Zobrazovací metody Monte Carlo

KSVI MFF UK Praha

e-mail: Josef.Pelikan@mff.cuni.cz

WWW: http://cgg.ms.mff.cuni.cz/~pepca/

Operátory šíření světla

Zobrazovací rovnice pro **radianci**:

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{e} + \mathbf{TL}}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{e} + \mathbf{Te} + \mathbf{T}^2\mathbf{e} + \mathbf{T}^3\mathbf{e} + \ldots$$

Integrální **operátor** **T** lze rozložit na difusní (**D**) a lesklou (**S**) složku odrazu:

$$\mathbf{T} = \mathbf{D} + \mathbf{S}$$

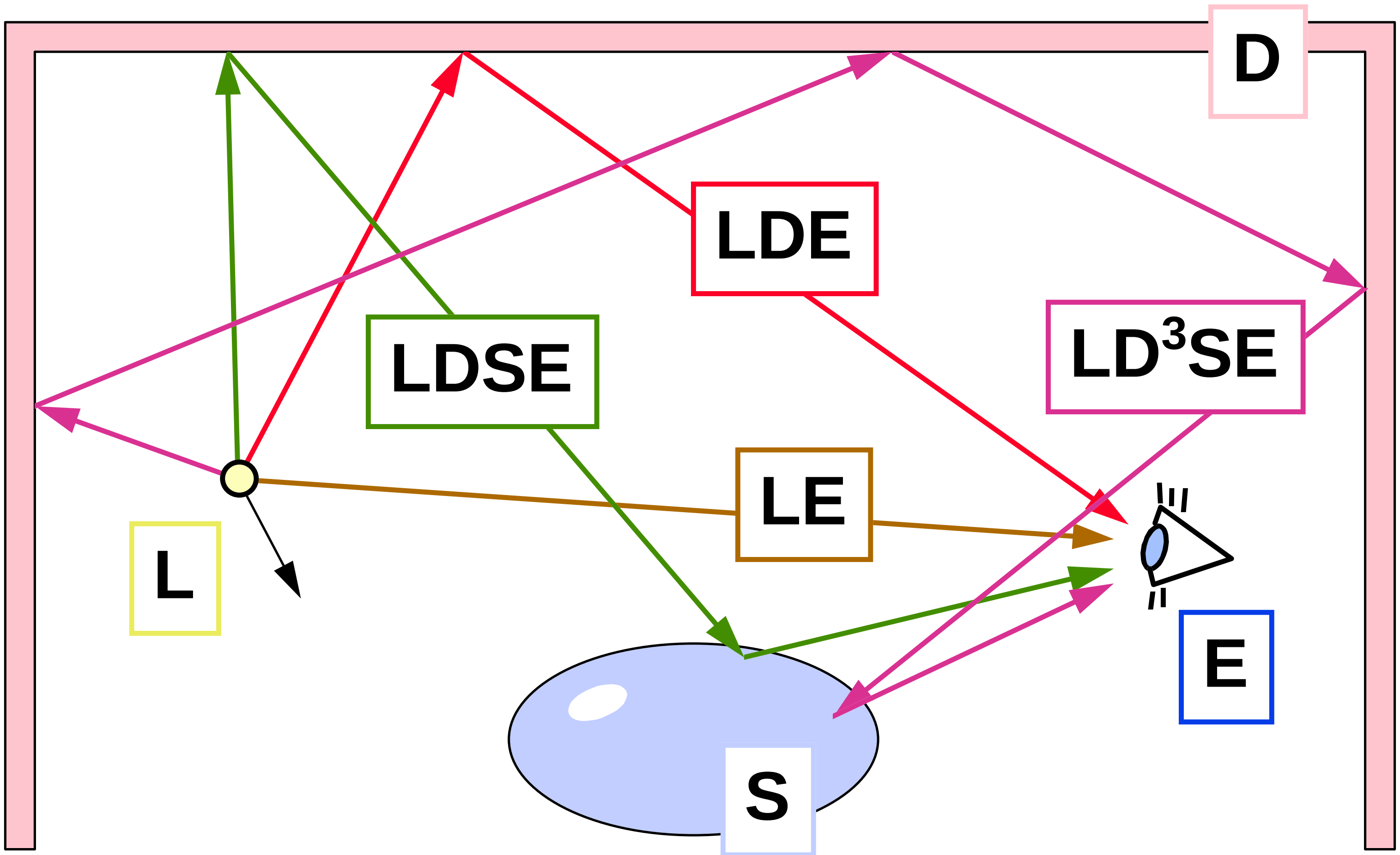
$$\mathbf{L} = \mathbf{e} + (\mathbf{D} + \mathbf{S})\mathbf{e} + (\mathbf{D} + \mathbf{S})^2\mathbf{e} + \ldots$$

$$\underline{\mathbf{L} = \mathbf{e} + \mathbf{De} + \mathbf{Se} + \mathbf{DDe} + \mathbf{DSe} + \mathbf{SDe} + \mathbf{SSe} + \ldots}$$

Abeceda regulárních výrazů

- **zdroj světla L** (“light”)
- **difusní odraz D** (“diffuse”)
  – odraz podle Lambertova zákona (všesměrový)
- **lesklý odraz S** (“specular”)
  – směrový odraz, odlesk - směrová část BRDF
  – idealizovaný **zrcadlový odraz**: $\mathbf{S_M}$
- **oko pozorovatele E** (“eye”)
  – příspěvek výslednému obrazu

Cesty šíření světla



Klasické zobrazovací metody

- **stínování** s odlesky a **vrženými stíny** (např. Phongův model): **L(D|S)E**
  - často se ignoruje výpočet vržených stínů
- **rekurzivní sledování paprsku** (Whitted): $\mathbf{L[D|S]S_M{}^{*}E}$
  - první lesklý odraz se počítá přesně, ostatní se nahrazují ideálním zrcadlovým odrazem

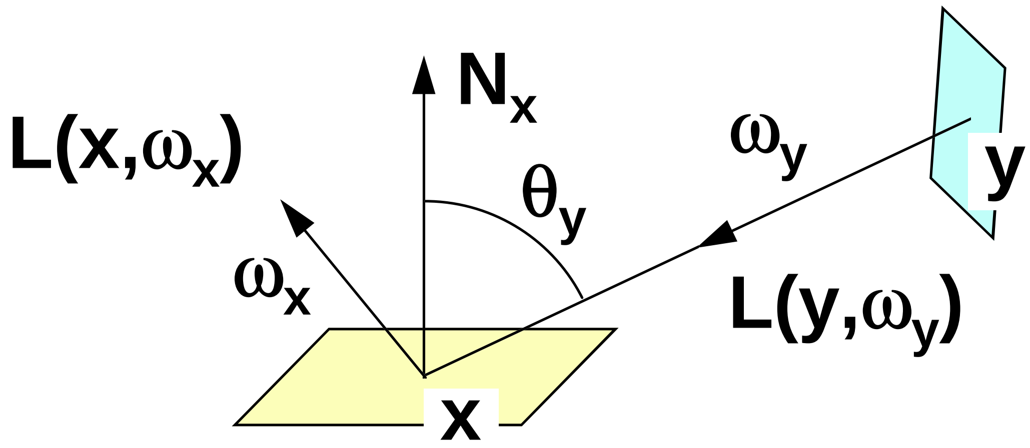
Klasické zobrazovací metody

- **distribuované sledování paprsku** (Cook): **L[D]S*E**
  - – všechny lesklé odrazy se odhadují korektně
- obyčejná **radiační metoda**: **LD*E**
  - – pouze měkké odrazy světla
- **všechny** možné cesty světla: **L(D|S)*E**
  - – přesné řešení zobrazovacích rovnic (Kajiya)

Monte Carlo zobrazování

- integrál zobrazovací rovnice je často **mnoho-rozměrný**
  - anti-aliasing, hloubka ostrosti, rozmazání pohybem
  - Monte Carlo metody nejsou citlivé na více dimenzí
- integrandy mají mnoho **nespojitostí** různých druhů
- **nepožaduje se** velká **přesnost**
  - lidské vidění má omezenou absolutní citlivost
  - běžně postačí přesnost 0.1 - 1 %

Zobrazovací rovnice pro radianci



$$L(x,\omega_x) =$$

$$= L_e(x,\omega_x) + \int_{\Omega_x^{-1}} f(x,\omega_y \to \omega_x) \cdot L(y,\omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y$$

$$\Phi_o(S) = \int_A \int_{\Omega_x} L(x,\omega_x) \cdot W_e(x,\omega_x,S) \cdot \cos\theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$

Path tracing

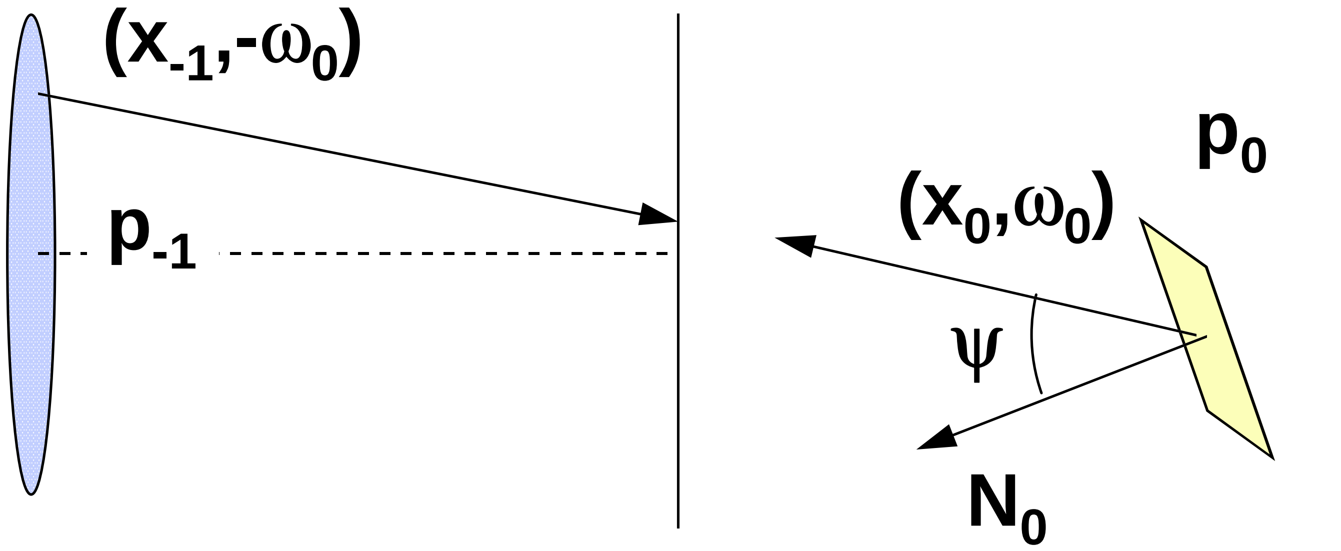
Výkon procházející pixelem (anti-aliasing, hloubka ostrosti):

$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\mathbf{path}} = \frac{\mathbf{W_e}(\mathbf{x_0}, \omega_0, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{cos}\,\psi}{\mathbf{p_0}(\mathbf{x_0}, \omega_0)} \cdot \langle \mathbf{L}(\mathbf{x_0}, \omega_0) \rangle_{\mathbf{path}}$$

$(\mathbf{x_0}, \omega_0)$ se týká bodu na povrchu tělesa, do kterého dopadne sledovaný paprsek; $\mathbf{p_0}$ je příslušná hustota pravděpodobnosti. Vzorkování na čočce objektivu $\mathbf{p_{-1}}$:

$$\mathbf{p_0}(\mathbf{x_0}, \omega_0) = \frac{\mathbf{p_{-1}}(\mathbf{x_{-1}}, \omega_0) \cdot \mathbf{cos}\,\psi}{\left\| \mathbf{x_{-1}} - \mathbf{x_0} \right\|^2}$$

Primární paprsek



hloubka ostrosti, anti-aliasing

světlo vycházející z bodu $\mathbf{x_0}$ směrem ω_0

Path tracing

Odhad $\mathbf{L(x_0,\omega_0)}$ metodou **Monte Carlo** omezený pomocí ruské rulety:

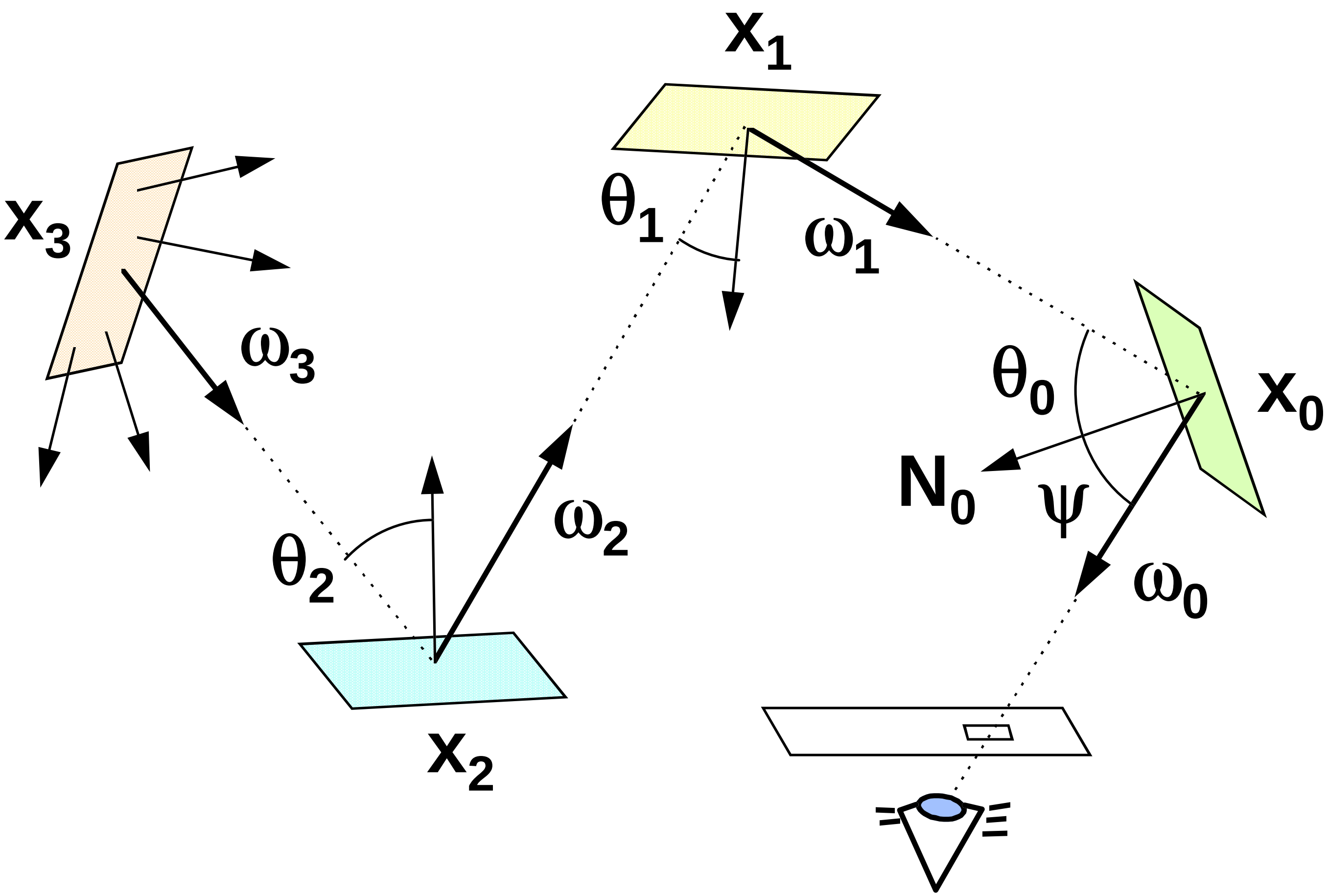
$$\left\langle \Phi(\mathbf{S}) \right\rangle_{\mathbf{path}} = \frac{\mathbf{W_e}(\mathbf{x_0}, \omega_0, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{cos}\,\psi}{\mathbf{p_0}(\mathbf{x_0}, \omega_0)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{k} \left[\prod_{j=1}^{i} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x_{j-1}}, \omega_j \to \omega_{j-1}) \cdot \mathbf{cos}\,\theta_{j-1}}{\mathbf{P_j} \cdot \mathbf{p_j}(\omega_j)} \right] \cdot \mathbf{L_e}(\mathbf{x_i}, \omega_i)$$

pravděpodobnost pokračování krokem **j**

hustota pravděp. pro vstupní směr ω_j

Schema šíření světla



Vzorkování podle důležitosti

Pro **výkon procházející pixelem** (druhý integrál):

$$\mathbf{p_0}(\mathbf{x_0}, \omega_0) = \frac{\mathbf{W_e}(\mathbf{x_0}, \omega_0, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{cos}\,\psi}{\mathbf{W}(\mathbf{S})} \quad , \text{ kde}$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{S}) = \int_A \int_{\Omega_x} \mathbf{W_e}(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{cos}\,\theta_x \, \mathbf{d}\omega_x \, \mathbf{dA_x}$$

V **zobrazovací rovnici** (první integrál) známe člen $\mathbf{f(x,\omega_y \rightarrow \omega_x)\ cos}\ \theta_y$; protože je podle fyzikálních podmínek menší než **1**, můžeme ho použít ke konstrukci subkritické hustoty pravděpodobnosti.

Vzorkování podle BRDF

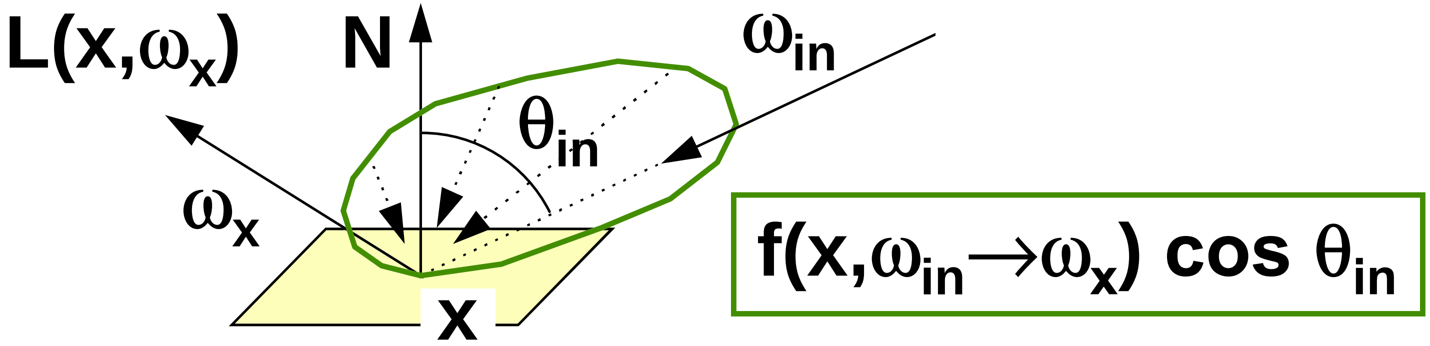
Pravděpodobnost pokračování krokem **j**:

$$\mathbf{P_j} = \int_{\Omega^{-1}} \mathbf{f}\left(\mathbf{x_{j-1}}, \omega_{\mathbf{in}} \rightarrow \omega_{\mathbf{j-1}}\right) \cdot \mathbf{cos}\,\theta_{\mathbf{in}}\, \mathbf{d}\omega_{\mathbf{in}}$$

Hustota pravděpodobnosti pro **směr pokračování** $\omega_{\mathbf{j}}$:

$$\mathbf{p_j}\left(\omega_{\mathbf{j}}\right) = \frac{\mathbf{f}\left(\mathbf{x_{j-1}}, \omega_{\mathbf{j}} \rightarrow \omega_{\mathbf{j-1}}\right) \cdot \mathbf{cos}\,\theta_{\mathbf{j-1}}}{\mathbf{P_j}}$$

Vzorkování podle BRDF



Celkový primární odhad s využitím všech uvedených pravděpodobností:

$$\langle \Phi(S) \rangle_{path,imp} = W(S) \cdot \sum_{i=0}^{k} L_e(x_i, \omega_i)$$

Odhad příští události (NEE)

Rozdělení **nepřímého osvětlení** na dvě složky:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{x}}) = \mathbf{L}_{\mathbf{e}}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{x}}) + \mathbf{L}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{x}})$$

$$\underline{\mathbf{L}_{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{x}})} = \int_{\Omega_{\mathbf{x}}^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{y}} \to \omega_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{L}(\mathbf{y},\omega_{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{cos}\,\theta_{\mathbf{y}}\, \mathbf{d}\omega_{\mathbf{y}} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \int_{\mathbf{A}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{y}} \to \omega_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{e}}(\mathbf{y},\omega_{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x})\, \mathbf{dA}_{\mathbf{y}} + \\ &+ \int_{\Omega_{\mathbf{x}}^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{y}} \to \omega_{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{r}}(\mathbf{y},\omega_{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{cos}\,\theta_{\mathbf{y}}\, \mathbf{d}\omega_{\mathbf{y}} \end{aligned}}$$

Příspěvek přímého osvětlení

Geometrický člen **G(y,x)**:

$$\underline{G(y,x)} = \underbrace{v(y,x)}_{\boxed{\text{faktor viditelnosti}}} \cdot \frac{\cos\theta_{y,out} \cdot \cos\theta_{x,in}}{\|x - y\|^2}$$

Příspěvek **přímého osvětlení** je vyjádřen prvním integrálem (integruje se přes všechny plošné zdroje ve scéně). **Hustota pravděpodobnosti** pro odhad této složky se konstruuje pomocí radiosity zdroje:

Vzorkování světelných zdrojů

hustota pravděpodobnosti pro **příspěvek přímého osvětlení**:

$$p(y) = \frac{L(y)}{L}$$

radiosita emitovaná z bodu **y**

$$L(y) = \int_{\Omega_y} L_e(y, \omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y$$

$$L = \int_A \int_{\Omega_y} L_e(y, \omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y \, dA_y$$

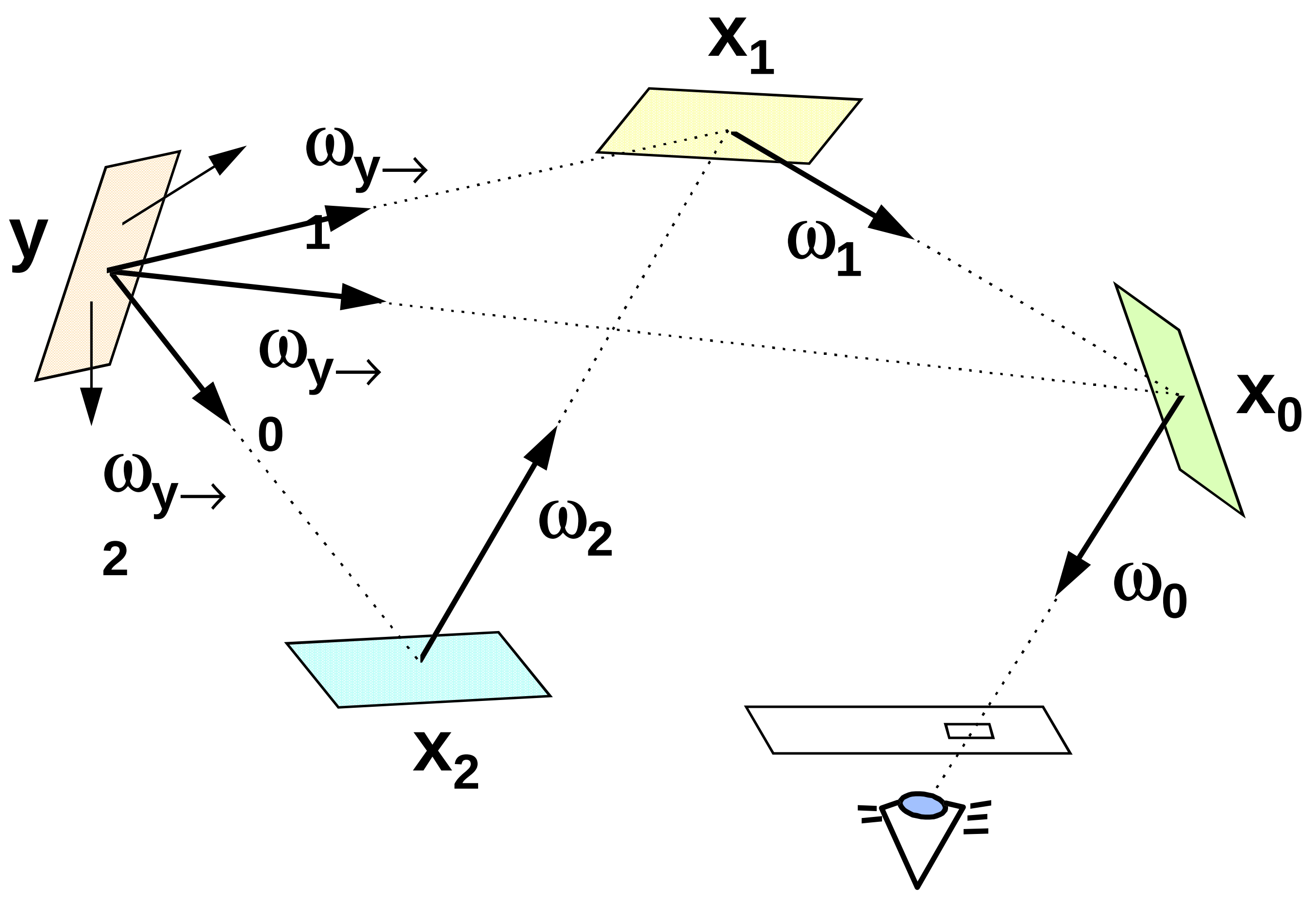
celkový emitovaný výkon

Odhad příští události

Vzorkování podle **BRDF** (subkritická hustota pravděpodobnosti) s **ruskou ruletou** a **odhadem příští události**:

$$\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{path,imp,nee} = W(S) \cdot \Big[L_e(x_0, \omega_0) +$$
$$+ \frac{L}{L(y)} \sum_{i=0}^{k} L_e(y, \omega_{y\to i}) \cdot f(x_i, \omega_{y\to i}, \omega_i) \cdot G(y, x_i) \Big]$$

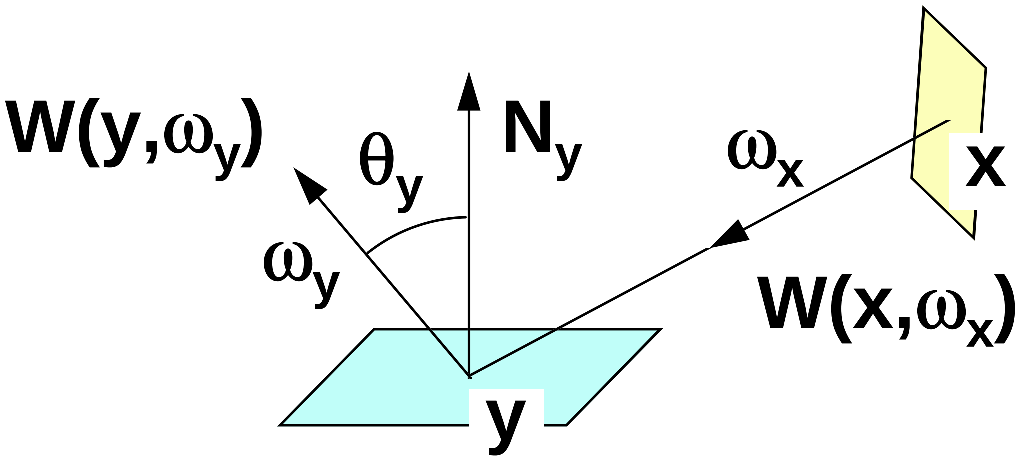
Schema šíření světla (NEE)



Odhad příští události

- je nejvýhodnější pro scény s **malými** ale **dobře viditelnými** plochami světelných zdrojů
  - vzorkování světelných zdrojů je dominantní
- vzorkování zdrojů nebere v úvahu jejich **viditelnost**
  - dokonalejší metody počítají i s **BRDF** nebo geometrickými faktory $\mathbf{G(y,x_i)}$
- **vzorkování světelných zdrojů** se může provádět v každém kroku $\mathbf{x_i}$

Zobraz. rovnice pro potenciál



$$W(x,\omega_x) = $$

$$= W_e(x,\omega_x) + \int_{\Omega_y} f(y,\omega_x \to \omega_y) \cdot W(y,\omega_y) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_y$$

$$\Phi_o(S) = \int_A \int_{\Omega_x} L_e(x,\omega_x) \cdot W(x,\omega_x,S) \cdot \cos\theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$

Light tracing

Paprsek **vycházející ze zdroje** (vyzařovací charakteristiky zdroje):

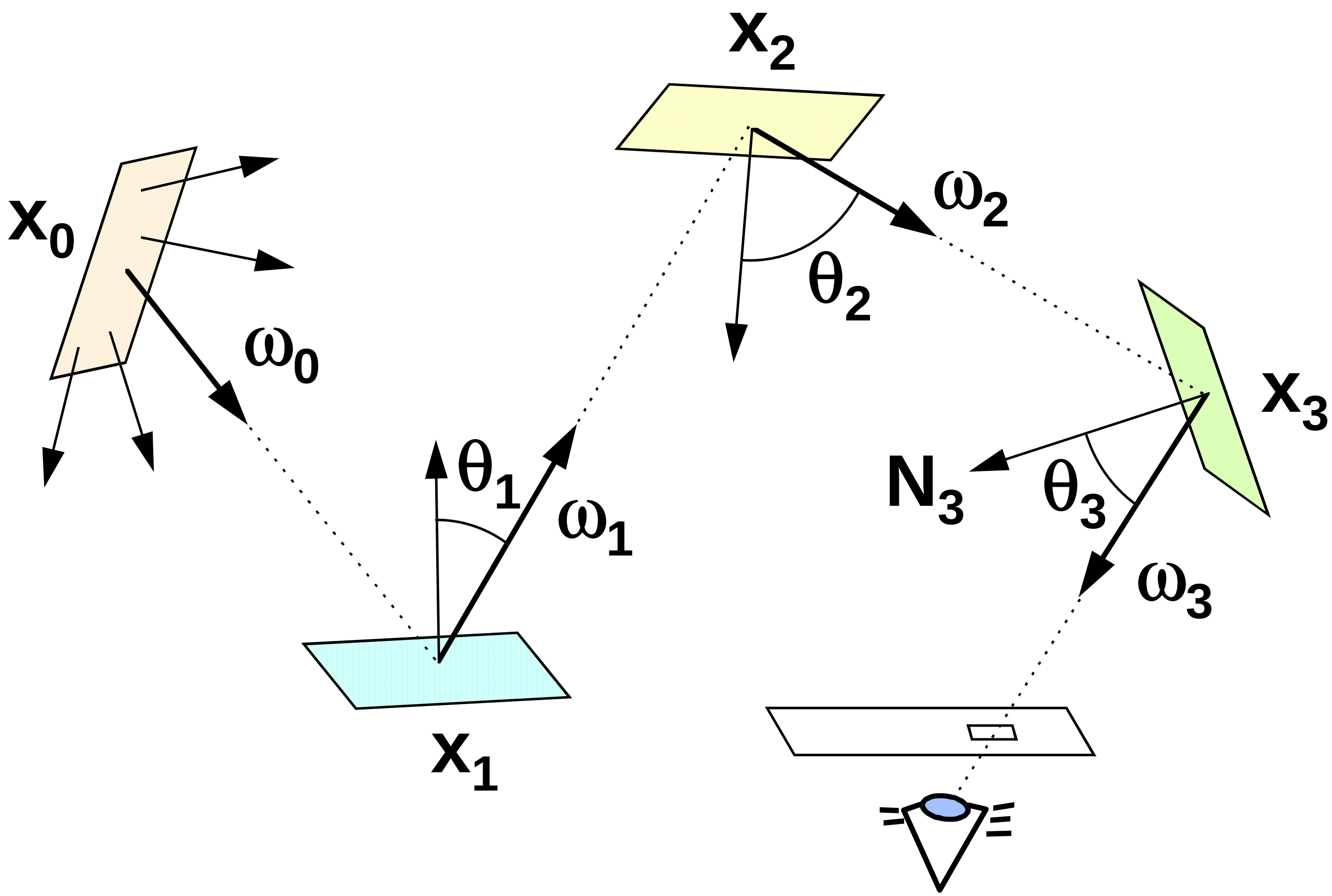
$$\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{light} = \frac{L_e(x_0, \omega_0) \cdot \cos\theta_0}{p_0(x_0, \omega_0)} \cdot \left\langle W(x_0, \omega_0, S) \right\rangle_{light}$$

$$\underline{\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{light}} = \frac{L_e(x_0, \omega_0) \cdot \cos\theta_0}{p_0(x_0, \omega_0)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{k} \left[\prod_{j=1}^{i} \frac{f(x_j, \omega_{j-1} \to \omega_j) \cdot \cos\theta_j}{P_j \cdot p_j(\omega_j)} \right] \cdot W_e(x_i, \omega_i, S)$$

celkový odhad

Schema šíření světla (střílení)



Vzorkování podle důležitosti

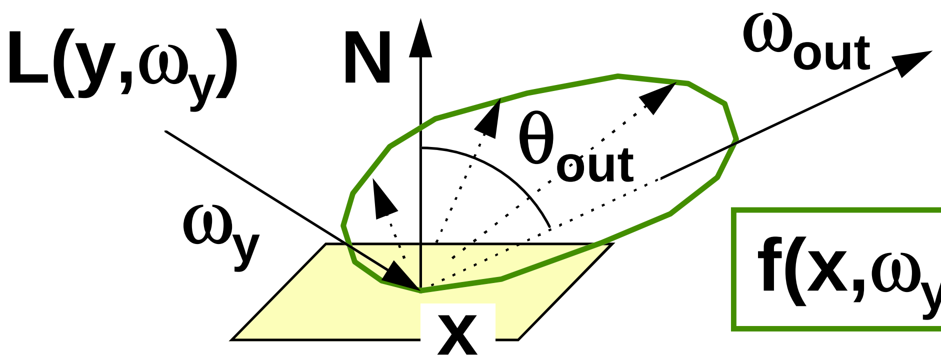
Pro **vyzařování světelného zdroje** (druhý integrál):

$$\mathbf{p_0}(\mathbf{x_0}, \omega_0) = \frac{\mathbf{L_e}(\mathbf{x_0}, \omega_0) \cdot \mathbf{cos}\,\theta_0}{\mathbf{L}}$$

Pro **pravděpodobnost pokračování** a s**měr odraženého paprsku** (první integrál) se použije metoda subkritické pravděpodobnosti (BRDF v bodě $\mathbf{p_j}$):

$$\mathbf{P_j} \cdot \mathbf{p_j}(\omega_j) = \mathbf{f}(\mathbf{x_j}, \omega_{j-1} \to \omega_j) \cdot \mathbf{cos}\,\theta_j$$

Vzorkování podle BRDF



$$f(x,\omega_y \rightarrow \omega_{out}) \cos \theta_{out}$$

Celkový primární odhad s využitím všech uvedených pravděpodobností:

$$\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{light,imp} = L \cdot \sum_{i=0}^{k} W_e(x_i, \omega_i, S)$$

Odhad příští události (NEE)

Rozdělení **odraženého světla** na dvě složky (bez **S**):

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{x}}) = \mathbf{W_e}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{x}}) + \mathbf{W_r}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{x}})$$

$$\underline{\mathbf{W_r}(\mathbf{x},\omega_{\mathbf{x}})} = \int_{\Omega_{\mathbf{y}}} \mathbf{f}(\mathbf{y},\omega_{\mathbf{x}} \to \omega_{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{y},\omega_{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{cos}\,\theta_{\mathbf{y}}\ \mathbf{d}\omega_{\mathbf{y}} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \int_{\underline{\mathbf{Ape}}} \mathbf{f}(\mathbf{y},\omega_{\mathbf{x}} \to \underline{\omega_{\mathbf{z}}}) \cdot \mathbf{W_e}(\mathbf{y},\underline{\omega_{\mathbf{z}}}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{y},\underline{\mathbf{z}})\ \underline{\mathbf{dA_z}} + \\ &+ \int_{\Omega_{\mathbf{y}}} \mathbf{f}(\mathbf{y},\omega_{\mathbf{x}} \to \omega_{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{W_r}(\mathbf{y},\omega_{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{cos}\,\theta_{\mathbf{y}}\ \mathbf{d}\omega_{\mathbf{y}} \end{aligned}}$$

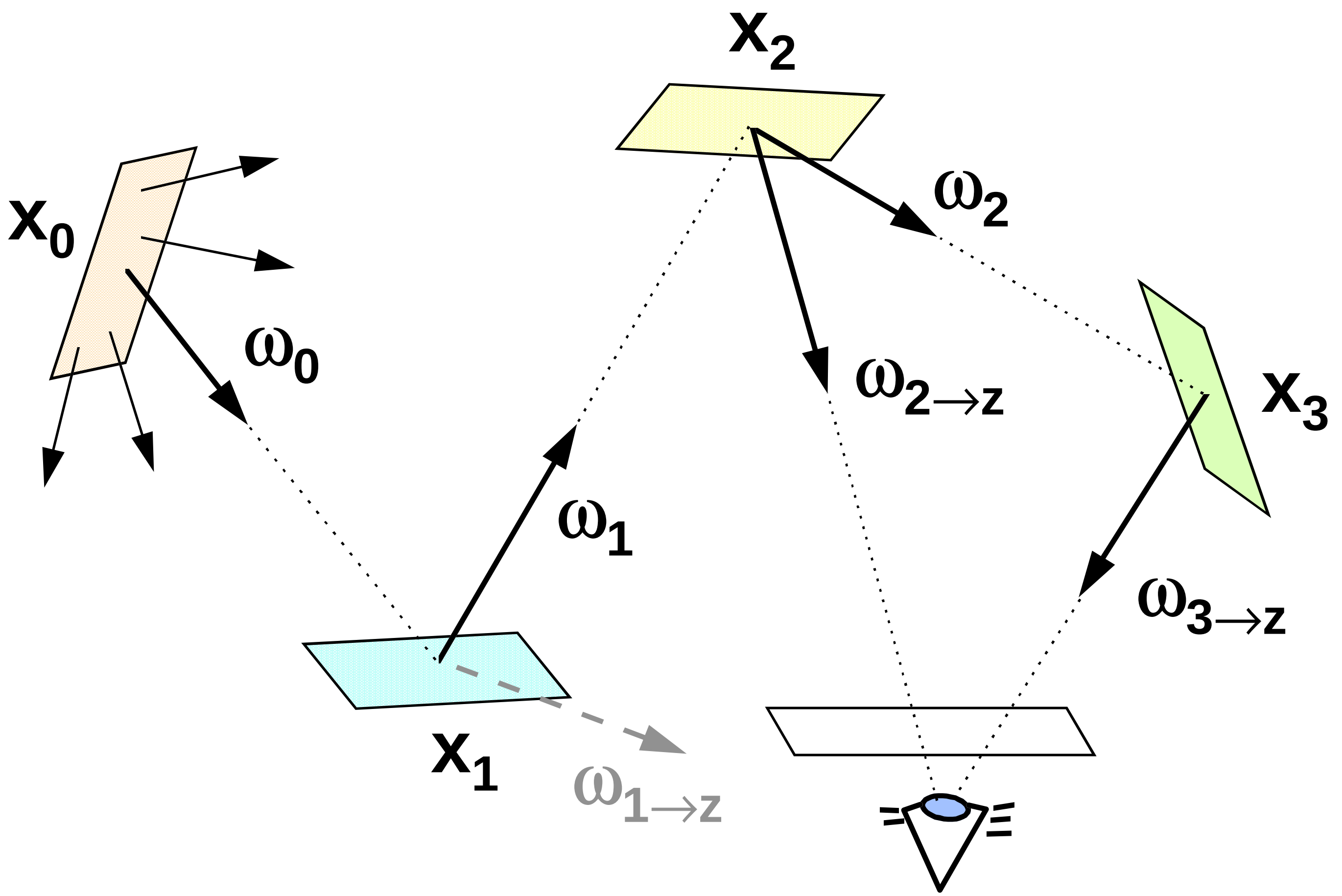
plocha objektivu

Odhad příští události

Vzorkování podle **BRDF** (subkritická hustota pravděpodobnosti) s **ruskou ruletou** a **odhadem příští události**:

$$\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{light,imp,nee} = L \cdot \Bigg[W_e(x_0, \omega_0, S) + Ape \cdot \cdot \sum_{i=1}^{k+1} W_e(x_i, \omega_{i \to z}, S) \cdot f(x_i, \omega_{i-1}, \omega_{i \to z}) \cdot G(x_i, z) \Bigg]$$

Schema šíření světla (NEE)



Aplikace

Použití metody “**light-tracing**”:

- přímý **výpočet realistického obrázku**
  – světlo se přijímá kamerou a ukládá v průmětně
- **pomocný výpočet** pro některou kombinovanou (hybridní) metodu
  – světlo se ukládá do tzv. <u>světelných map</u> (fotonové mapy, “particle-tracing”)
  – větší suma potenciálu $\mathbf{W_e}$ vede k efektivnějšímu výpočtu

Obousměrné sledování paprsku

("bidirectional path-tracing")

Kombinovaná **globální zobrazovací rovnice**:

vlastní emitovaná radiance

GRDF

diskrétní potenciál

$$\Phi(\mathbf{S}) =$$

$$= \iint_{A,\Omega_x} \iint_{A,\Omega_y} \mathbf{L_e}(\mathbf{x},\omega_x)\, \mathbf{W_e}(\mathbf{y},\omega_y,\mathbf{S})\, \mathbf{F}(\mathbf{x},\omega_x \rightarrow \mathbf{y},\omega_y)\, \cos\theta_y \cos\theta_x \, d\omega_y \, dA_y \, d\omega_x \, dA_x$$

integrály přes všechny plochy a směry zdrojů
a všechny plochy a směry receptorů

Odhad světelného toku

Výkon procházející pixelem (anti-aliasing, hloubka ostrosti), vyzařování světelného zdroje:

$$\left\langle \Phi(S) \right\rangle_{bipath} = \frac{L_e(x_0, \omega_{x0}) \cos\theta_{x0}}{p_0(x_0, \omega_{x0})} \cdot \frac{W_e(y_0, \omega_{y0}, S) \cos\theta_{y0}}{q_0(y_0, \omega_{y0})} \cdot \left\langle F(x_0, \omega_{x0} \rightarrow y_0, \omega_{y0}) \right\rangle_{bipath}$$

$\mathbf{p_0}$ ... hustota pravděpodobnosti náhodné dvojice $[\mathbf{x_0}, \omega_{x0}]$, $\mathbf{q_0}$ ... h. p. náhodné dvojice $[\mathbf{y_0}, \omega_{y0}]$

Rekurentní definice GRDF

První odraz:

$$F\left(x,\omega_x \rightarrow \underline{y,\omega_y}\right) = \delta\left(x,\omega_x,y,\omega_y\right) + \int_{\Omega_z} f\left(z,\omega_x \rightarrow \omega_z\right) \cdot F\left(z,\omega_z \rightarrow \underline{y,\omega_y}\right) \cdot \cos\theta_z \, d\omega_z$$

Poslední odraz:

$$F\left(\underline{x,\omega_x} \rightarrow y,\omega_y\right) = \delta\left(x,\omega_x,y,\omega_y\right) + \int_{\Omega_y^{-1}} f\left(y,\omega_z \rightarrow \omega_y\right) \cdot F\left(\underline{x,\omega_x} \rightarrow z,\omega_z\right) \cdot \cos\theta_y \, d\omega_z$$

Odhad GRDF

Lineární kombinace obou rekurzivních vzorců:

$$\mathbf{F} = \delta + \mathbf{w}^* \mathbf{T}^* \mathbf{F} + \mathbf{w}\,\mathbf{T}\mathbf{F}, \qquad \mathbf{w} + \mathbf{w}^* = \mathbf{1}$$

Nekonečná Neumannova řada:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{w}_{ij}\, \mathbf{T}^{*i}\, \mathbf{T}^{j}\, \delta, \qquad \sum_{i=0}^{N} \mathbf{w}_{i,N-i} = \mathbf{1}$$

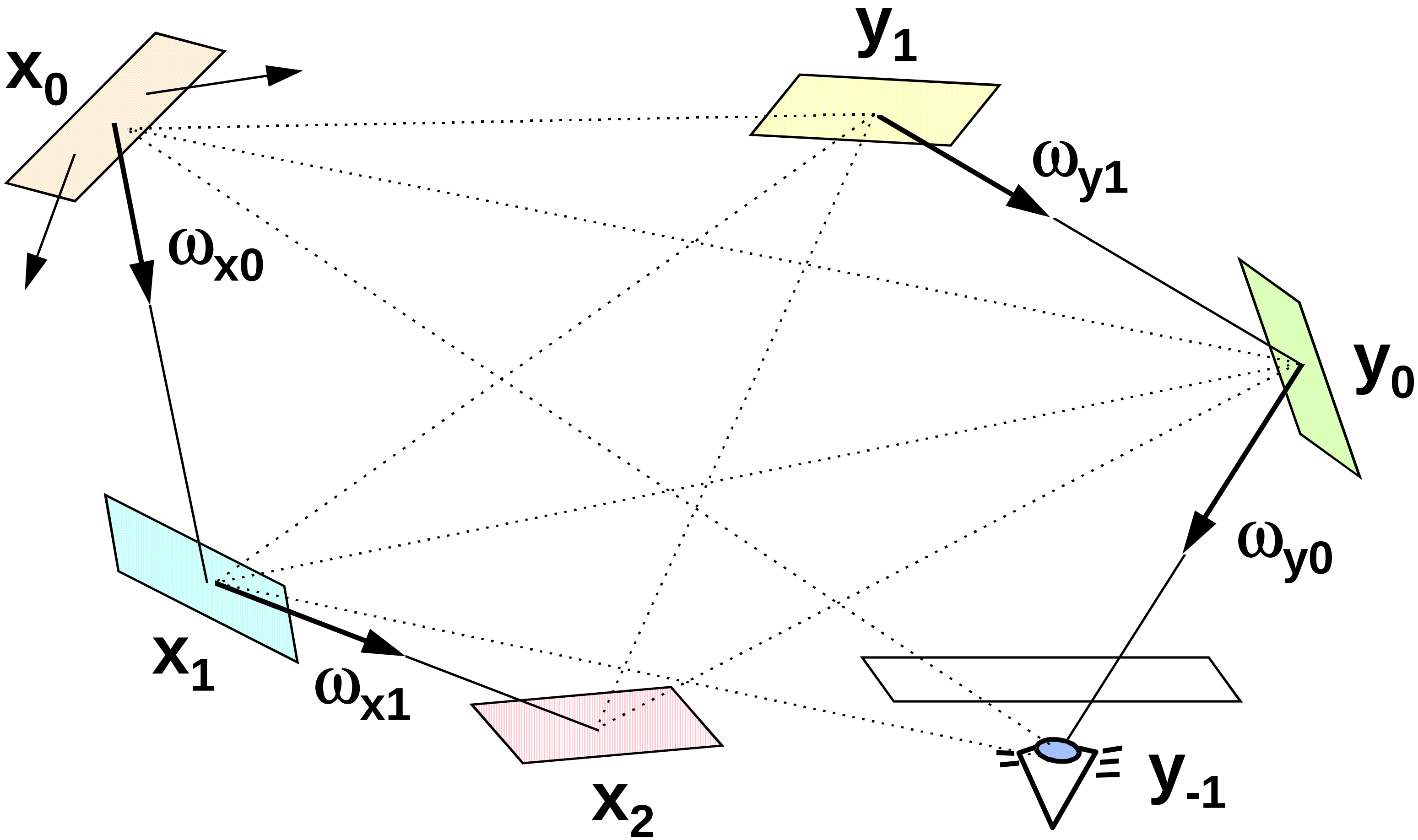
T i **T*** se odhadují stochasticky pomocí náhodné procházky ukončované ruskou ruletou. Bez odhadu příští události však má tato metoda **velký rozptyl**.

Obousměrné sledování paprsku

$\boxed{T^*}$ se odhaduje sledováním dráhy světla **od zdroje („light tracing“)**:
$\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, ..\mathbf{x_{k^*}}$ - směr ω_{xi} se vybírá podle hustoty pravděpodobnosti $\mathbf{p_i}(\omega_{xi})$, pravděpodobnost pokračování je $\mathbf{P_i}$

$\boxed{T}$ se odhaduje zpětným sledováním dráhy světla **od pozorovatele („path tracing“)**:
$\mathbf{y_0}, \mathbf{y_1}, ..\mathbf{y_k}$ - směr ω_{yi} se vybírá podle hustoty pravděpodobnosti $\mathbf{q_i}(\omega_{yi})$, pravděpodobnost pokračování je $\mathbf{Q_i}$

Schema šíření světla (NEE)



Odhad příští události (NEE)

S přidáním neuzavřených cest:

$$\boxed{\left\langle \Phi(\mathbf{S}) \right\rangle_{\mathbf{bipath,nee}} = \sum_{i=-1}^{k} \sum_{j=-1}^{k^*} \mathbf{w_{ij}\, C_{ij}}}$$

i=–1, **j>0**: cesta od pozorovatele (bez NEE)
i=0, **j≥0**: cesta od pozorovatele se vzorkem na zdroji
i>0, **j>0**: světlo i-krát odražené od zdroje a j-krát od pozorovatele
i≥0, **j=0**: cesta od zdroje se vzorkem na receptoru
i>0, **j=–1**: cesta od zdroje (bez NEE - neefektivní)

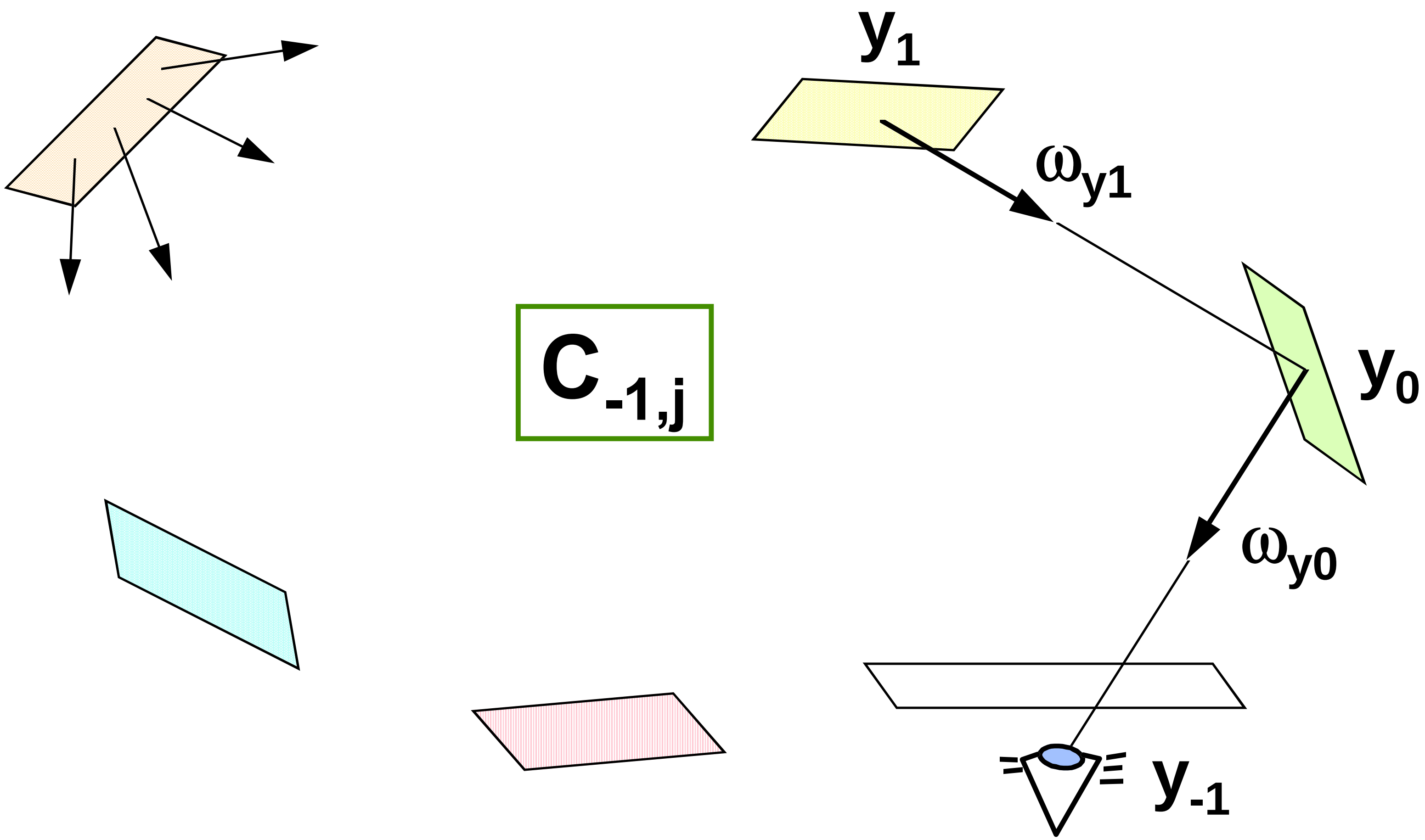
Přehled vzorkování

závislost příspěvku na		vzorku na cestě od zdroje světla				
			x_0	x_1	x_2	x_3
vzorku na cestě od receptoru				$c_{1,-1}$	$c_{2,-1}$	$c_{3,-1}$
	y_{-1}		$c_{0,0}$	$c_{1,0}$	$c_{2,0}$	$c_{3,0}$
	y_0	$c_{-1,1}$	$c_{0,1}$	$c_{1,1}$	$c_{2,1}$	$c_{3,1}$
	y_2	$c_{-1,2}$	$c_{0,2}$	$c_{1,2}$	$c_{2,2}$	$c_{3,2}$

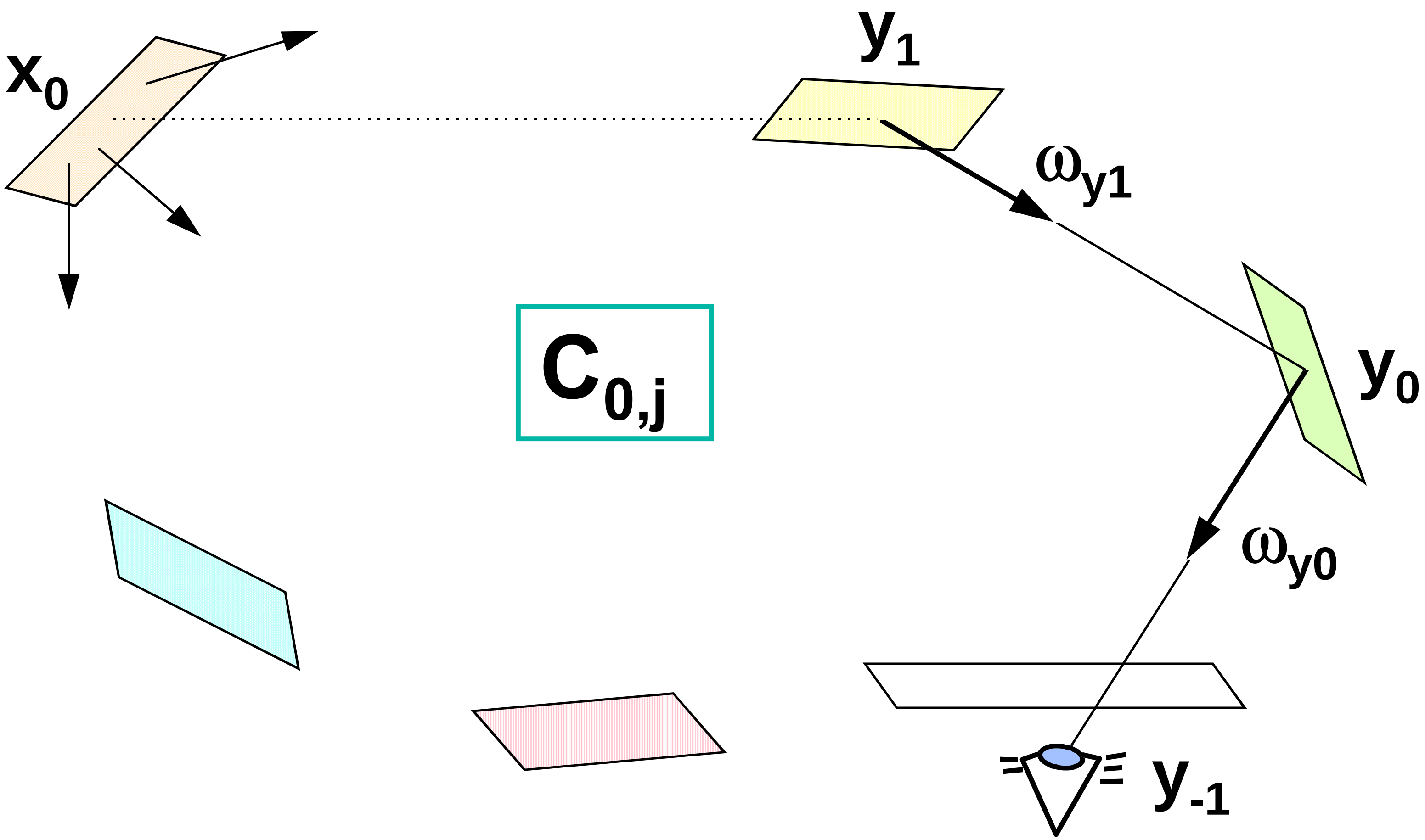
LT

PT

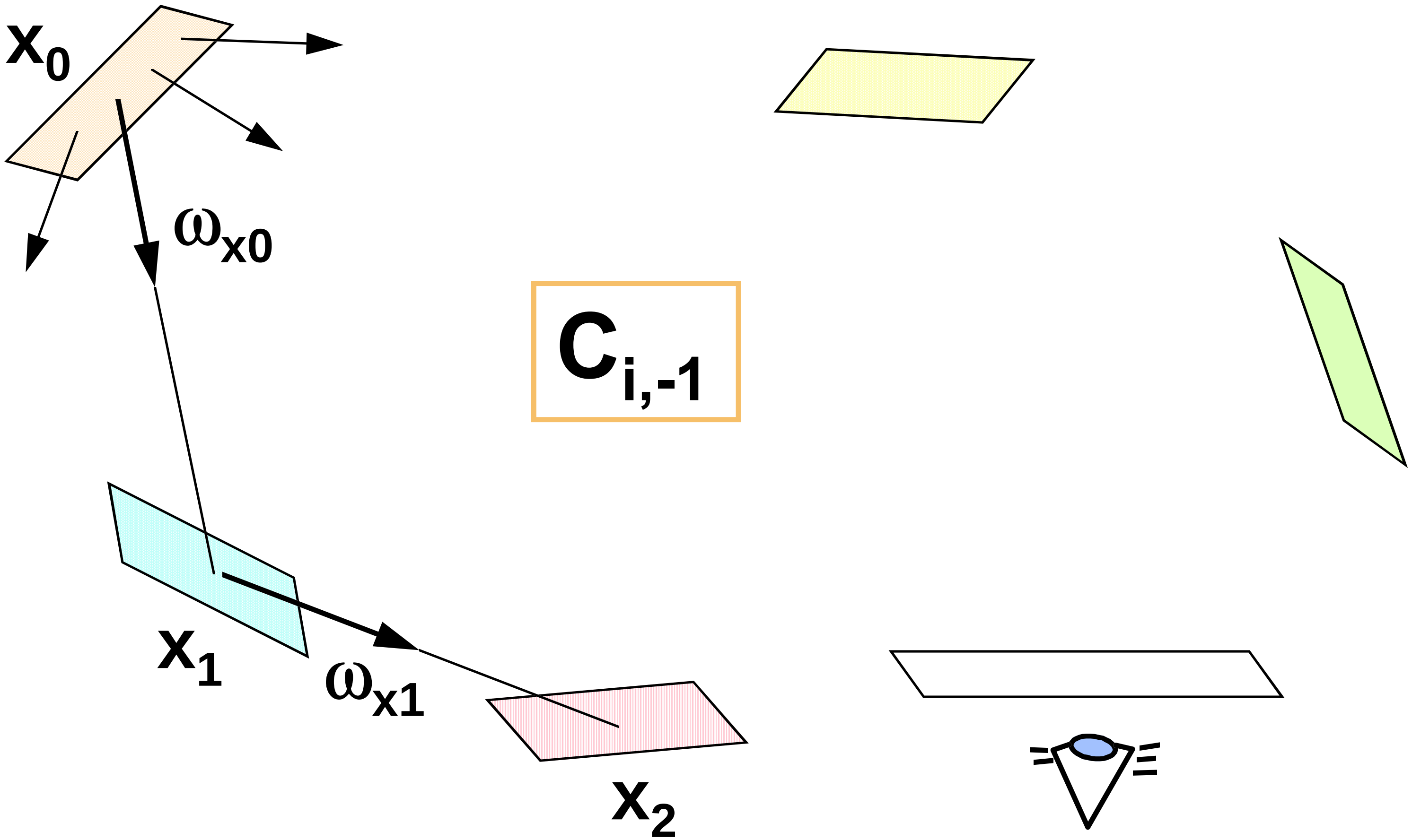
Neuzavřená cesta od receptoru



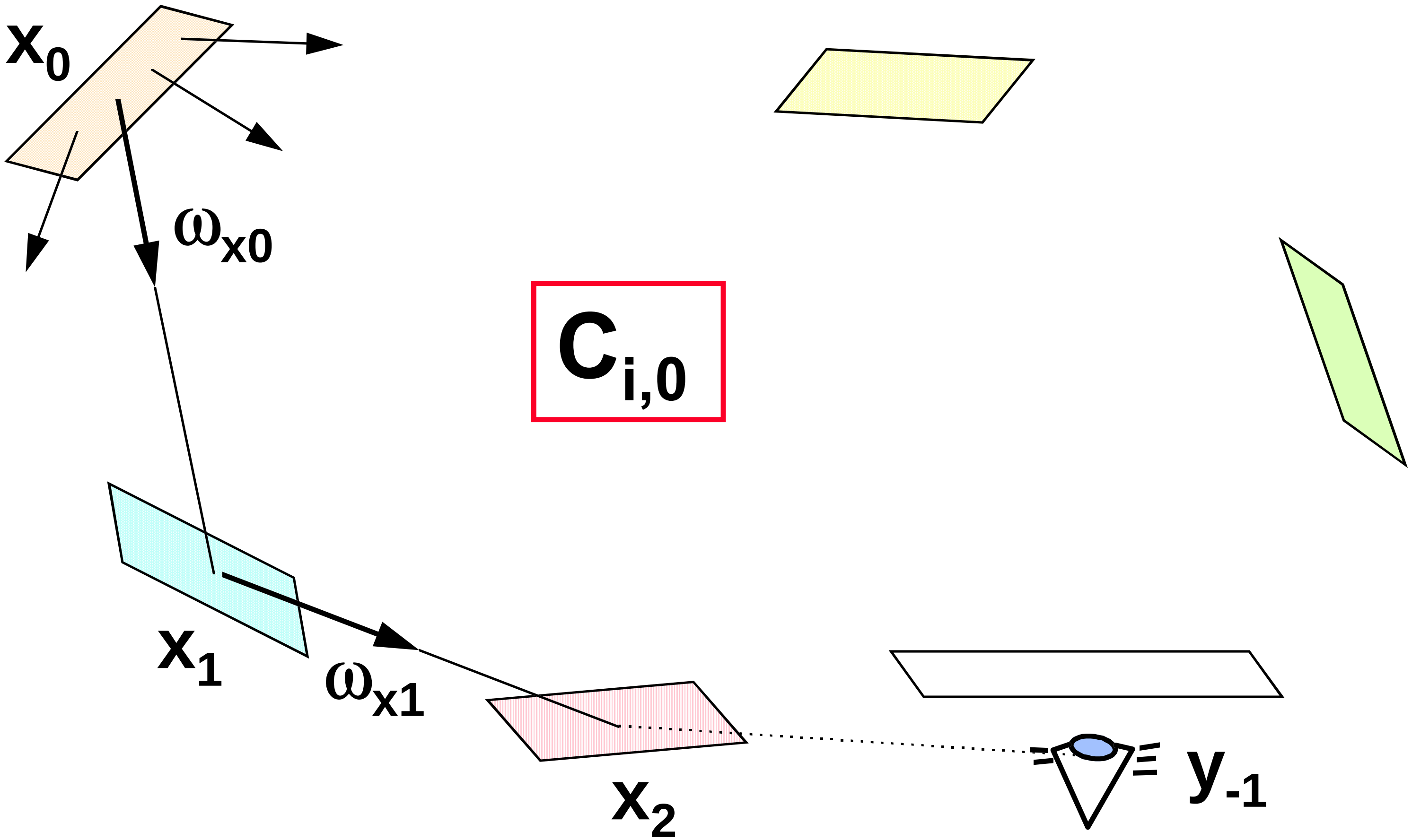
Path tracing s NEE



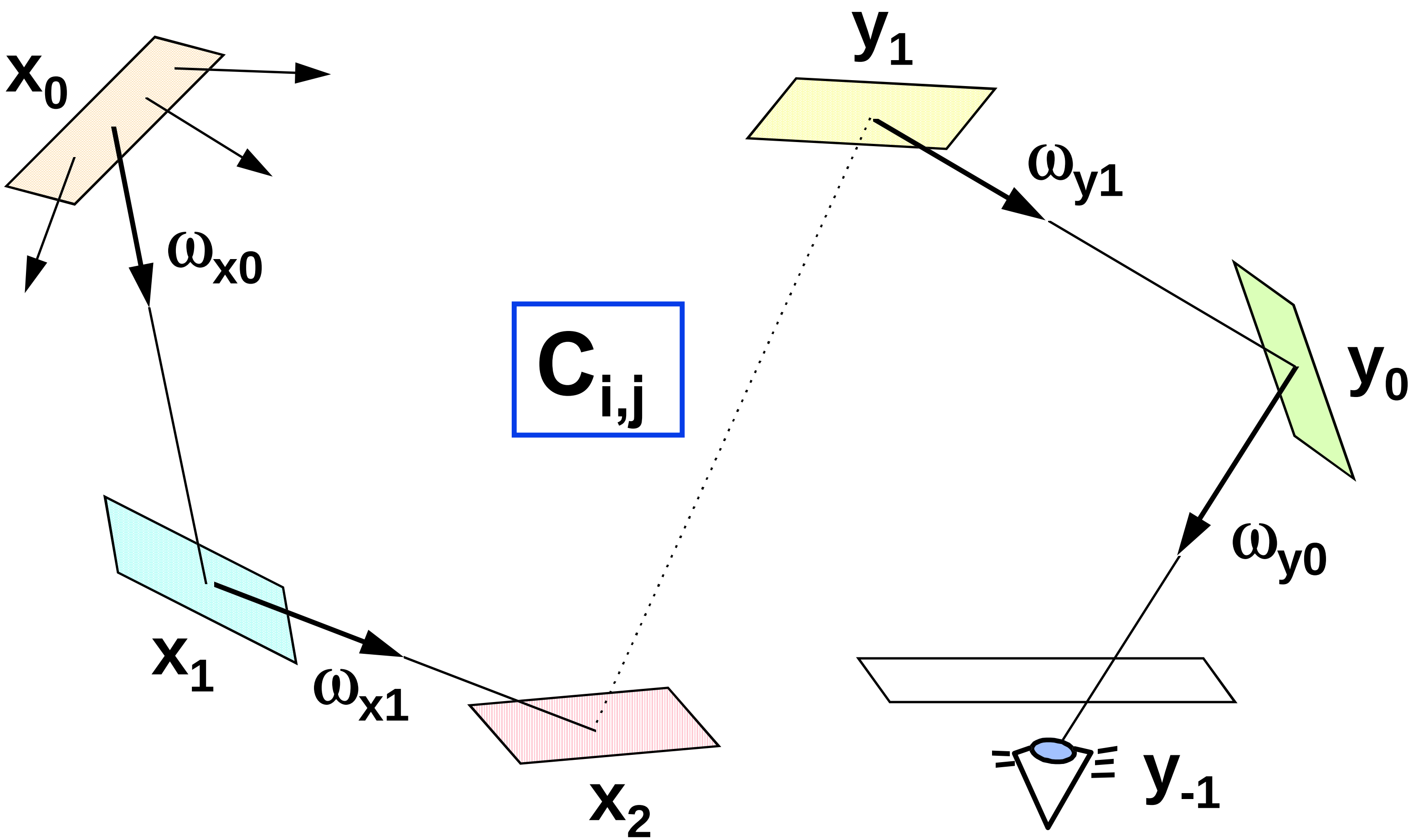
Neuzavřená cesta od zdroje



Light tracing s NEE



Kombinovaná cesta



Efektivní implementace

- výpočet dvou **nezávislých náhodných procházek** zakončovaných ruskou ruletou
  - od světelného zdroje (délka **k***) a od receptoru (**k**)
  - nebo jedna cesta ze zdroje do receptoru délky **K**
- kombinace **všech prefixů** obou cest
  - systematická chyba?
- **K+2** kombinace pro cestu pevné délky **K**
  - kombinovaný odhad - směs odhadů pro všechna **K**

Konec

Další informace:

- **E. Lafortune**: ***Mathematical Models and Monte Carlo Algorithms for Physically Based Rendering***, PhD thesis, KU Leuven, 65-102
- **A. Glassner**: ***Principles of Digital Image Synthesis***, Morgan Kaufmann, '95, 1037-1049
- **E. Veach, L. Guibas**: ***Optimally Combining Sampling Techniques for Monte Carlo Rendering***, SIGGRAPH '95