

Anti-aliasing a vzorkovací metody

© 1996-2016 Josef Pelikán
CGG MFF UK Praha

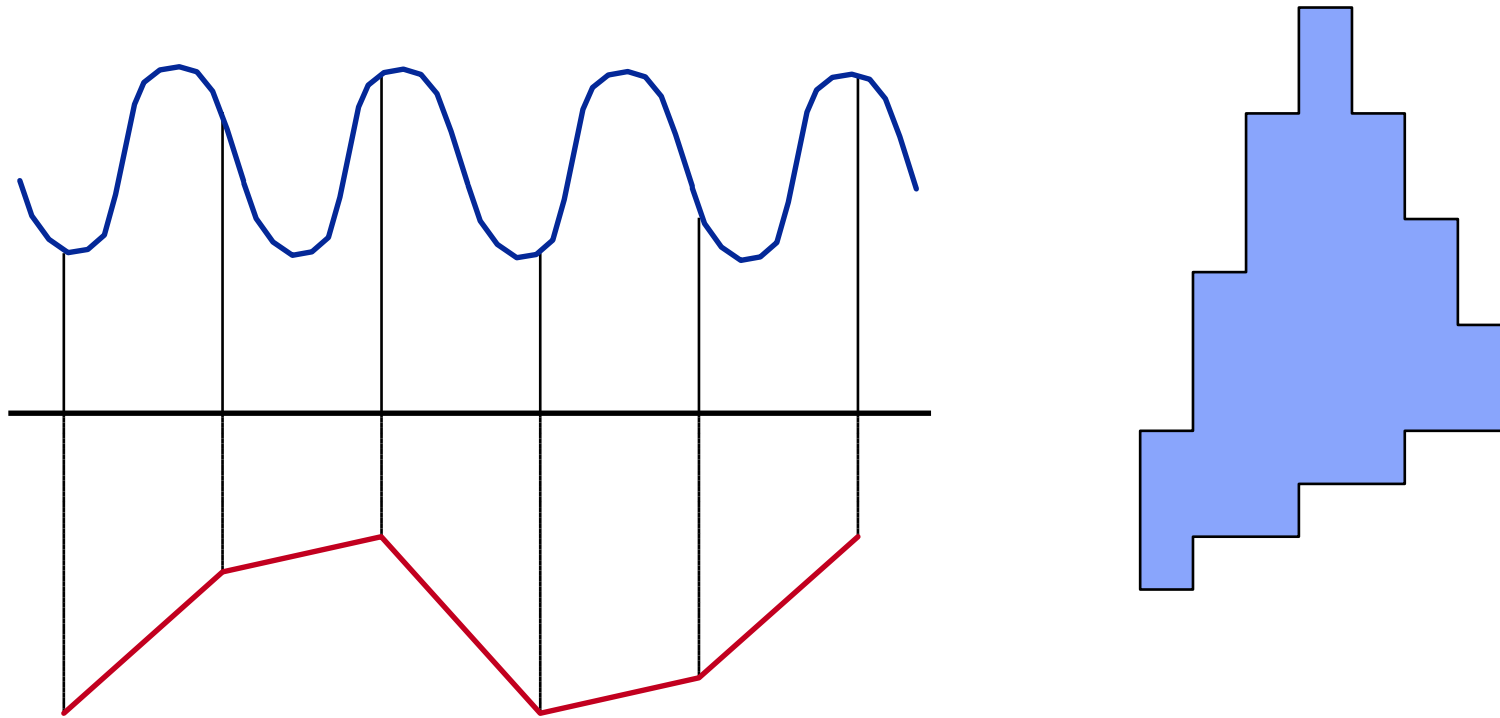
pepca@cgg.mff.cuni.cz

<http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/>



Prostorový a časový alias

Rušivé jevy vzniklé zobrazením v pravidelné diskretní mřížce

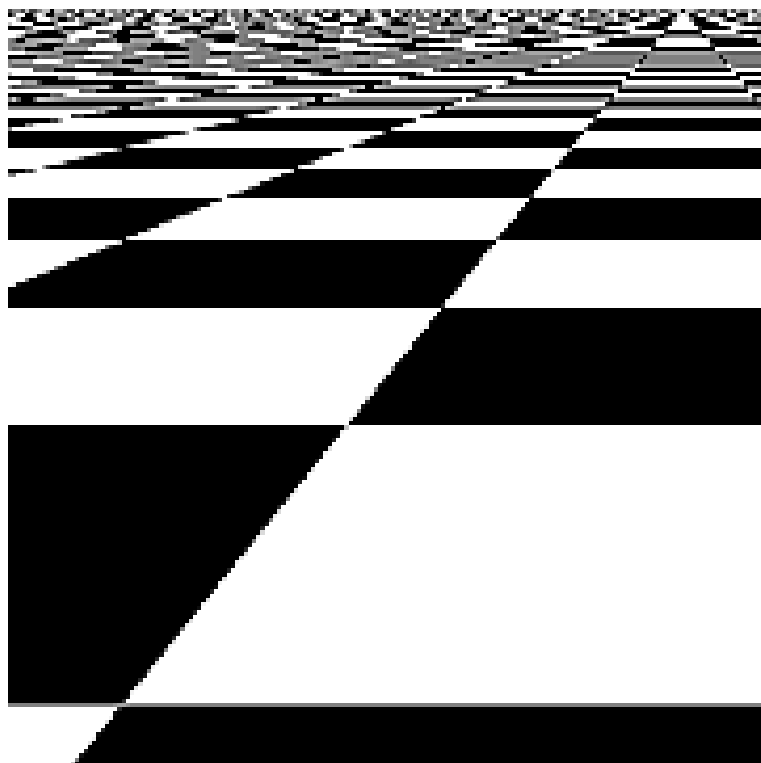




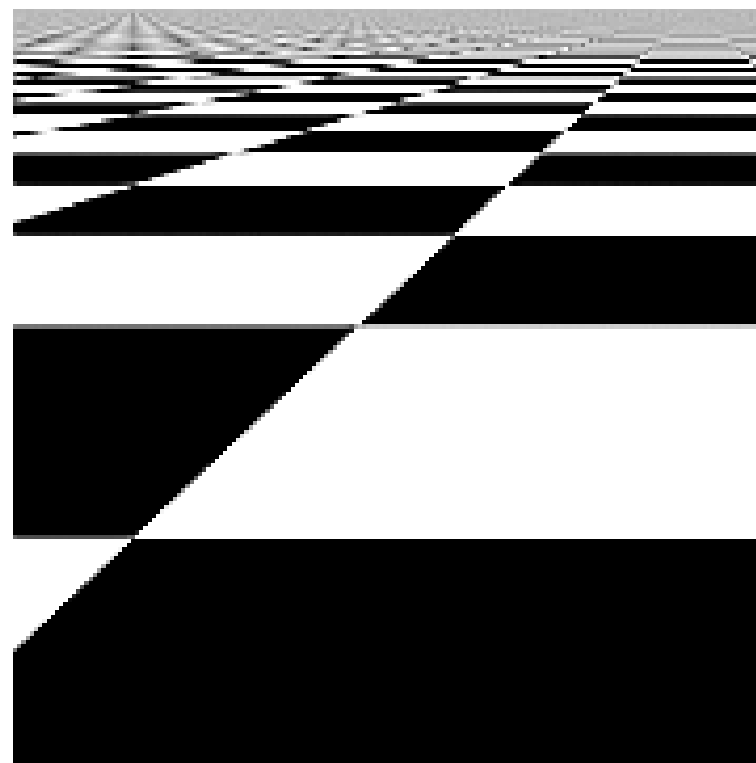
Prostorový alias

- **zubaté** zobrazení šikmých linií
 - při kreslení husté sítě čar vzniká tzv. „Moiré efekt”
- **interference** rychle se měnícího obrazu s pixelovým rastrem
 - příklad: plot v perspektivní projekci
 - příliš jemná nebo příliš vzdálená pravidelná textura (šachovnice ve velké vzdálenosti)

Prostorový alias – šachovnice



1 vzorek na pixel



256 vzorků na pixel (jittering)

Časový alias



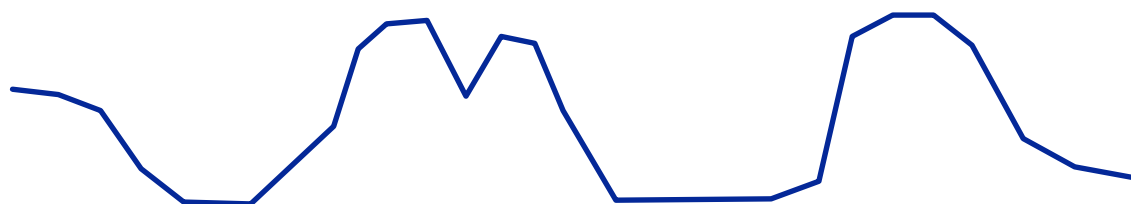
- ♦ projevuje se zejména při animaci **pomalého pohybu**
- ➔ **blikání** na obvodu pohybujících se objektů
 - v extrémním případě se celé malé objekty objevují a opět mizí
- ➔ **interference** cyklického pohybu se snímkovou frekvencí
 - otáčející se kolo se zdánlivě zastaví nebo se pomalu točí opačným směrem



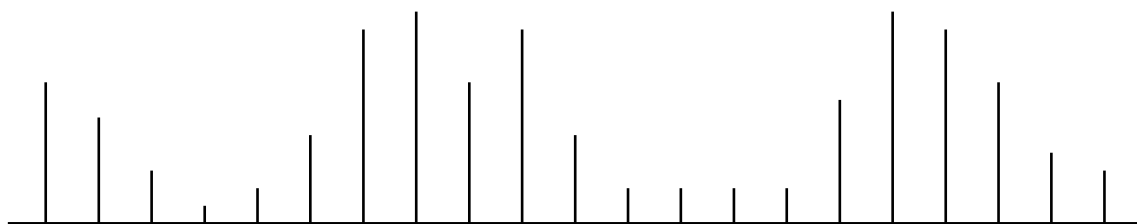
Při pozorování lidským okem nebo fotografování alias nevzniká

- objekty menší než **rozlišovací schopnost** se zobrazují rozmazaně
 - plot ve velké dálce vidíme jako plochu, jejíž barva je směsí barvy planěk a pozadí
- příliš rychlý pohyb způsobuje **nejasné** (rozmazané) **vnímání**

Zobrazení v rastrovém prostředí

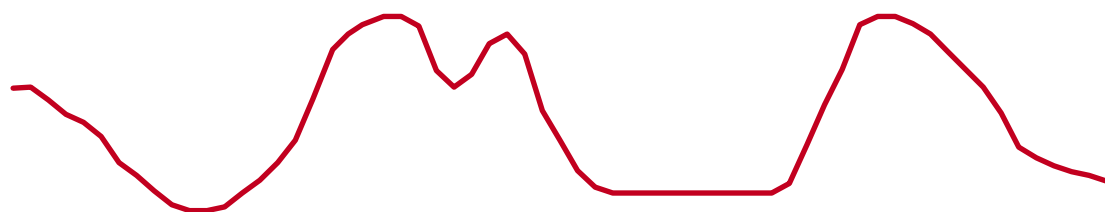
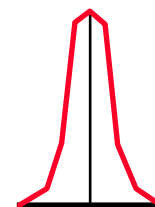


originál
(obrazová funkce)



vzorkování
(výpočet)

rekonstrukční filtr:



rekonstrukce
(zobrazení)

Vzorkování a rekonstrukce



- **vzorkování** nebo **výpočet** obrazové funkce
 - před vzorkováním by se z obrázku měly odstranit všechny vyšší (nezobrazitelné) frekvence
 - filtr typu dolní propust (průměrování v okénku)
 - při **syntéze obrazu** se mohou vyšší frekvence zanedbávat přímo (vyhlazování vzorkováním plochy)
- **rekonstrukční filtr** je dán vlastnostmi výstupního zařízení
 - např. na monitoru se stopy sousedních pixelů překrývají



Vyhlazování pomocí integrace

Obrazová funkce se spojitým definičním oborem a neomezeným spektrem:

$$\underline{f(x, y)}$$

Vyhlazovací filtr (spojitá funkce s omezeným nosičem):

$$\underline{h(x, y)}$$

Barva pixelu [i,j]:

$$I(i, j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot h(x - i, y - j) \, dx \, dy$$



Jednodušší varianta

Předpokládáme **obdélníkový vyhlazovací filtr**
a pixel ve tvaru **jednotkového čtverce**:

$$I(i, j) = \int_j^{j+1} \int_i^{i+1} f(x, y) dx dy$$

(integrální střední hodnota obrazové funkce
na ploše daného pixelu)



Výpočet integrálu

- 1 **analytický**
 - omezené případy (jednoduchá obrazová funkce)
- 2 **numerický** - pomocí vzorkování
 - spočítá se konečný počet vzorků $[\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i]$
 - integrál se odhadne sumou

$$I(i, j) = \frac{\sum_k f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \cdot h(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)}{\sum_k h(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)}$$

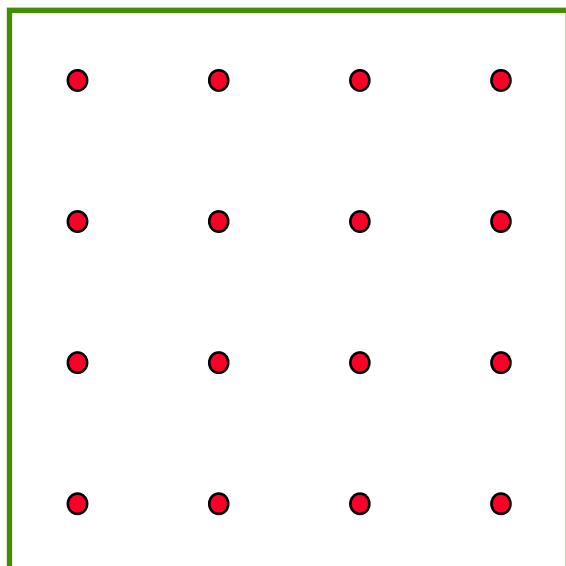
- stochastický výběr vzorků - **metoda Monte-Carlo**



Vzorkovací metody

- ♦ **předpis:** $k \dots [x_k, y_k]$
 - výběr vzorku z dané oblasti:
nejčastěji tvaru obdélníka, čtverce nebo kruhu v 2D
 - vzorkování ve vyšších dimenzích (řádově do dim=10)
- ➔ požadované **vlastnosti** vzorkovacího algoritmu
 - rovnoměrné pokrytí dané oblasti
 - absolutní pravidelnost je nežádoucí (interference)
 - efektivní výpočet

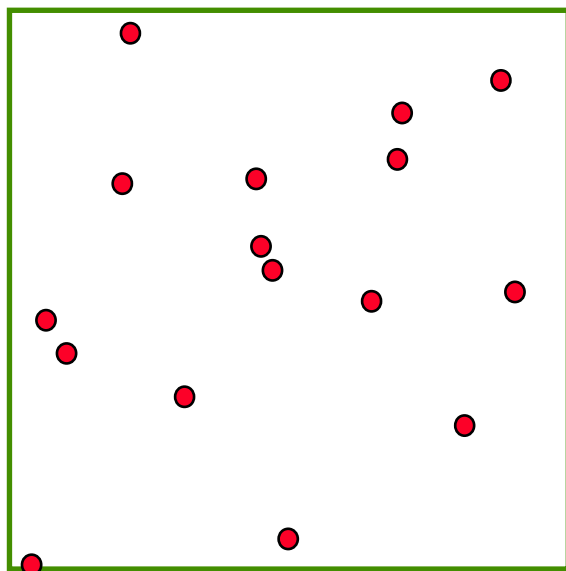
Pravidelné vzorkování



„uniform sampling”

Neodstraňuje **rušivé interference**
(pouze je posunuje do vyšších frekvencí)

Náhodné vzorkování

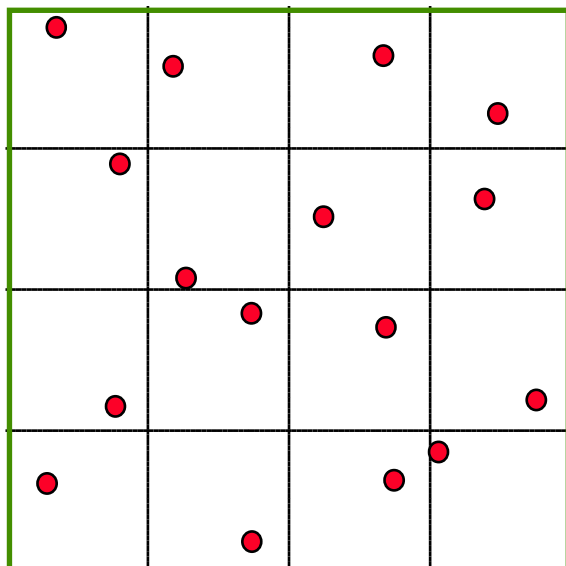


„random sampling”

N nezávislých náhodných pokusů s rovnoměrným rozložením pravděpodobnosti

Vzorky mohou vytvářet **větší shluky**
Velký podíl **šumu** ve výsledku

„roztřesení“

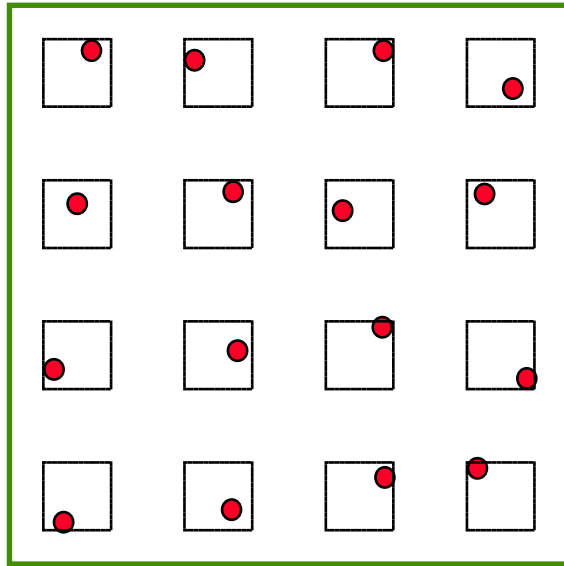


„jittering“

$K \times K$ nezávislých náhodných pokusů v $K \times K$ shodných subintervalech (pokrývajících původní interval beze zbytku)

Omezení pravděpodobnosti **velkých shluků**
Rovnoměrnější pokrytí vzorkovaného intervalu

Částečné „roztřesení“



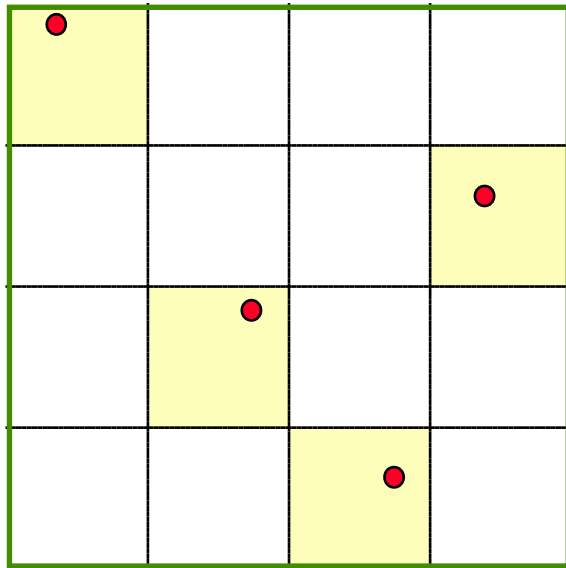
„semijittering“

$K \times K$ nezávislých náhodných pokusů v $K \times K$ shodných subintervalech (nepokrývajících původní interval)

Zamezuje vytváření **shluků**

Dílčí pravidelnost může být na závadu

„N věží” (nezávislé „roztřesení”)

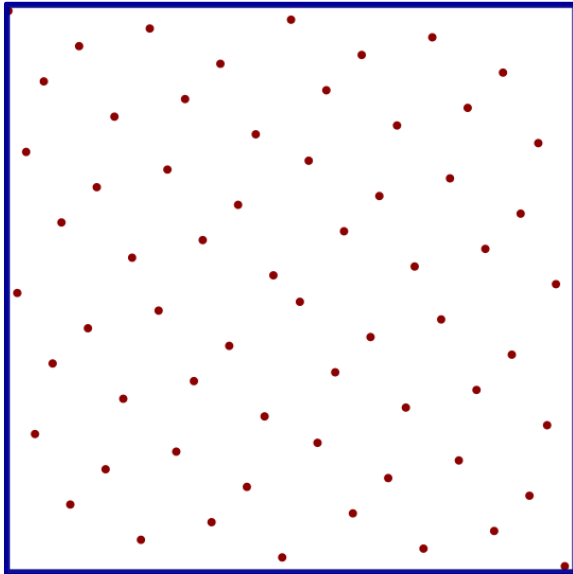


„N rooks”
„uncorrelated jitter”

Úsporná varianta „roztřesní”,
v každém řádku i sloupci je
právě jeden vzorek. Náhodná
permutace diagonály

Zachovává si výhodné vlastnosti „roztřesení” při
větší **efektivitě** (zejména ve vyšších dimenzích!)

Hammersley



- + **výborná diskrepance**
- + **deterministické**
- + **velmi rychlý výpočet**
- nelze zahušťovat
- špatné spektrum

Na podobném principu je založena i Haltonova sekvence..



Deterministické sekvence

- ◆ na podobném principu jsou založeny:
 - Halton, Hammersley, Larcher-Pillichshammer
- ◆ pro prvočíslo b nechť je kladné přirozené číslo n vyjádřeno pomocí b -ární reprezentace:

$$n = \sum_{k=0}^{L-1} d_k(n) b^k$$

- ◆ pak je definováno číslo v intervalu $[0,1)$:

$$g_b(n) = \sum_{k=0}^{L-1} d_k(n) b^{-k-1}$$



Halton, Hammersley

- ◆ slavná Haltonova sekvence (např. $b_1=2$, $b_2=3$):

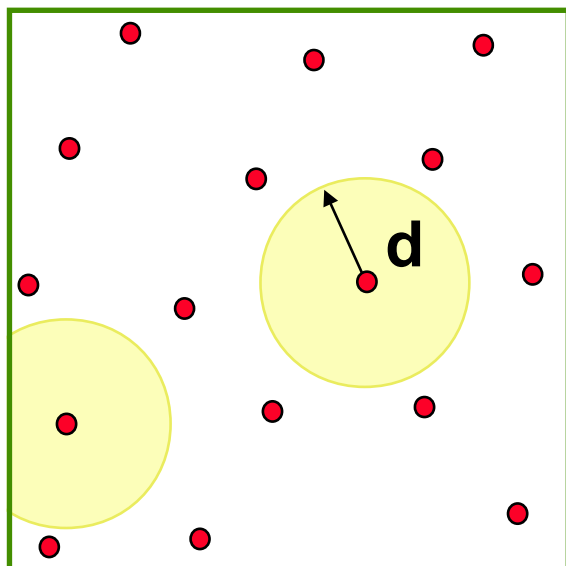
$$x(n) = \left[g_{b_1}(n), g_{b_2}(n) \right]$$

- ◆ Hammersley sekvence (např. $b=2$):

$$x(n) = \left[\frac{n}{N}, g_b(n) \right]$$

- ◆ Larcher-Pillichshammer sekvence používá uvnitř funkce $g_b(n)$ operaci XOR místo sčítání..

Poissonovo diskové vzorkování



„Poisson disk sampling”

N náhodných pokusů
splňujících podmínku:
 $| [x_k, y_k] - [x_l, y_l] | > d$
pro danou konstantu d

Zamezuje vytváření **shluků**, napodobuje rozložení **světločivných buněk** na sítnici savců
Obtížná **efektivní implementace!**



Implementace

- ◆ kandidáty počítám pomocí **pseudonáhodného generátoru**
 - má-li kandidát moc blízko k nějakému již přijatému vzorku, odmítnu ho
 - se zvětšujícím se počtem vzorků se snižuje efektivita
- ➔ problematická volba **konstanty d**
 - maximální počet umístitelných vzorků závisí na d
- ➔ obtížně se provádí **zjemňování**
 - přidávání dalších vzorků k již dříve spočítaným



Algoritmus D. Mitchella

(algoritmus „nejlepšího kandidáta”)

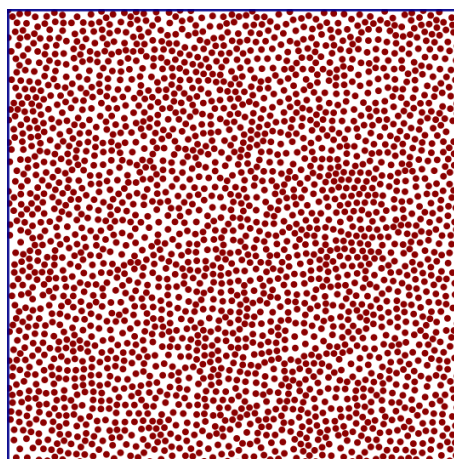
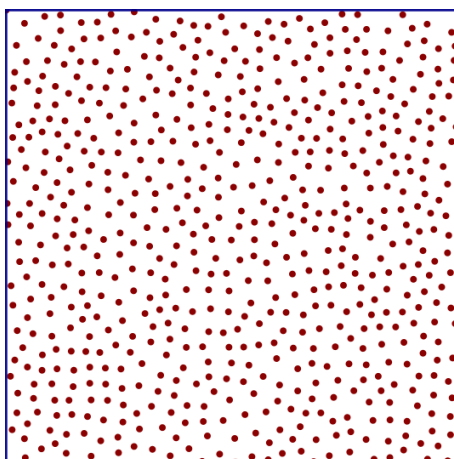
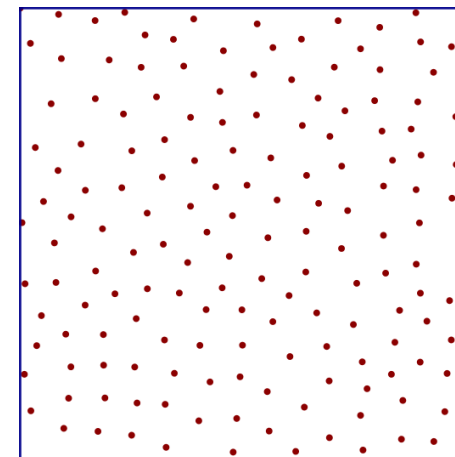
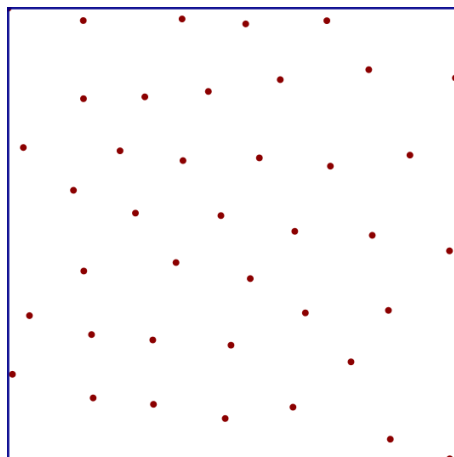
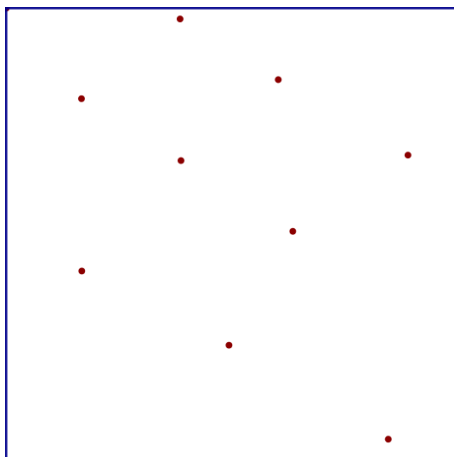
- ♦ generuje **postupně se zahušťující** Poissonovskou posloupnost vzorků
 - odpadají problémy s volbou **d**
 - snadné zjemňování
- ♦ algoritmus je **časově náročný**
 - soubor vzorků lze **spočítat předem** do tabulky
 - pro odstranění **podobnosti (závislosti)** vzorků v sousedních oblastech se soubor vždy náhodně otočí a posune

Algoritmus D. Mitchella



- ① **první vzorek** vyberu náhodně
 - ② **výběr (k+1). vzorku:**
 - vygeneruji $k \cdot q$ nezávislých kandidátů (q udává kvalitu souboru)
 - vyberu vzorek nejvzdálenější od k předchůdců (metrika nemusí být uniformní - vážené vzorkování)
- ➔ při větším q dostávám kvalitnější posloupnost vzorků
- v náročných aplikacích se volí $q > 10$

Inkrementální ukázka



Počet vzorků:

10, 40, 160,
640, 2560

$K = 10$

Adaptivní zjemňování



- ♦ vzorkování podle **lokální důležitosti** (vážené vzorkování) nebo **zajímavosti**
 - některé oblasti pokrývaného intervalu mají větší váhu
 - oblasti s větší variací vzorkované funkce je nutné pokrýt hustěji
- ➔ „důležitost” nebo „zajímavost” **nemusím znát dopředu**
 - algoritmus se musí přizpůsobovat dosaženým výsledkům (adaptabilita)

Modifikace statických algoritmů



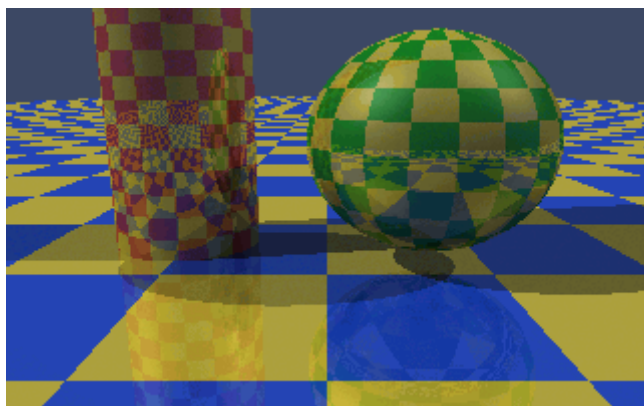
- ① **první fáze** vzorkování:
 - výpočet několika málo testovacích vzorků (1-5)
 - výpočet zjemňovací **kriteriální funkce**
 - ② **další zjemňovací fáze:**
 - vzorkování se lokálně zjemňuje tam, kde je třeba (podle kriteriální funkce)
 - je výhodné, když můžeme používat všech dosud vygenerovaných vzorků (inkrementalita)
- ➔ **téměř každý algoritmus lze takto upravit**



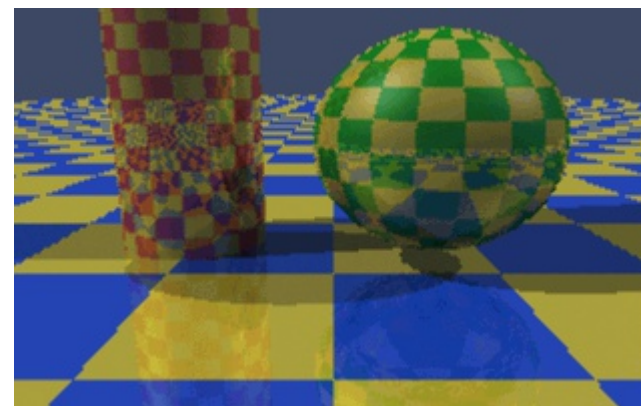
Zjemňovací kritéria

- **funkční hodnoty** (rozdíl, rozptyl, gradient)
 - rozdíl v barvě sousedních vzorků, ..
- **čísla zobrazených těles**
 - větší priorita
 - textury s opakujícími se vzory: signature
- **stromy výpočtu** (rekurzivní sledování paprsku)
 - topologické porovnání celých stromů nebo jen několika horních pater
 - identifikátor stromu - rekurzivní konstrukce pomocí hašovací funkce

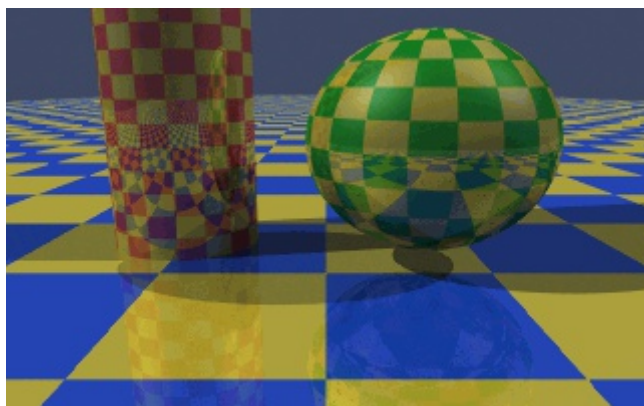
Příklad adaptivního zjemňování



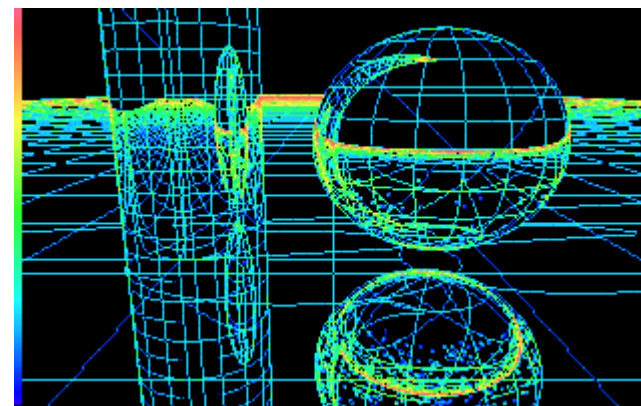
1 spp



1/2 spp

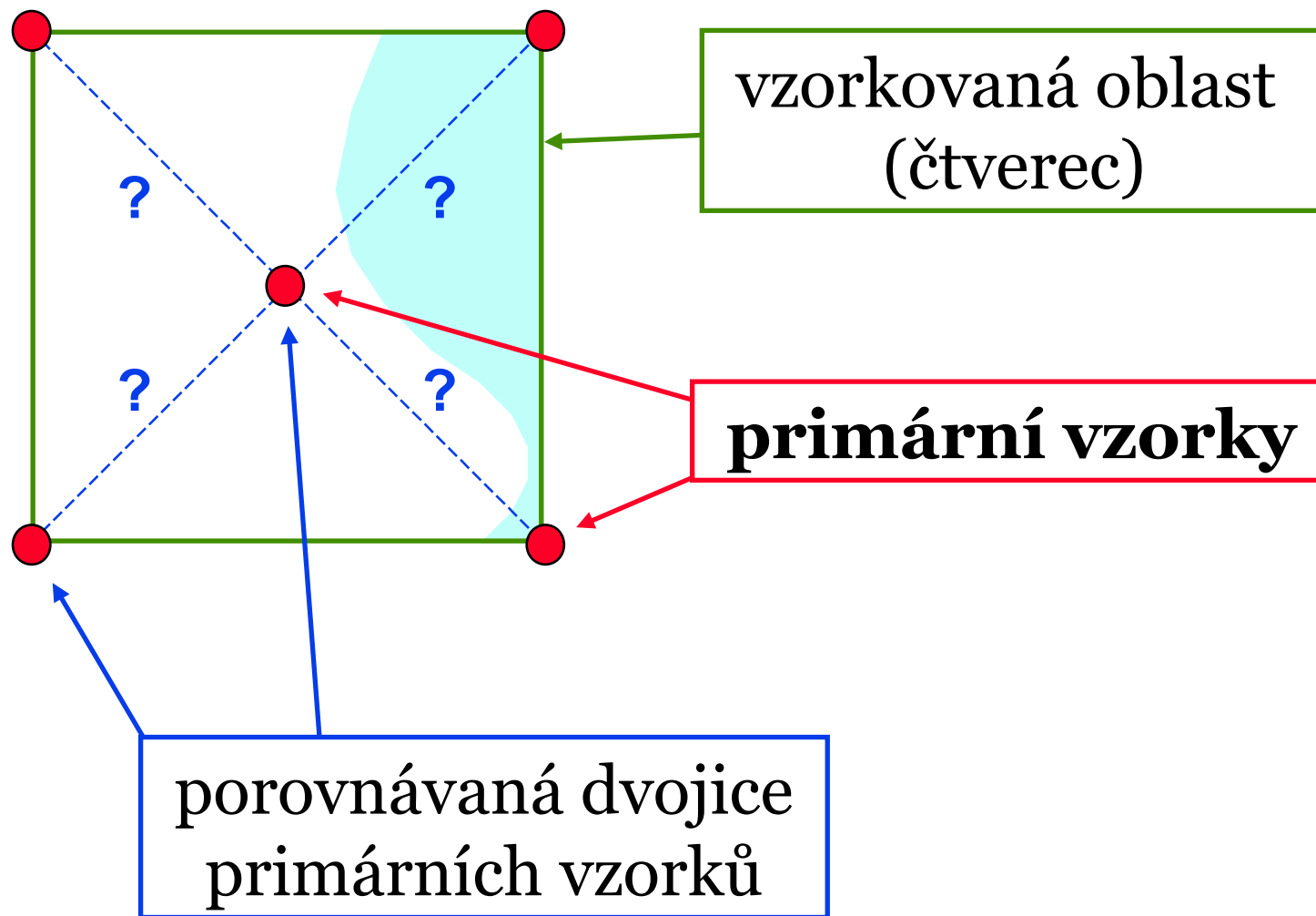


adaptivní

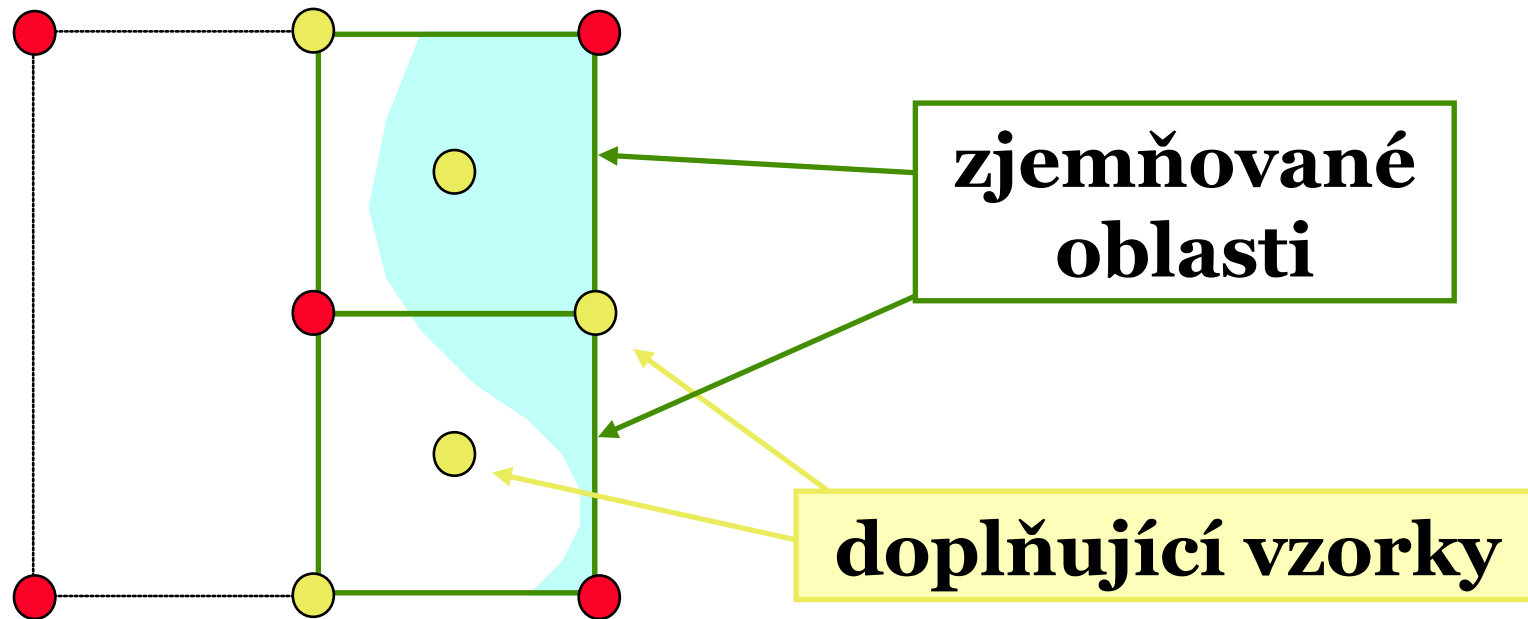


mapa převzorkování

Rekurzivní zjemňování (Whitted)

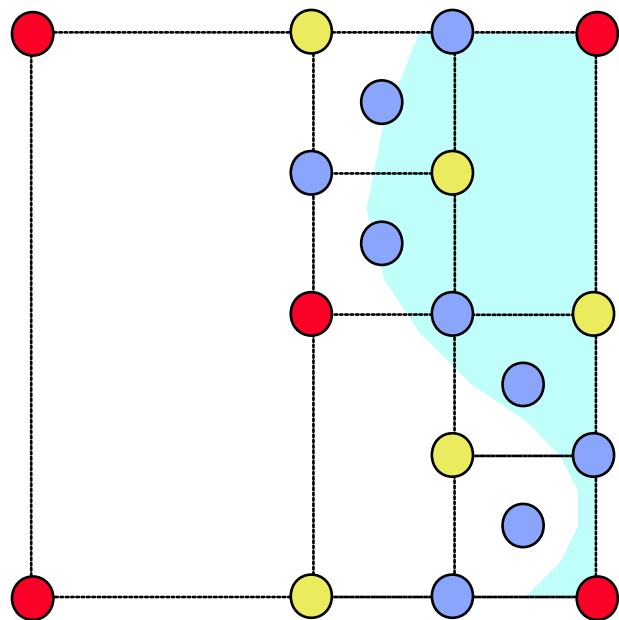





Zjemňovací fáze



Na zjemněné oblasti se rekurzivně aplikuje stejný postup (až do požadovaného stupně dělení)

Výsledný soubor vzorků

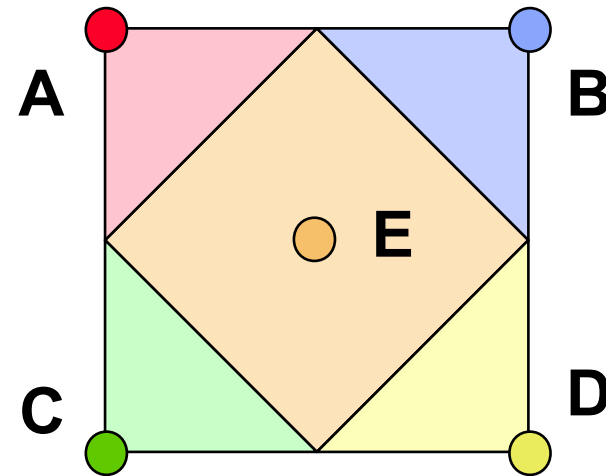
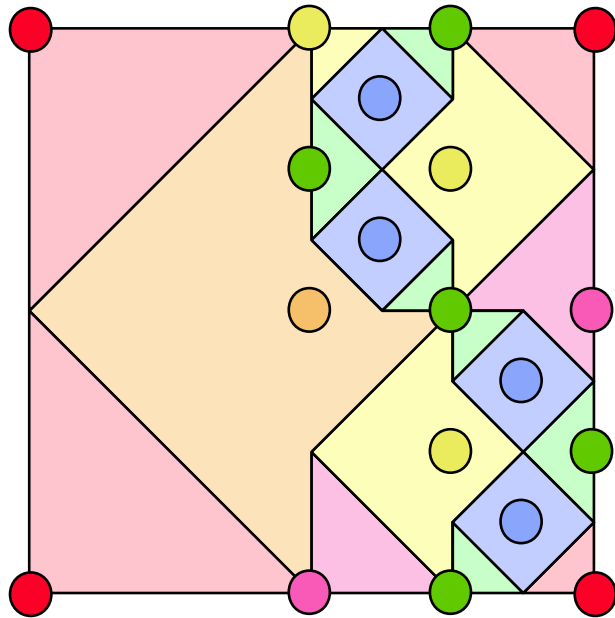


-  I. fáze
-  II. fáze
-  III. fáze

Celkem $5+5+9 = 19$ vzorků
(z celkového počtu 41)



Rekonstrukce výsledku



$$\frac{1}{2} \mathbf{E} + \frac{1}{8} [\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}]$$

V každém již dále neděleném čtverci se plocha rozdělí mezi dva protější vzorky



- **A. Glassner: *An Introduction to Ray Tracing***, Academic Press, London 1989, 161-171
- ➔ **A. Glassner: *Principles of Digital Image Synthesis***, Morgan Kaufmann, 1995, 299-540
- ➔ **J. Pelikán: *Náhodné rozmístování bodů v rovině***, CSGG 2014, prezentace i článek na WWW