Průsečíky paprsku s Bézierovými pláty

© 1996-2018 Josef Pelikán
CGG MFF UK Praha

pepca@cgg.mff.cuni.cz
http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/

Bikubický Bézierův plát

$$P_{ij} = \left[x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \right]$$

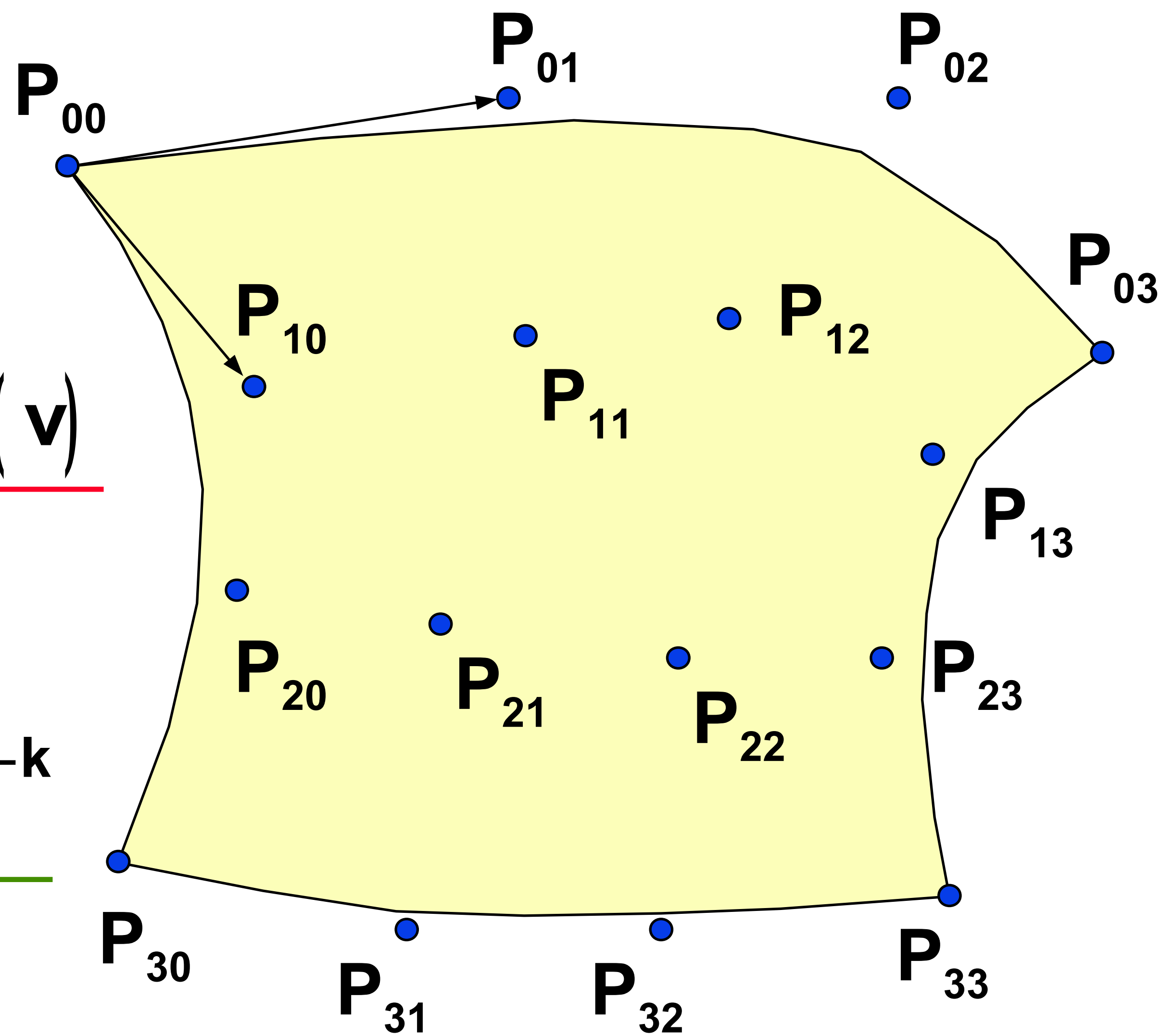
$$\mathbf{P} = \left[P_{ij} \right]_{i,j=0}^{3}$$

$$P(u,v) = \mathbf{B}(u)^{T} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}(v)$$

$$\mathbf{B}(t) = \left[B_k(t) \right]_{k=0}^{3}$$

$$B_k(t) = \binom{3}{k} t^k (1-t)^{3-k}$$

Bernsteinovy polynomy



Bernsteinovy polynomy

- $\mathbf{B_k(t)}$ jsou **nezáporné** polynomy třetího stupně pro $\mathbf{k = 0 .. 3}$ a $\mathbf{0 \le t \le 1}$

- $\sum_k \mathbf{B_k(t) = 1}$ pro libovolné $\mathbf{t}$
  - Cauchyova podmínka (afinní invariance)

- použijeme-li $\mathbf{B_k(t)}$ jako váhy v lineární kombinaci, bude výsledek ležet vždy v **konvexním obalu** vstupních údajů
  - $\mathbf{B_k(t)}$ jsou váhové funkce konvexní kombinace

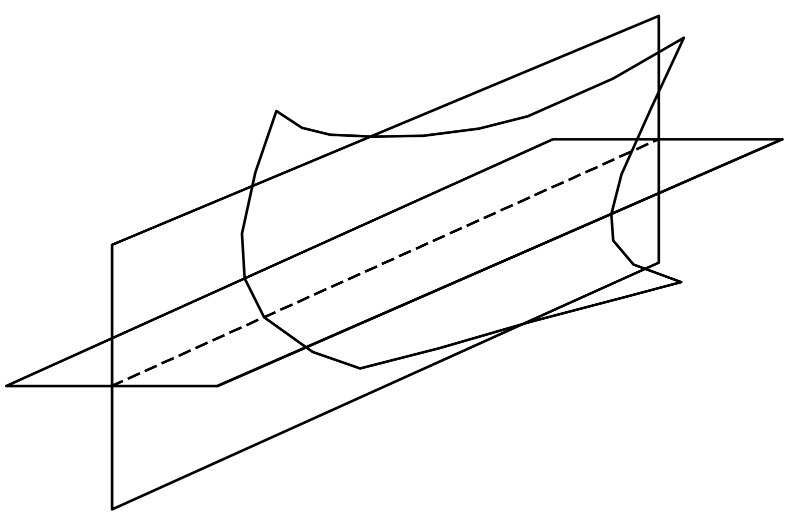
Průsečík paprsku a Bézierova plátu

- převod definice Bézierova plátu do implicitního tvaru - dostaneme **algebraickou plochu 18 stupně !**
  – po dosazení z rovnice paprsku dostáváme **polynom 18. stupně** proměnné **t** (málo efektivní řešení)

- $\mathbf{B(u,v) = P_0 + t \cdot \vec{p}_1}$ tvoří algebraickou soustavu tří rovnic pro tři neznámé: **t, u, v**
  – řešení např. trojrozměrnou **Newtonovou metodou** (konverguje pouze na malém okolí)

Průsečík paprsku a Bézierova plátu

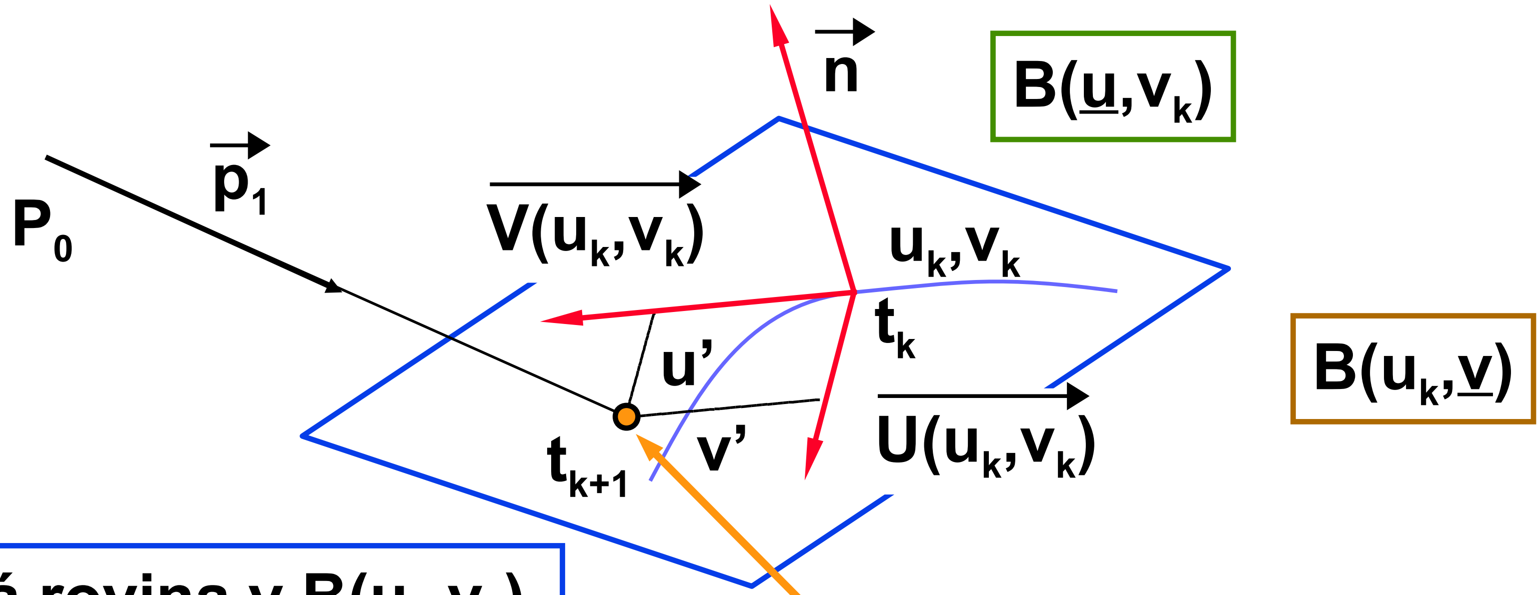
- soustava 2 algebraických rovnic pro 2 neznámé **u** a **v**:
  - eliminace **t** z předchozí rovnice
  - průsečnice plochy a dvou rovin (jejichž průsečíkem je paprsek)
  - řeší se např. dvojrozměrnou **Newtonovou metodou**



$$F_1(u,v) = 0$$

$$F_2(u,v) = 0$$

3D Newtonova iterace



tečná rovina v $B(u_k,v_k)$

Průsečík paprsku s tečnou rovinou: t_{k+1}, u’, v’

$$V(u_k,v_k) = \frac{\partial B}{\partial v}(u_k,v_k)$$

$$U(u_k,v_k) = \frac{\partial B}{\partial u}(u_k,v_k)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + u' \\ v_{k+1} &= v_k + v' \end{aligned}}$$

Dělení Bézierova plátu

- jeden Bézierův plát **B(u,v)** $[\,0 \le u,v \le 1\,]$ rozdělím na čtyři menší:

  $B_{00}(u,v)$ $[\,0 \le u,v \le 1/2\,]$

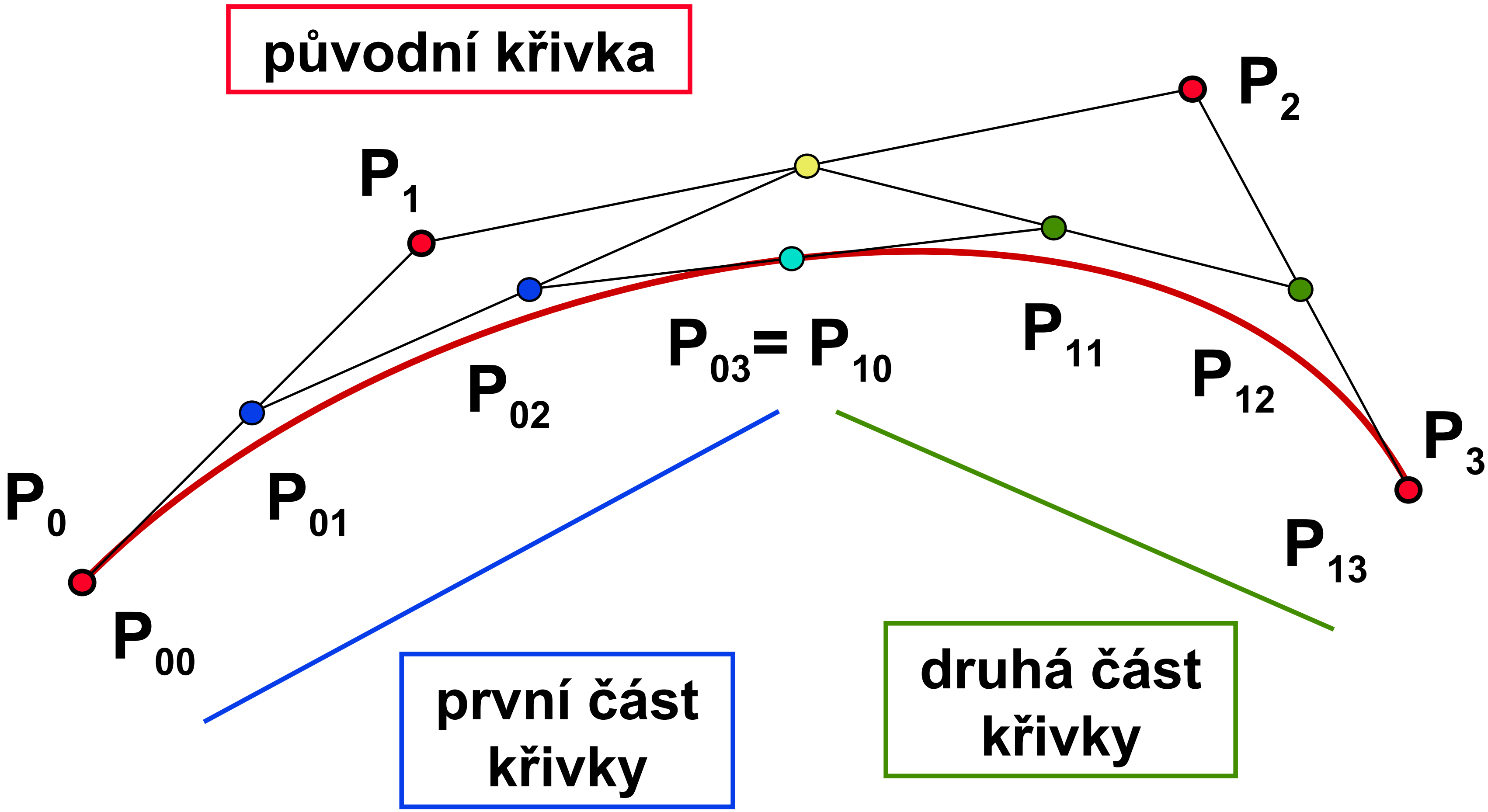
  $B_{01}(u,v)$ $[\,0 \le u \le 1/2,\ 1/2 \le v \le 1\,]$

  $B_{10}(u,v)$ $[\,1/2 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1/2\,]$

  $B_{11}(u,v)$ $[\,1/2 \le u,v \le 1\,]$

- řídící vrcholy spočítám rekurzivním algoritmem **P. de Casteljau**
  - pouze sčítání a dělení dvěma

Dělení křivky podle de Casteljau



Výpočet průsečíku

- hledám pouze **nejbližší průsečík** paprsku se soustavou Bézierových plátů
- každý Beziérův plát leží uvnitř **konvexného obalu** svých řídících vrcholů
  - udržuji si souřadnice **obalového kvádru** (x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}, z_{min}, z_{max})
- testované pláty dělím tak dlouho, dokud v nich nemohu aplikovat **Newtonovu metodu**
  - dostatečně malá **křivost plochy**

Obalové kvádry

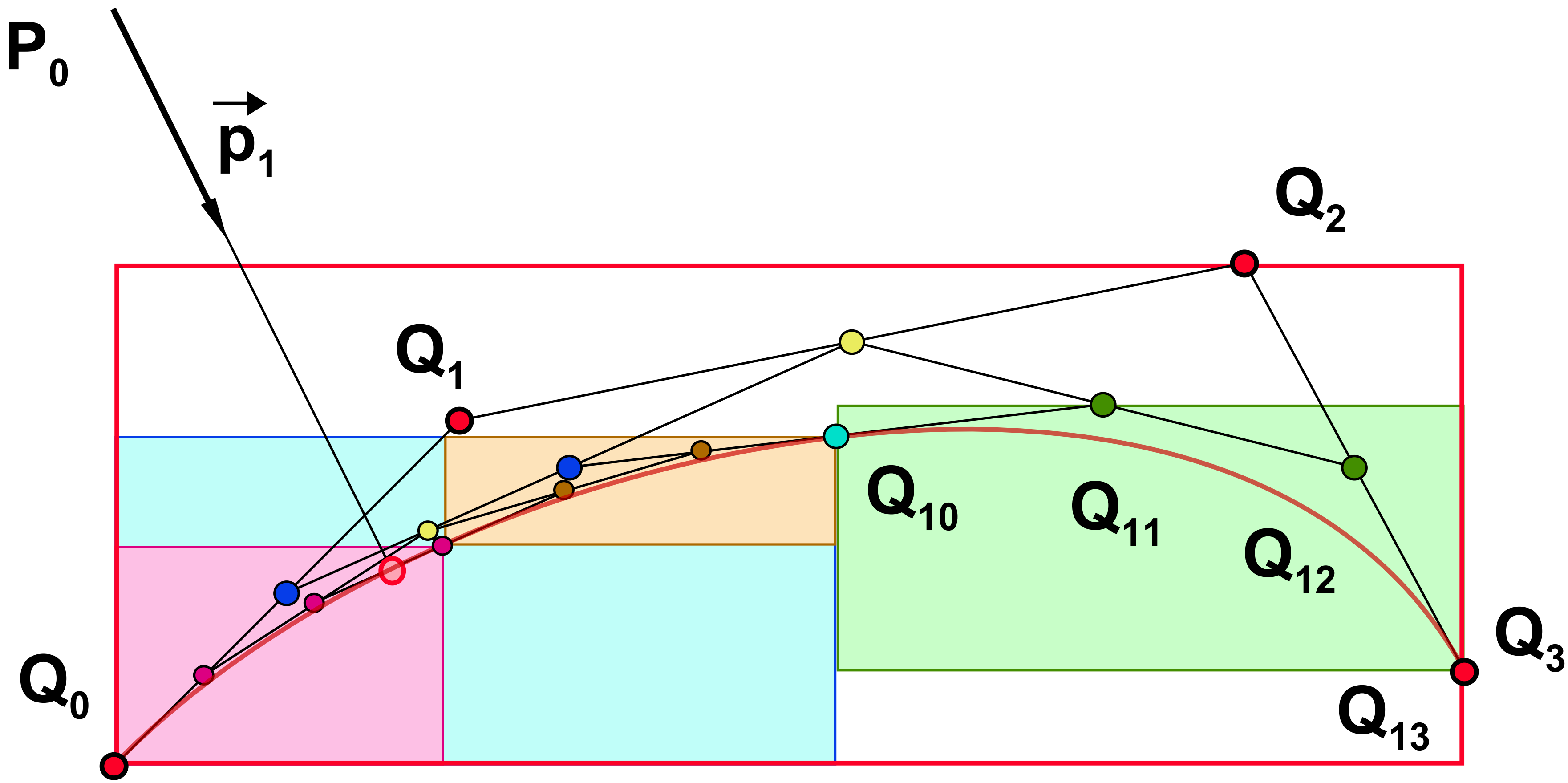


Schéma algoritmu

❶ setřídím obalové kvádry Bézierových plátů podle **směru paprsku** (odpředu-dozadu)

❷ vyberu nejbližší plát: pokud má dostatečně malou křivost, hledám v něm průsečík **Newtonovou metodou**

– končím, pokud je průsečík blíže než ostatní kvádry

❸ nejbližší plát rozdělím a nové obalové kvádry zařadím do seznamu

– jdu zpět na krok ❷

Literatura

- **A. Glassner**: ***An Introduction to Ray Tracing***, Academic Press, London 1989, 99-102
- **J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes**: ***Computer Graphics, Principles and Practice***, 507-528