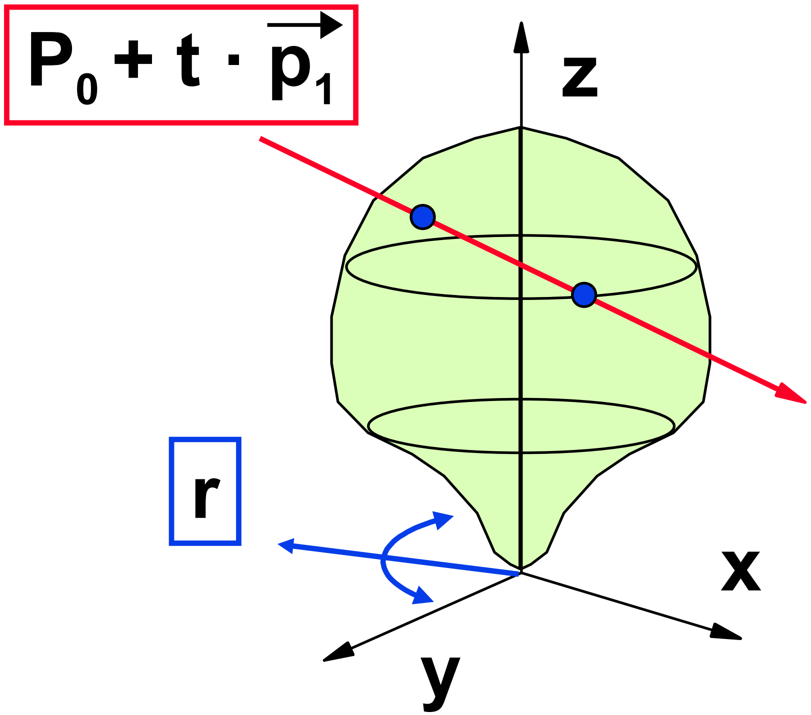
$$\left[(x-a)^2+z^2-b^2\right]\cdot\left[(x+a)^2+z^2-b^2\right]=0$$

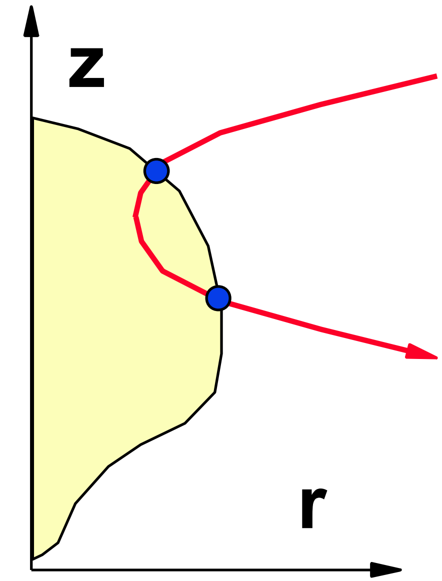
$$\left[x^2+z^2-\left(a^2+b^2\right)\right]^2=4a^2\left(b^2-z^2\right)$$

*Po substituci* $r^2=x^2+y^2$ *za* $x^2$ *vychází rovnice čtvrtého stupně:*

$$\left(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2\right)^2-4a^2\left(b^2-z^2\right)=0$$

# Rotační plocha




*rovnice paprsku v rovině* **rz:**

$$r^2 = x^2 + y^2 = \left( x_0 + x_1 t \right)^2 + \left( y_0 + y_1 t \right)^2$$

$$z = z_0 + z_1 t$$

# Paprsek v rovině rz

*Po eliminaci* **t:** $\underline{ar^2 + bz^2 + cz + d = 0}$ **(1)**

$$a = -z_1^2 \qquad e = x_0 x_1 + y_0 y_1$$

$$b = x_1^2 + y_1^2 \qquad f = x_0^2 + y_0^2$$

$$c = 2(z_1 e - z_0 b)$$

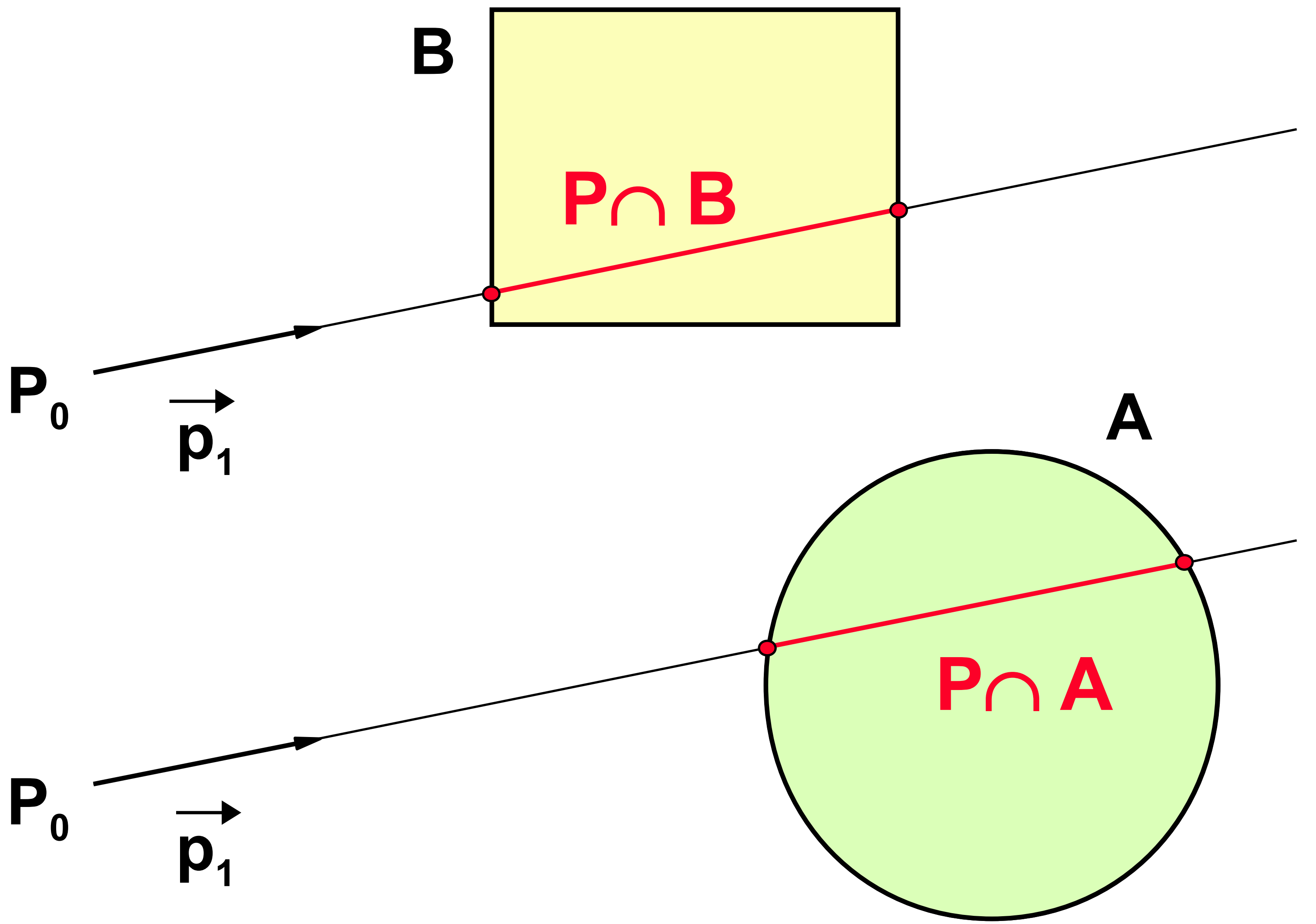
$$d = z_0(z_0 b - 2 z_1 e) + f z_1^2$$

- po dosazení parametrického vyjádření křivky **K(s)** do **(1)** dostaneme rovnici **K*(s) = 0**
- **K*** má proti **K** dvojnásobný stupeň

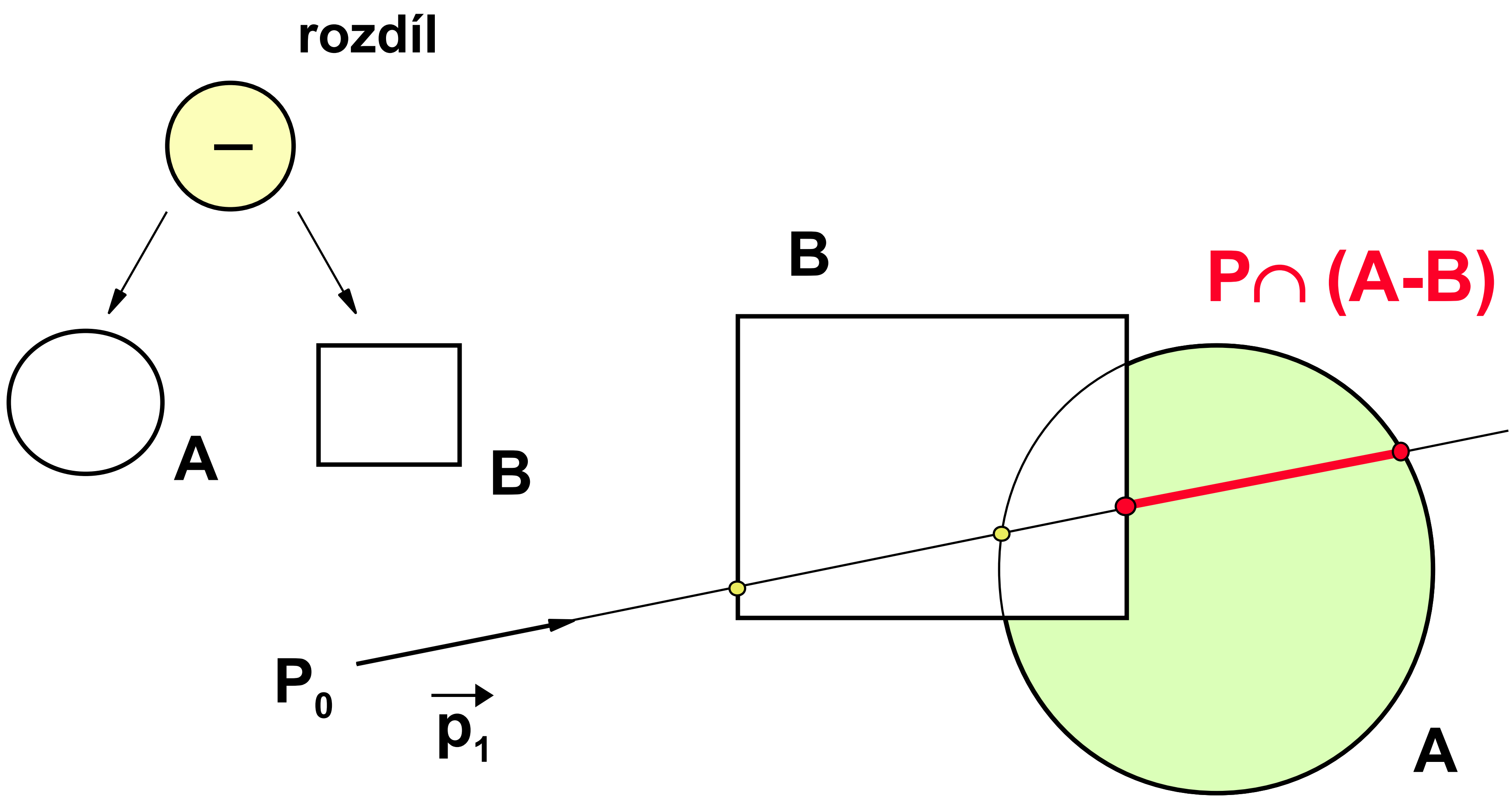
# CSG reprezentace

- pro **elementární tělesa** umím průsečíky spočítat
  – začátek a konec průniku paprsku s tělesem pro konvexní tělesa
- **množinové operace** provádím na polopřímce paprsku:
  – distributivita: $\mathbf{P \cap (A-B) = (P\cap A) - (P\cap B)}$
  – obecný průnik paprsku se scénou je množina intervalů
- **geometrické transformace**:
  – na paprsek aplikuji inverzní transformace

# Průsečíky P∩A, P∩B



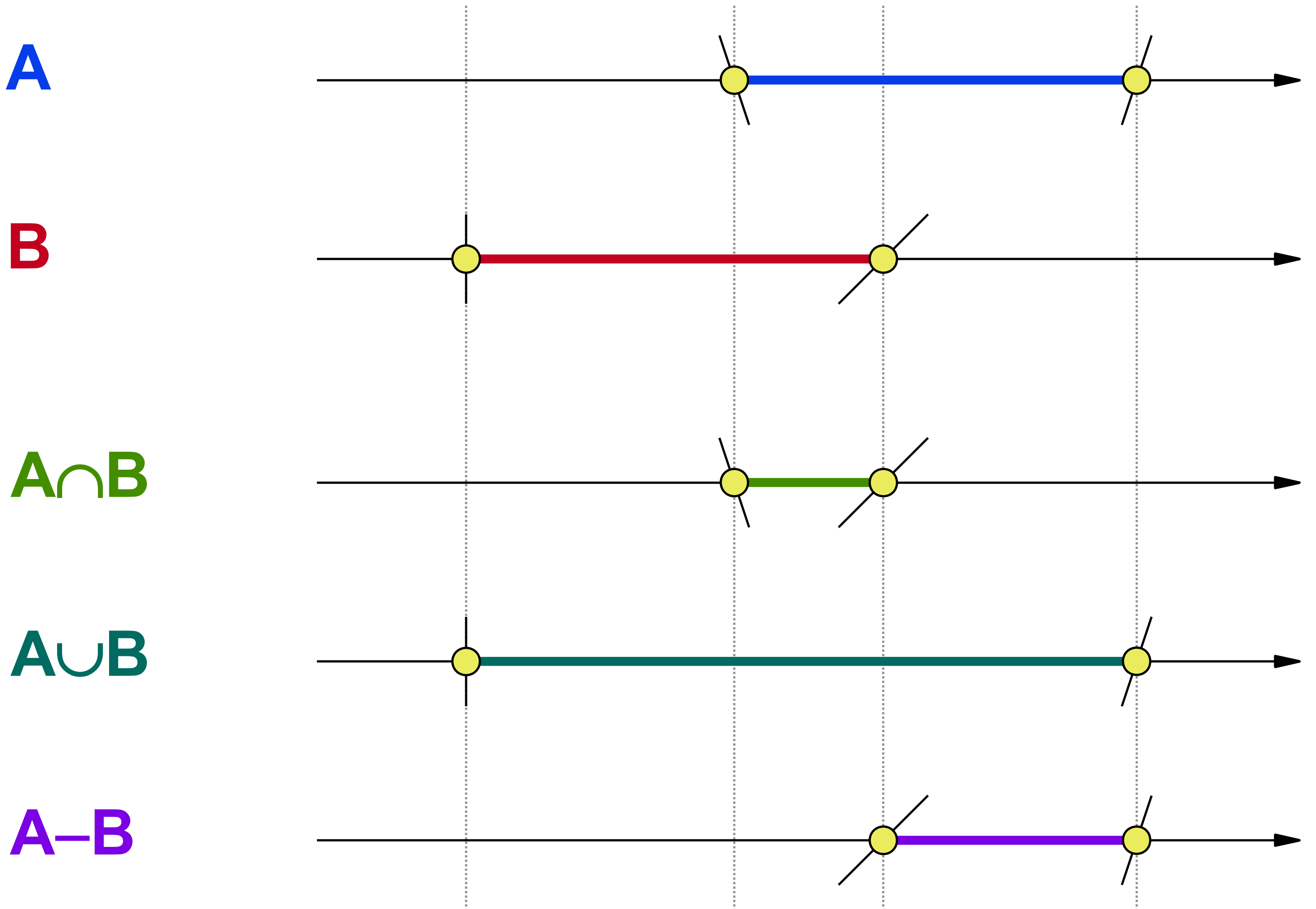
# Průsečík P∩(A−B)



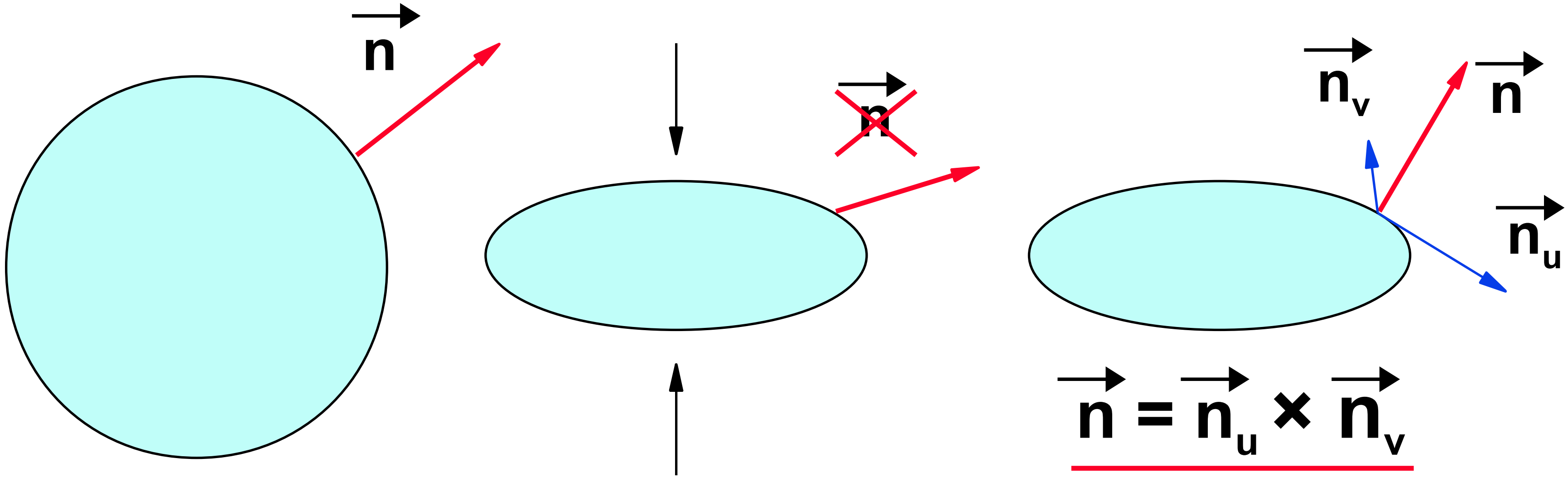
# Implementace

- **paprsek**:
  - počáteční bod $\mathbf{P_0}$ a směrový vektor $\overrightarrow{\mathbf{p_1}}$
  - transformuje se inverzními maticemi $\mathbf{T_i^{-1}}$ (nemusí být vždy výhodné … 1 transformace: **15+**, **18***)
- **průnik paprsku se scénou** (částí scény):
  - uspořádaný seznam hodnot parametru **t**: [$\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{t_3}$, ..]
- **množinové operace**:
  - zobecněné slévání vstupních seznamů $\mathbf{t_i}$
- **zpětná transformace normálových vektorů!**

# Množinové operace na paprsku



# Zpětná transformace normál




- **vektory** transformujeme pouze submaticí **3×3**!
- obecné **afinní zobrazení nezachovává úhly** (kolmost normálového vektoru na plochu)
  – místo normály přenášíme dva **povrchové vektory**
- alternativa – matice pro **normály**: $\mathbf{M_n = (M^{-1})^T}$

# Konec

## Další informace:

- **A. Glassner**: ***An Introduction to Ray Tracing***, Academic Press, London 1989, 35-119
- **J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes**: ***Computer Graphics, Principles and Practice***, 712-714