Radiační metoda

KSVI MFF UK Praha

e-mail: Josef.Pelikan@mff.cuni.cz

WWW: http://cgg.ms.mff.cuni.cz/~pepca/

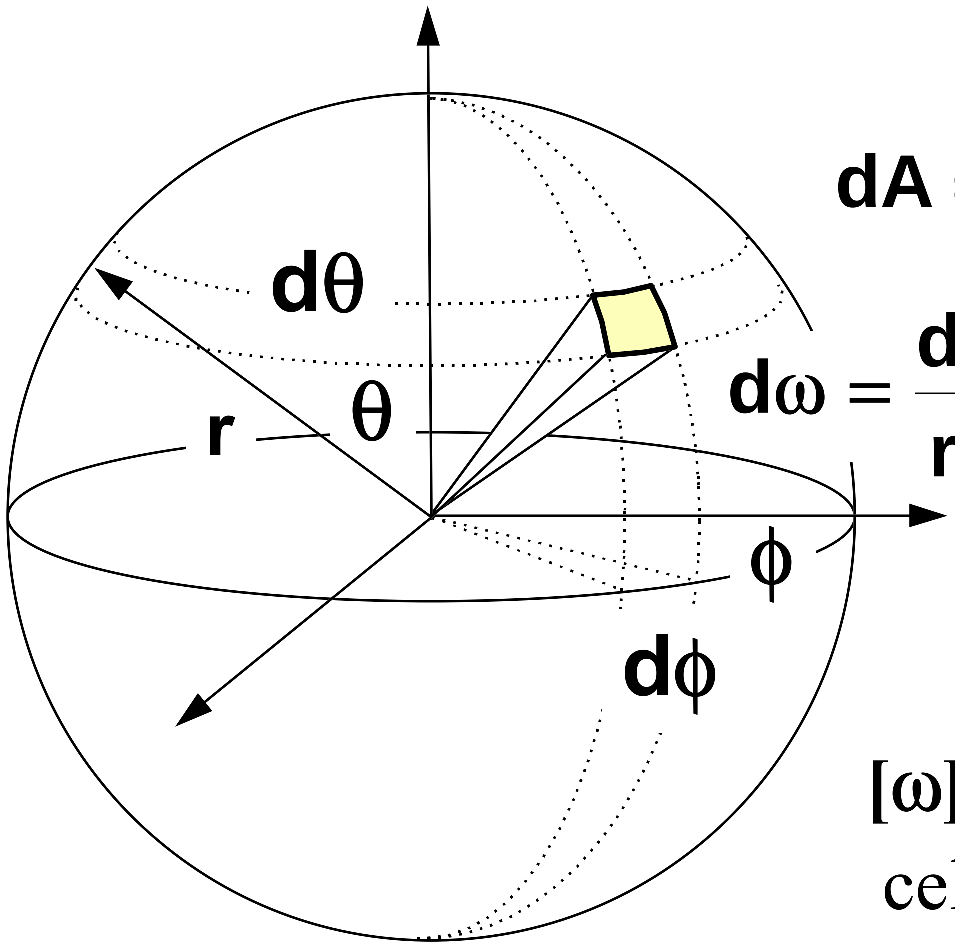
Globální výpočet osvětlení

- založen na **fyzikálním principu**
  - propagace energie (světla) v difusním prostředí
  - první použití v syntéze obrazu: C. Goral 1984
- dokáže dobře spočítat **měkké osvětlení**, sekundární odrazy světla, ..
- základní metoda nezvládá **ostré světlo**, zrcadlové odrazy, ..
- **časově náročnější** než rek. sledování paprsku

Základní radiometrické veličiny

- množství **energie** přijaté (emitované) nějakou částí plochy: $\mathbf{Q_{in}}$ ($\mathbf{Q_{out}}$) **[Joul]**
- **výkon** přijímaný (emitovaný) nějakou částí plochy: Φ_{in} (Φ_{out}) **[Joul/sec = Watt]**
- přijímaná (emitovaná) **radiosita** (hustota výkonu na ploše): $\mathbf{B_{in}}$ (**E**, $\mathbf{B_{out}}$) **[Watt/m^2]**
- **intenzita** (hustota výkonu v prostorovém úhlu ω): $\mathbf{I = d\Phi/d\omega}$ **[W/sr]**

Prostorové úhly



$$dA = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

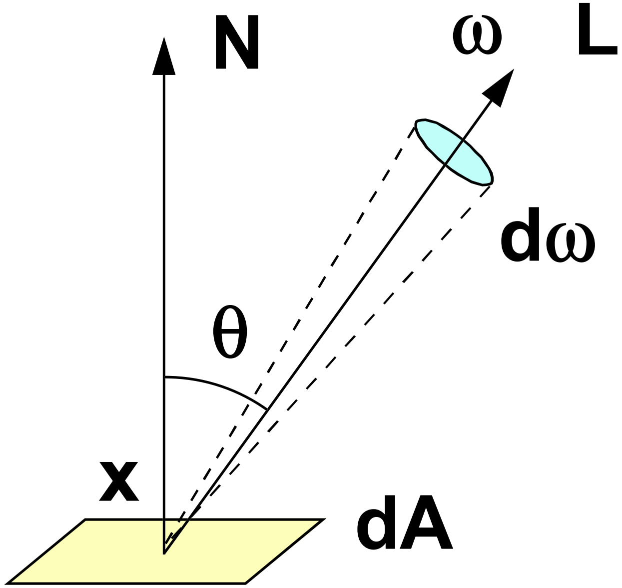
$$d\omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

[ω] .. steradián (sr)

celá sféra má **4π sr**

Radiance

- přijímaná (emitovaná) **radiance** ve směru úhlu ω: $L_{in}(\omega)$ ($L_e(\omega)$, $L_{out}(\omega)$) $[\ W/(m^2 \square\ sr)\ ]$

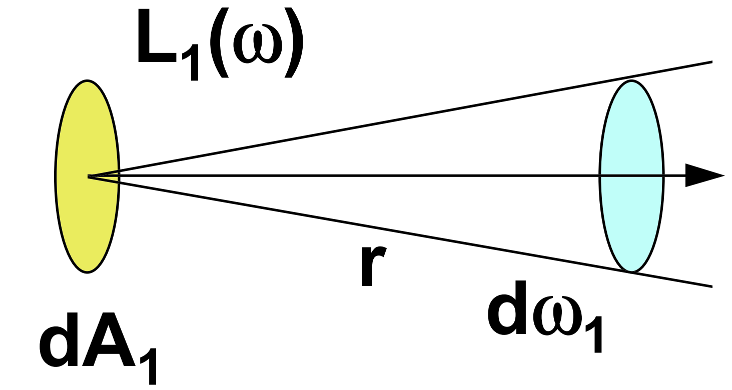


$$L_{out}(x, \omega) = \frac{d^2\Phi}{dA\, d\omega\, \cos\theta}$$

$$= \frac{dB_{out}}{d\omega\, \cos\theta}$$

$$= \frac{dI}{dA\, \cos\theta}$$

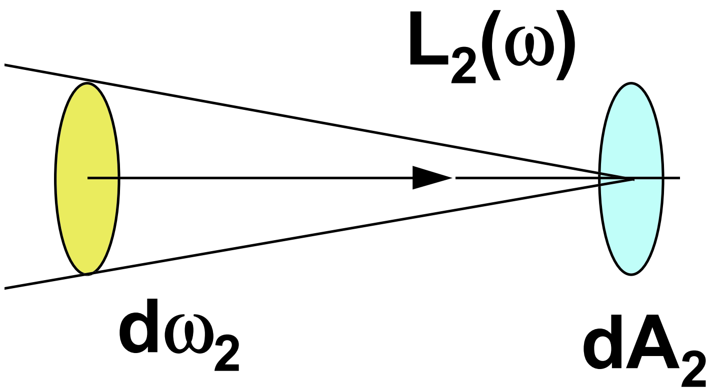
Zákon zach. energie v paprsku



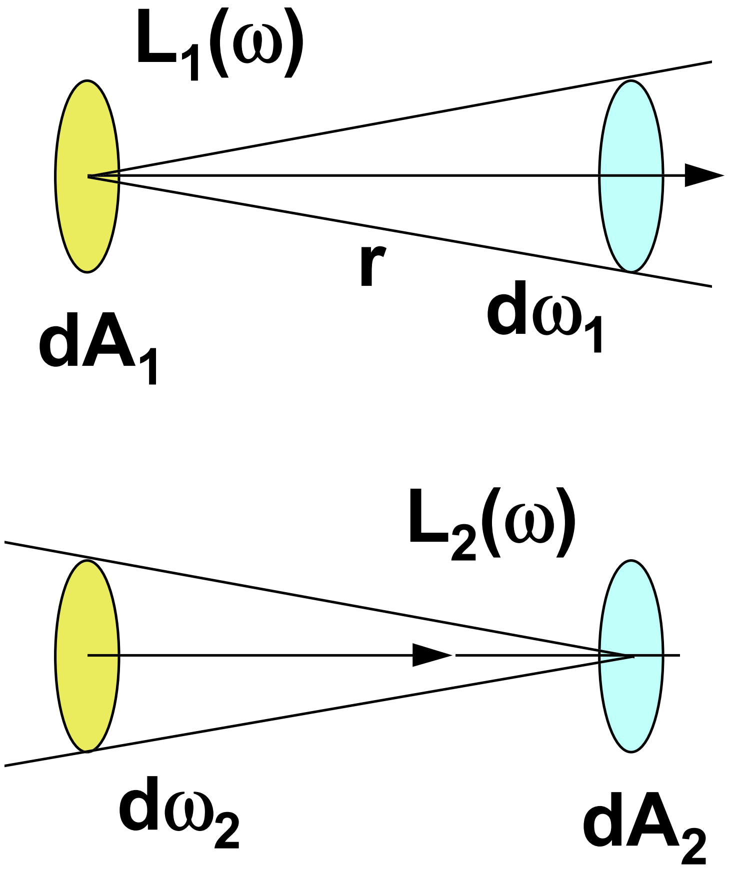
$$L_1\, d\omega_1\, dA_1 = L_2\, d\omega_2\, dA_2$$

emitovaný výkon

přijímaný výkon



Zákon zach. energie v paprsku



$$L_1\, d\omega_1\, dA_1 = L_2\, d\omega_2\, dA_2$$

$$T = d\omega_1\, dA_1 = d\omega_2\, dA_2 = \frac{dA_1\, dA_2}{r^2}$$

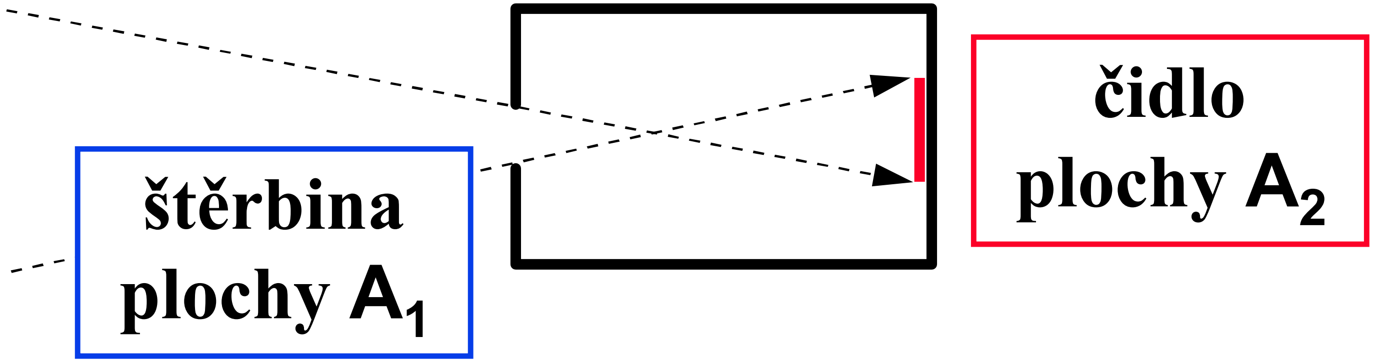
kapacita paprsku

$$\boxed{L_1 = L_2}$$

paprsek ... radiance L

Měření světla

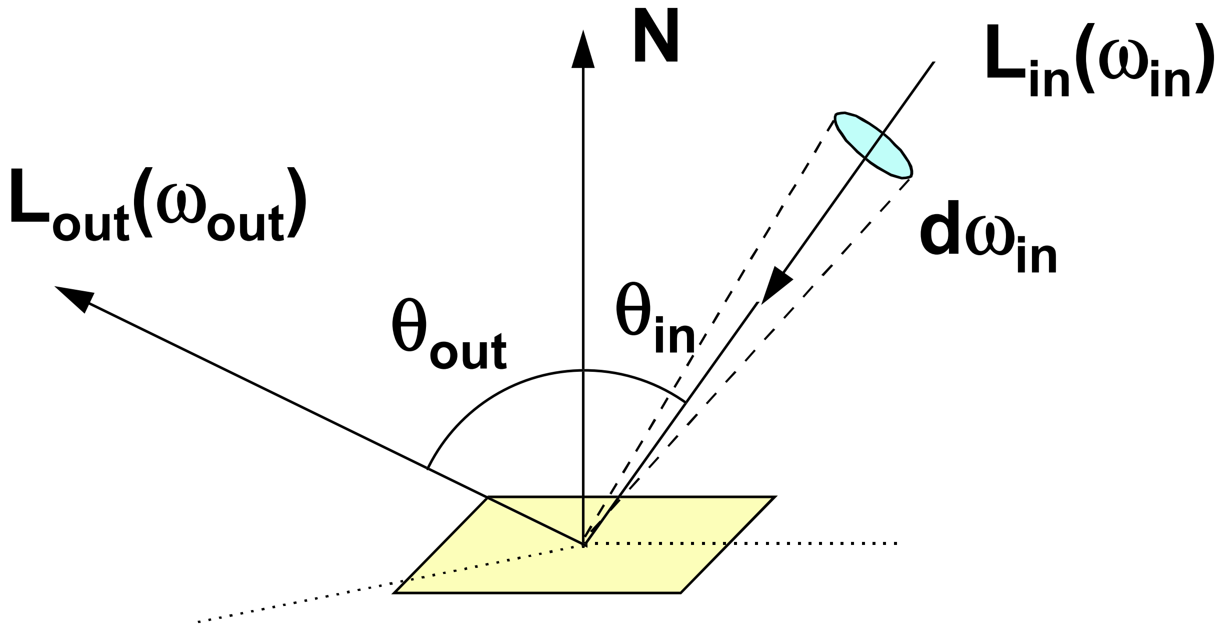
- **naměřená veličina** je přímo úměrná **radianci** viditelné části scény



$$\underline{R} = \int_{A_2} \int_{\Omega} L_{in}(A, \omega) \cdot \cos\theta \, d\omega \, dA = \underline{L_{in} \cdot T}$$

BRDF (funkce odrazivosti)

("bidirectional reflection distribution function")



$$f(\omega_{in} \to \omega_{out}) = \frac{L_{out}(\omega_{out})}{L_{in}(\omega_{in}) \cdot \cos\theta_{in} \cdot d\omega_{in}} \quad [sr^{-1}]$$

Helmholtzův zákon, ..

- pro **reálné** povrchy těles (vyhovující fyzikálním zákonům) platí:

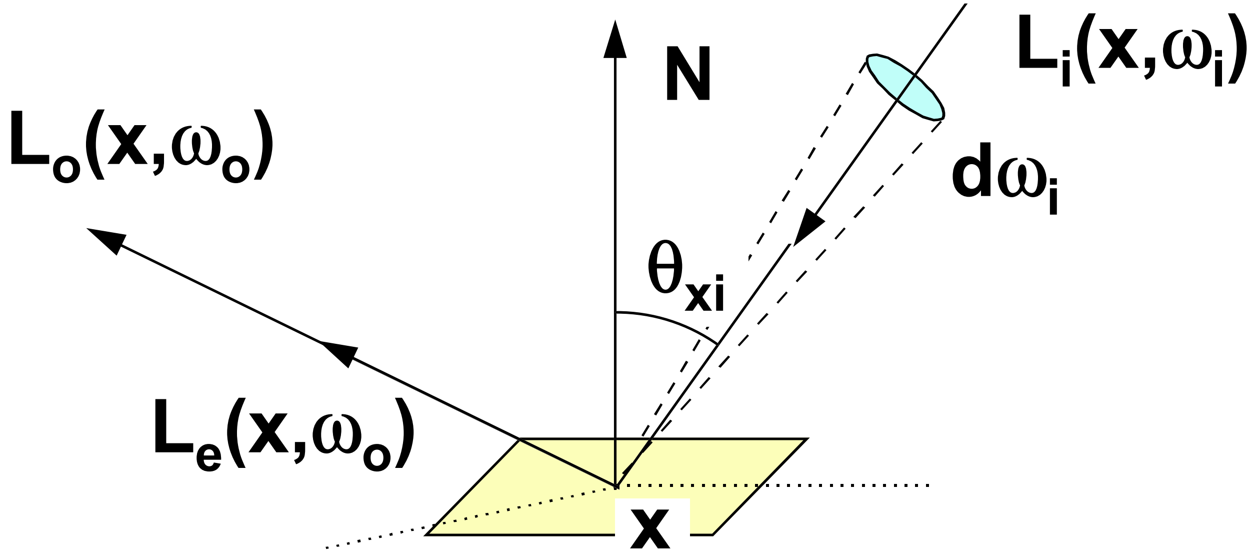
$$\mathbf{f}\left(\omega_{\mathbf{in}} \rightarrow \omega_{\mathbf{out}}\right) = \mathbf{f}\left(\omega_{\mathbf{out}} \rightarrow \omega_{\mathbf{in}}\right)$$

- obecná **BRDF** nemusí být **isotropní** (invariantní k otočení kolem normály)
  - kovové povrchy leštěné v jednom směru, ..

$$\mathbf{f}\left(\theta_{\mathbf{in}}, \phi_{\mathbf{in}}, \theta_{\mathbf{out}}, \phi_{\mathbf{out}}\right) \neq \mathbf{f}\left(\theta_{\mathbf{in}}, \phi_{\mathbf{in}} + \phi, \theta_{\mathbf{out}}, \phi_{\mathbf{out}} + \phi\right)$$

Lokální rovnice (OVTIGRE)

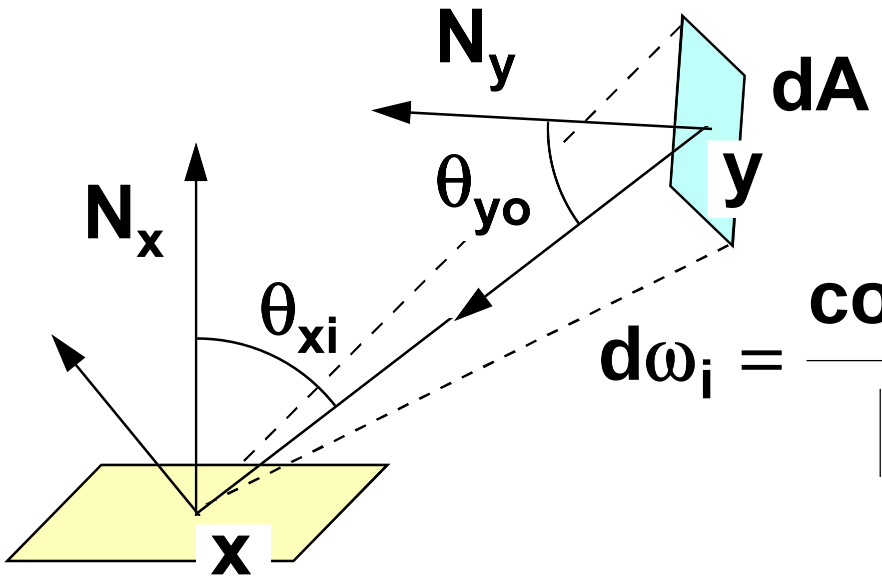
("outgoing, vacuum, time-invariant, gray radiance equation")



vlastní vyzařování

$$L_o(x,\omega_o) = L_e(x,\omega_o) + $$
$$+\int f(x,\omega_i \to \omega_o)\cdot L_i(x,\omega_i)\cdot \cos\theta_{xi}\, d\omega_i$$

Radiance přijímaná z plochy



$$d\omega_i = \frac{\cos\theta_{yo}\ dA}{\|x - y\|^2}$$

Geometrický člen: $$G(y,x) = \frac{\cos\theta_{yo}\cos\theta_{xi}}{\|x - y\|^2}$$

Radiance přijímaná z plochy

$$L_o(x, \omega_o) =$$

integrál přes všechny úhly

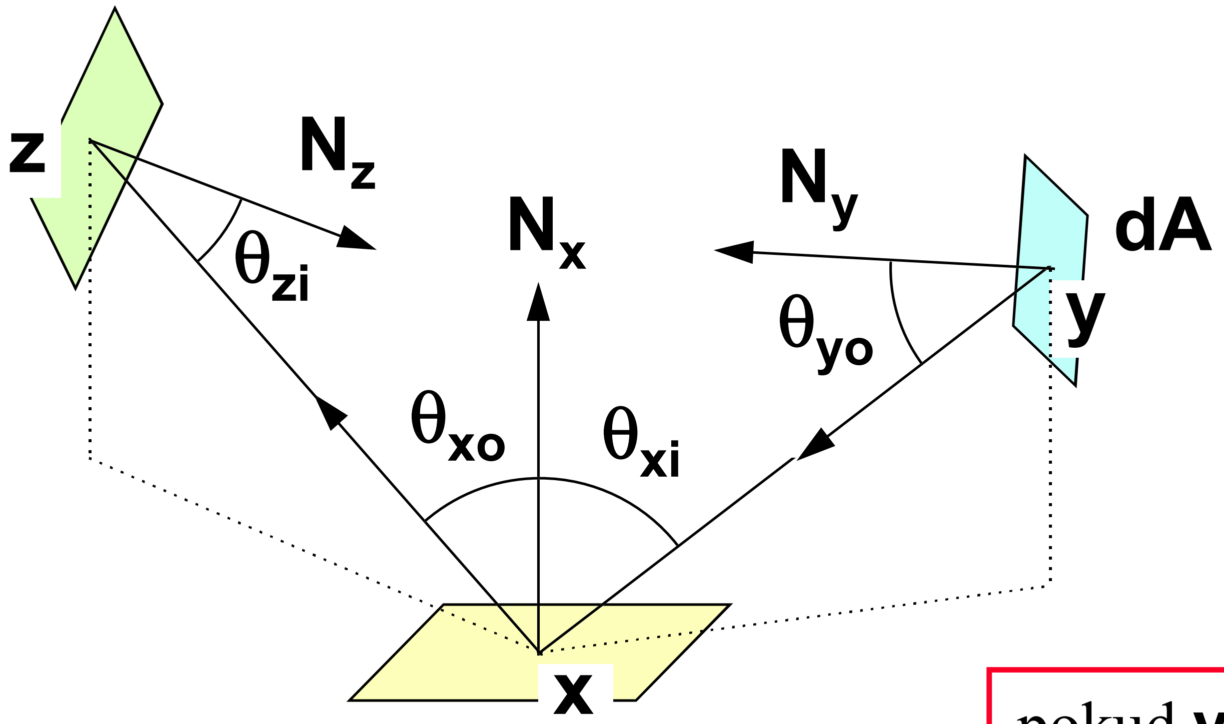
$$= L_e(x, \omega_o) + \int_{\boxed{\Omega}} f(x, \omega_i \to \omega_o) \cdot L_i(x, \omega_i) \cdot \cos\theta_{xi} \, d\omega_i =$$

$$= L_e(x, \omega_o) + \int_{\boxed{S}} f(x, \omega_i \to \omega_o) \cdot L_o(y, -\omega_i) \cdot G(y, x) \, dA$$

integrál přes vyzařující plošku

za předpokladu, že z bodu **x** je vidět celá plocha **S**

Šíření světla odrazem



pokud **y** vidí **x**

Označení: $\underline{L(\mathbf{y},\mathbf{x})} = L_o(\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{y}) = L_i(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x})$

$$\underline{f(\mathbf{y},\mathbf{x},\mathbf{z})} = f(\mathbf{x},(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \rightarrow (\mathbf{z}-\mathbf{x}))$$

Rovnice pro nepřímou radianci

$$V(y,x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \mathbf{y} \text{ vidí } \mathbf{x} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\underbrace{L(x,z)} = \underbrace{L_e(x,z)}_{\text{vlastní (emitovaná) radiance}} + \int_S \underbrace{f(y,x,z)}_{\text{BRDF}} \cdot L(y,x) \cdot \underbrace{G(y,x) \cdot V(y,x)}_{\text{geometrické členy}}\, dA$$

Rovnice pro radiositu

- předpokládáme **ideálně difusní** povrch:
  - **BRDF** není závislá na vstupním a výstupním úhlu
  - výstupní radiance **L(y,ω)** nezávisí na směru ω

$$\mathbf{L}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{L_e}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \int_S \mathbf{L}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{y},\mathbf{x})\ \mathbf{dA}$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})/\pi, \quad \mathbf{L_e}(\mathbf{x},\mathbf{z}) = \mathbf{E}(\mathbf{x})/\pi, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/\pi$$

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \cdot \int_S \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{y},\mathbf{x})}{\pi}\ \mathbf{dA}}$$

Diskrétní řešení radiační rovnice

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbf{S}} \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{x})\ \mathbf{dA}}$$

kde $\quad \mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{y},\mathbf{x})}{\pi}$

- řešení **B** je nekonečně-dimenzionální
- diskretizace problému:
  - **Monte-Carlo** ray-tracing (řešení závislé na pohledu)
  - klasické **radiační metody** (konečné/hraniční prvky)

Obecná radiační metoda

1. rozdělení ploch na konečný počet **elementů**
2. určení polohy **uzlových bodů** na elementech
   – v těchto bodech se bude počítat hodnota **radiosity**
3. volba **aproximační metody** a chybové metriky
   – systém basických funkcí pro lineární (konvexní) kombinace hodnot v uzlových bodech
4. výpočet **koeficientů** soustavy lineárních rovnic
   – "konfigurační faktory" ("form-factors")

Obecná radiační metoda

❺ řešení **soustavy lineárních rovnic**

– výsledek: radiosita v uzlových bodech

❻ rekonstrukce přibližného řešení na **celých plochách**

– lineární kombinace bazických funkcí pomocí hodnot v uzlových bodech

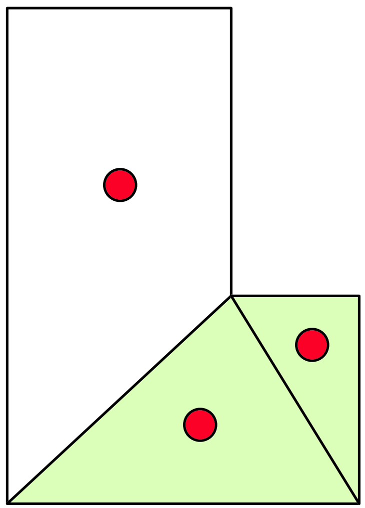
❼ **zobrazení** výsledku (libovolný směr pohledu)

– intenzita osvětlení závisí na spočítané radiositě

Poznámky

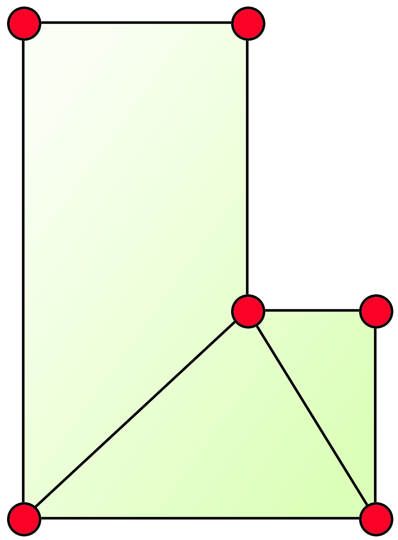
- krok ❸ se provádí ve fázi **návrhu algoritmu**
  - v implementaci se přímo neobjevuje
- některé **zdokonalené metody** nepostupují striktně posloupností kroků ❶ až ❼
  - často se výpočet v některých fázích vrací a opakují se předcházející kroky (s lepší aproximací, lepším rozlišením, ..)

Aproximace radiosity



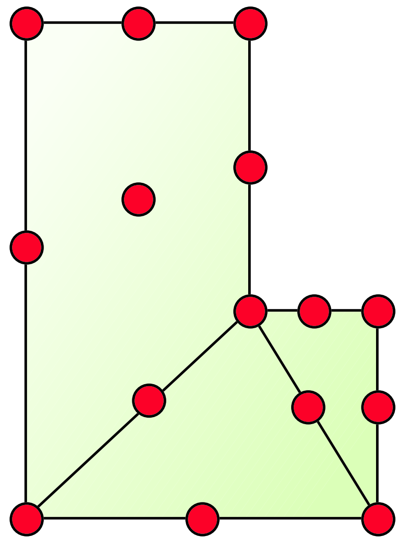
konstantní

(uzly jsou těžiště ploch)



bilineární

(uzly jsou ve vrcholech)



kvadratická

(další uzly jsou uprostřed hran a stěn)

Metoda konstantních elementů

- **na elementu $\mathbf{A_i}$** předpokládám **konstantní** odrazivost ρ a radiositu $\mathbf{B}$ - průměr hodnot $\mathbf{B(x)}$:
  - značení: ρ_i, $\mathbf{B_i}$ pro $\mathbf{i = 1 \,..\, N}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbf{S}} \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \; \mathbf{dA}$$

průměr přes plochu $\mathbf{A_i}$

$$\mathbf{B_i} = \mathbf{E_i} + \rho_i \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A_i}} \int_{\mathbf{A_i}} \left[\underbrace{\sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{B_j} \int_{\mathbf{A_j}} \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \; \mathbf{dA_j}} \right] \mathbf{dA_i}$$

radiosita přijímaná v bodě $\mathbf{x}$ (ležícím na $\mathbf{A_i}$)

Základní rovnice pro radiositu

přehození sumy a integrálu:

$$B_i = E_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} B_j \cdot \boxed{\frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} g(y,x)\ dA_j\ dA_i}$$

geometrický člen - **konfigurační faktor F_{ij}**
(část energie vyzářené ploškou A_i dopadající na A_j)

$$\boxed{B_i = E_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} B_j\, F_{ij} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]}$$

Fyzikálně intuitivní odvození

$$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} B_j A_j F_{ji} \quad [\,W\,]$$

emitovaný výkon = vlastní výkon + odražený výkon

reciproční pravidlo: $\boxed{A_j F_{ji} = A_i F_{ij}}$

$$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} B_j F_{ij} A_i \quad \Big| \cdot A_i^{-1}$$

$$\underline{B_i = E_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} B_j F_{ij}} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

Soustava lineárních rovnic

$$\underline{B_i} - \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} \underline{B_j}\, F_{ij} = E_i \qquad i = 1..N$$

$$\begin{bmatrix} 1-\rho_1 F_{1,1} & -\rho_1 F_{1,2} & .. & -\rho_1 F_{1,N} \\ -\rho_2 F_{2,1} & 1-\rho_2 F_{2,2} & .. & -\rho_2 F_{2,N} \\ .. & .. & .. & .. \\ -\rho_N F_{N,1} & -\rho_N F_{N,2} & .. & 1-\rho_N F_{N,N} \end{bmatrix} \underline{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ .. \\ B_N \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ .. \\ E_N \end{bmatrix}$$

<u>vektor neznámých **[B_i]**</u>

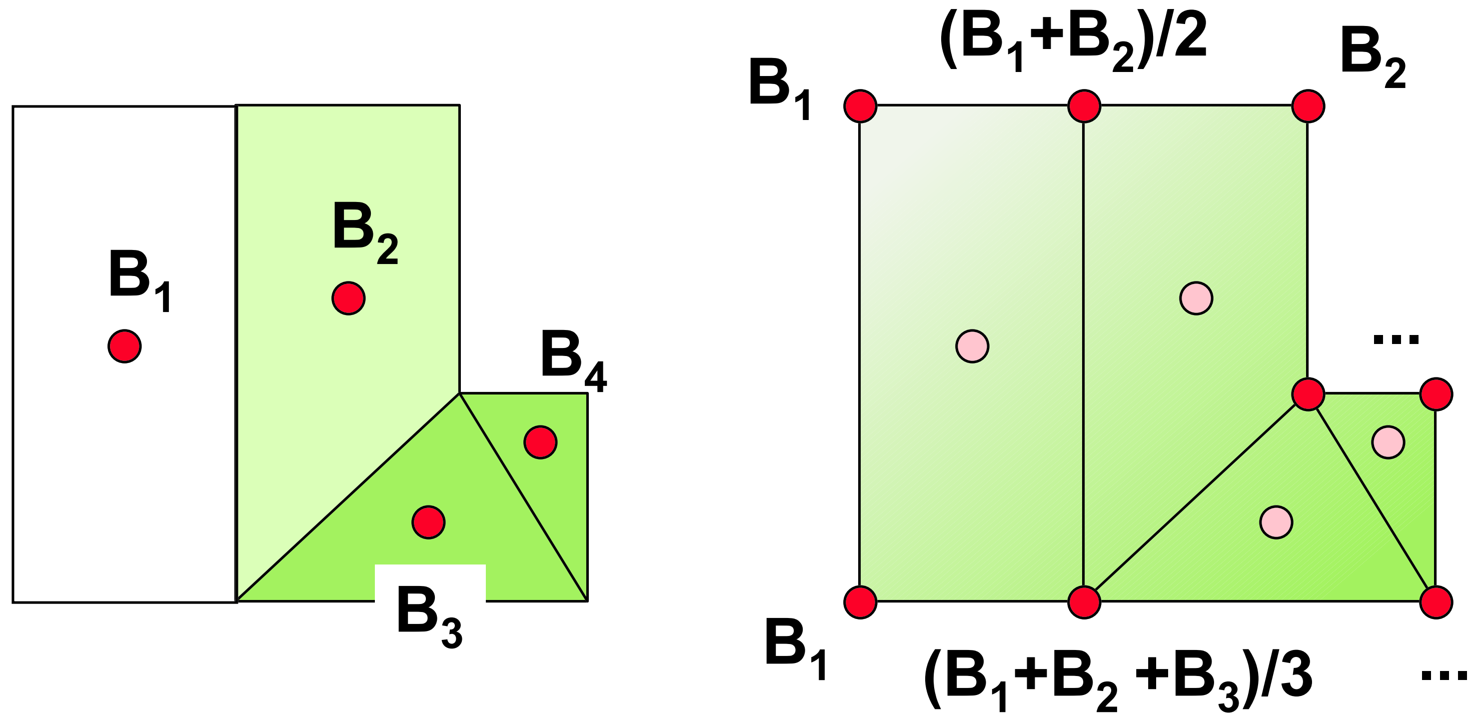
Soustava lineárních rovnic

- pro **rovinné plošky** platí: $\mathbf{F_{ii} = 0}$
  - na diagonále jsou pouze jedničky
- **nediagonální prvky** matice mají typicky malou absolutní hodnotu
  - matice je “diagonálně dominantní”

  $\Rightarrow$ soustava je stabilní a lze ji úspěšně řešit **iteračními metodami** (Jacobi, Gauss-Seidel)
- při **změně osvětlení** $\mathbf{[E_i]}$ se nemusí soustava počítat znovu (používáme-li přímou metodu)

Přenos radiosity do vrcholů

I v metodě konstantních elementů je při zobrazování žádoucí použít alespoň **Gouraudovu interpolaci barvy**



Konec

Další informace:

- **A. Glassner**: ***Principles of Digital Image Synthesis***, Morgan Kaufmann, 1995, 871-937
- **M. Cohen, J. Wallace**: ***Radiosity and Realistic Image Synthesis***, Academic Press, 1993, 13-64
- **J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes**: ***Computer Graphics, Principles and Practice***, 793-804