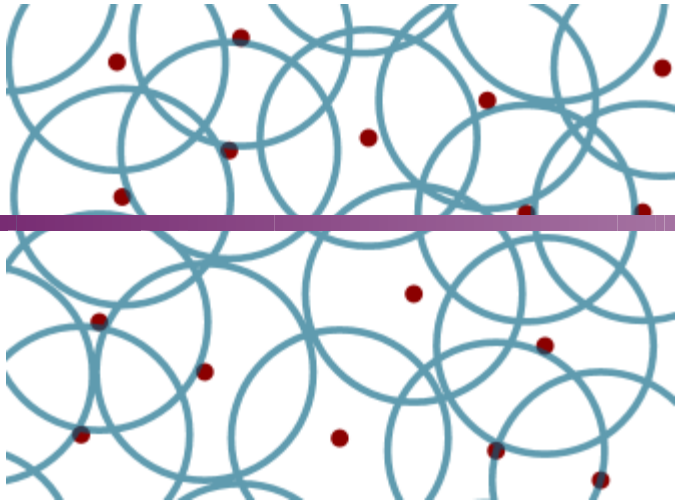


Computer
Graphics
Center
University

Náhodné rozmístování bodů v rovině

© 2014-15 Josef Pelikán, CGG MFF UK Praha
<http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/>

Seminář strojového učení a modelování, 26. 3. 2015



Computer
Graphics
Charles
University

Náhodné rozmístování bodů v rovině

© 2014-15 Josef Pelikán, CGG MFF UK Praha
<http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/>

Seminář strojového učení a modelování, 26. 3. 2015



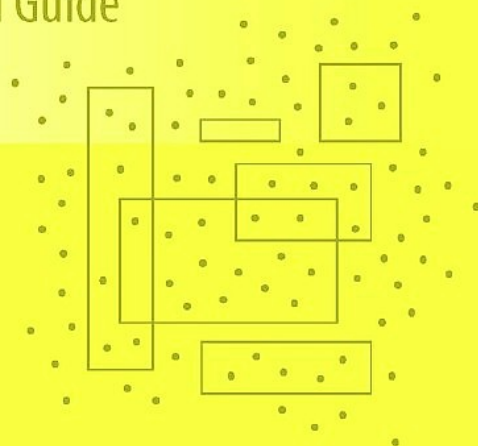
Jiří Matoušek

ALGORITHMS AND COMBINATORICS

18

Geometric Discrepancy

An Illustrated Guide

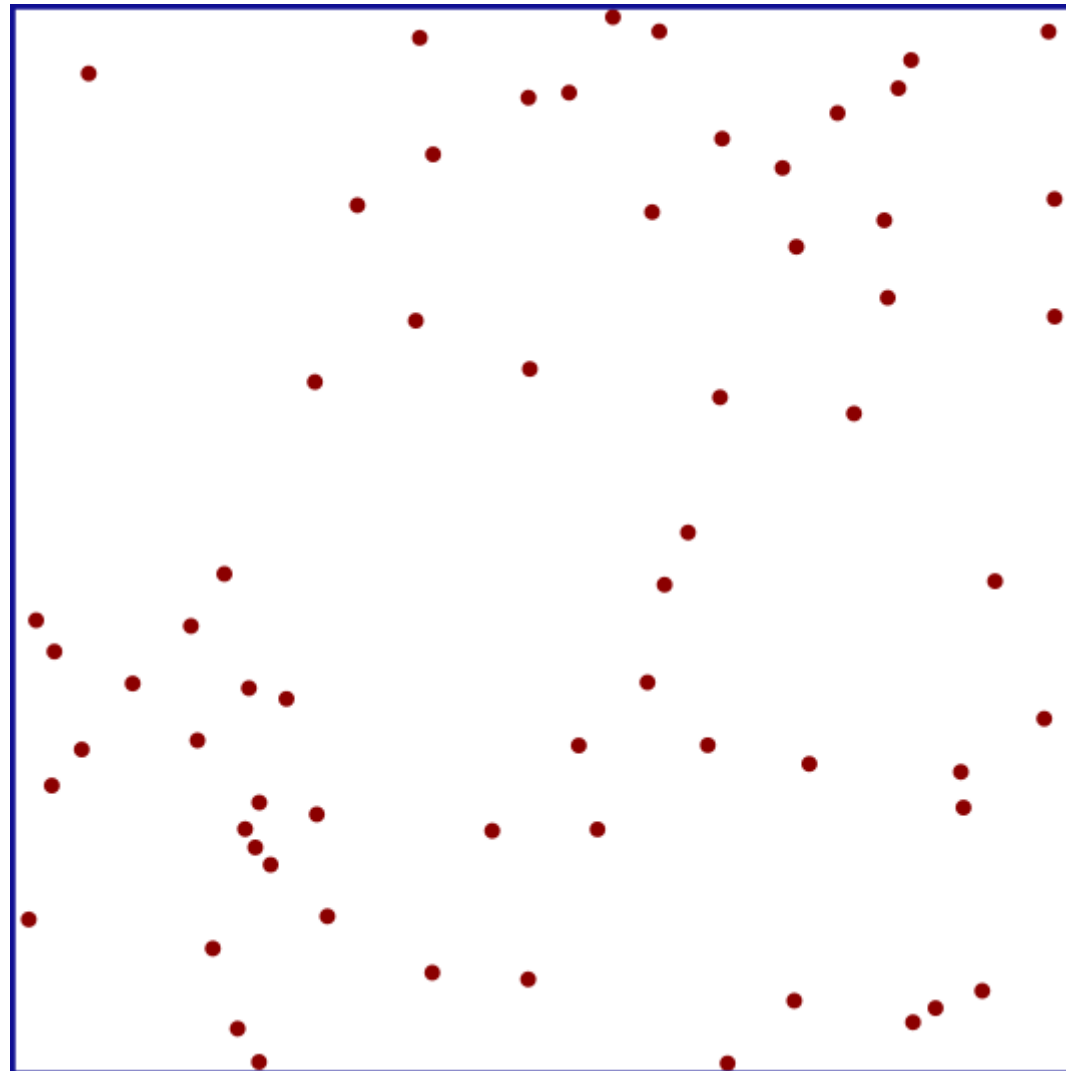


 Springer



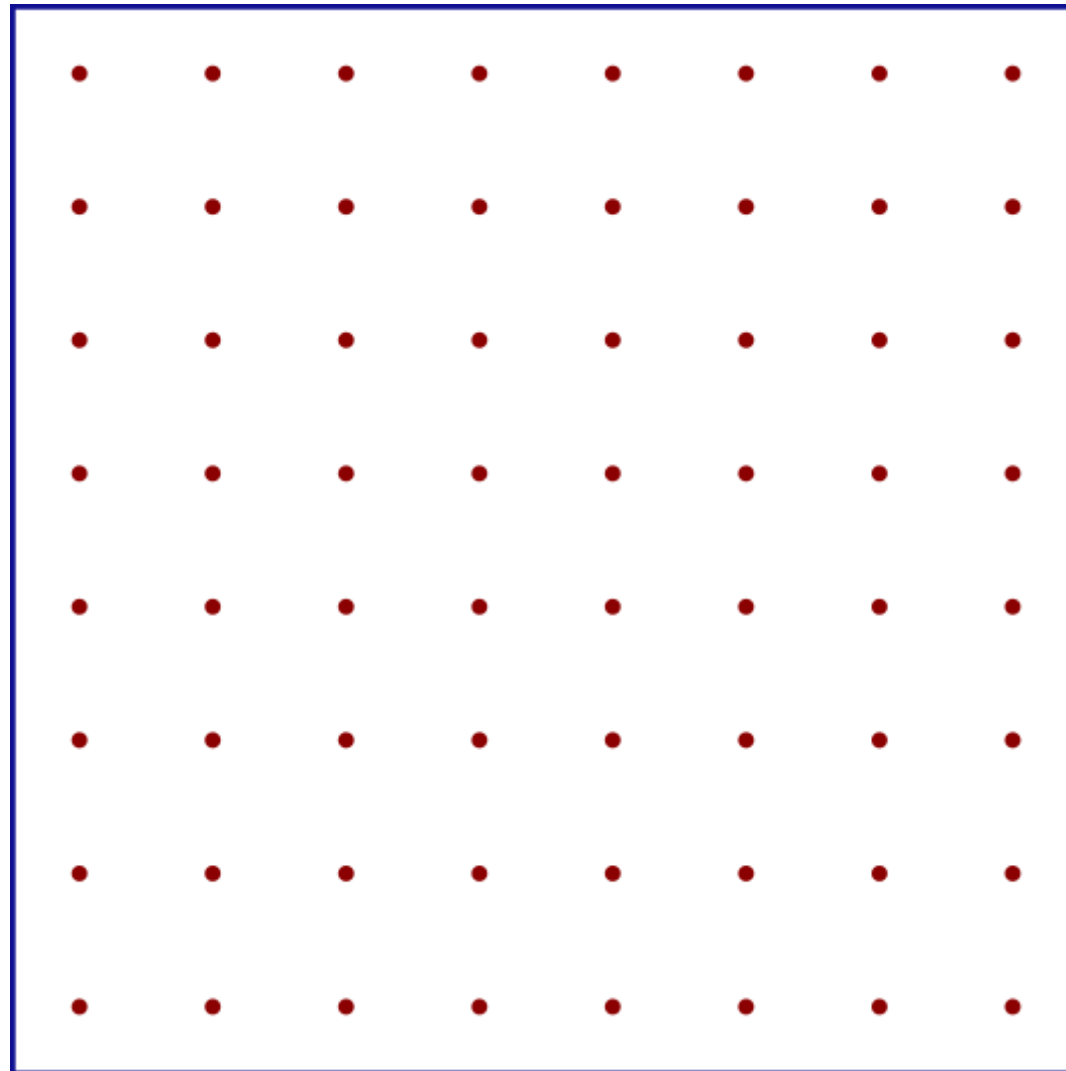
Jiří Matoušek (1963-2015)

Náhodné rozložení bodů.. ?



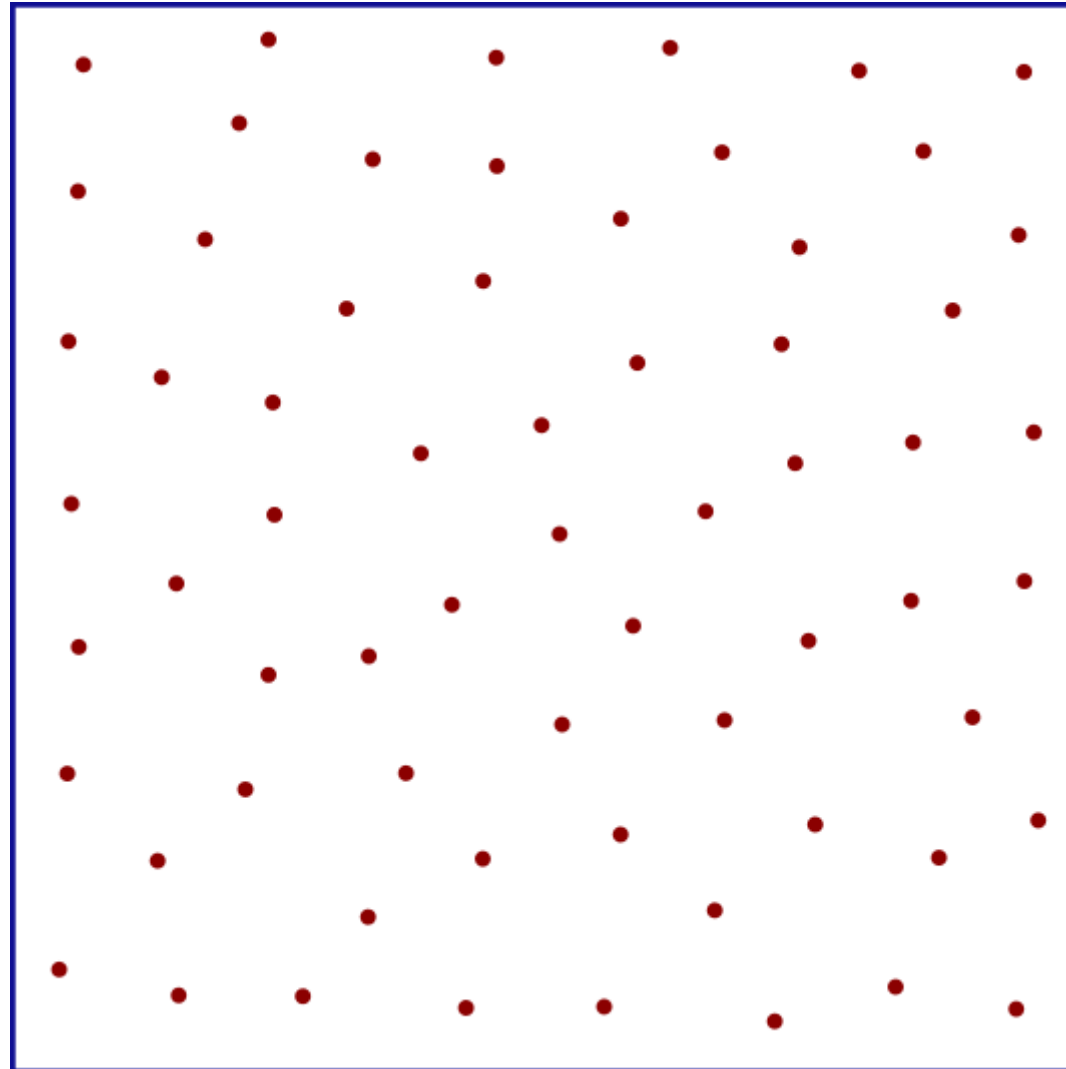
random

Náhodné rozložení bodů.. ?



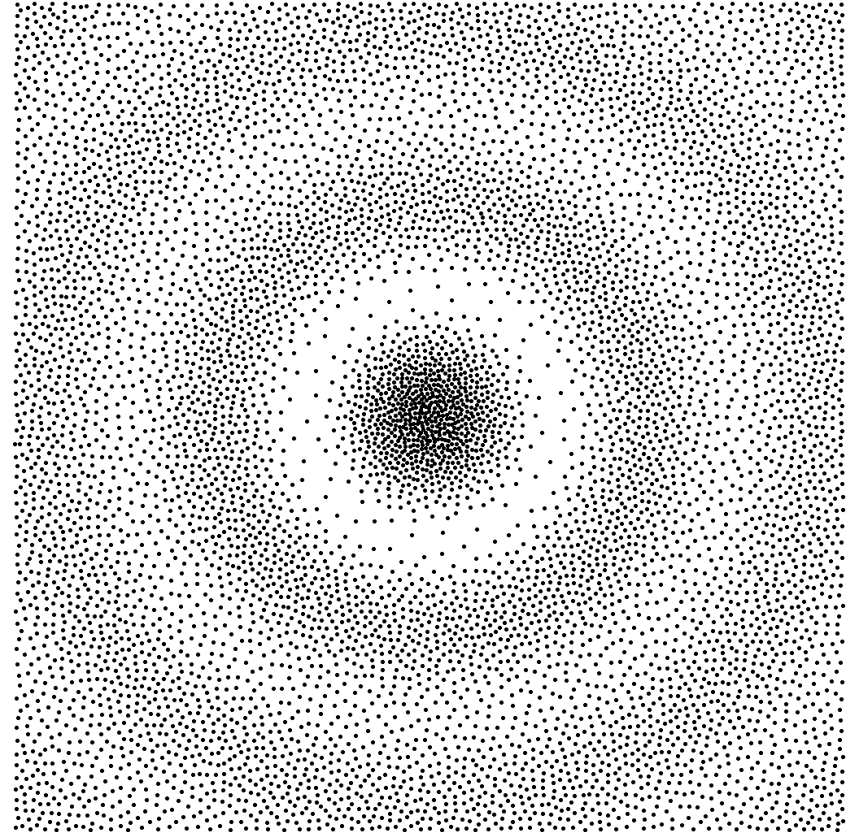
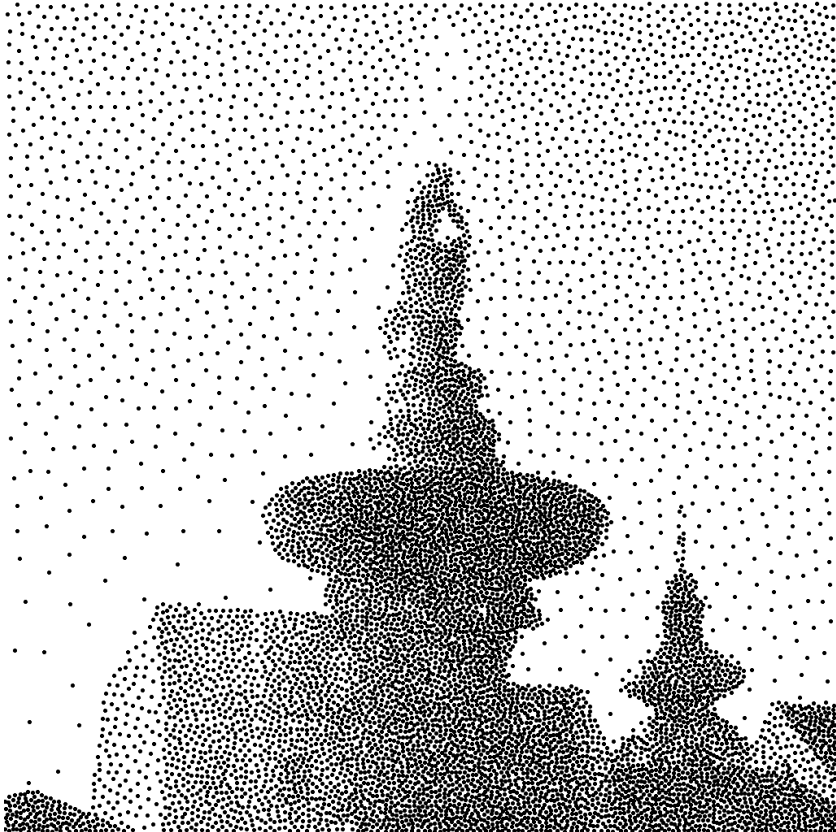
regular

Náhodné rozložení bodů.. ?

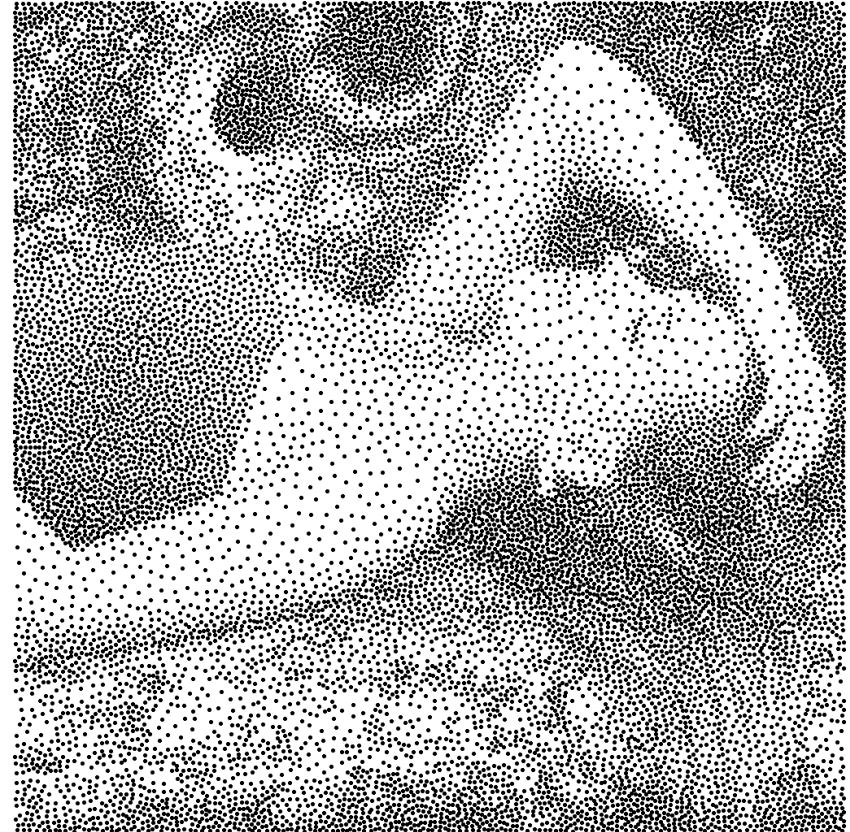
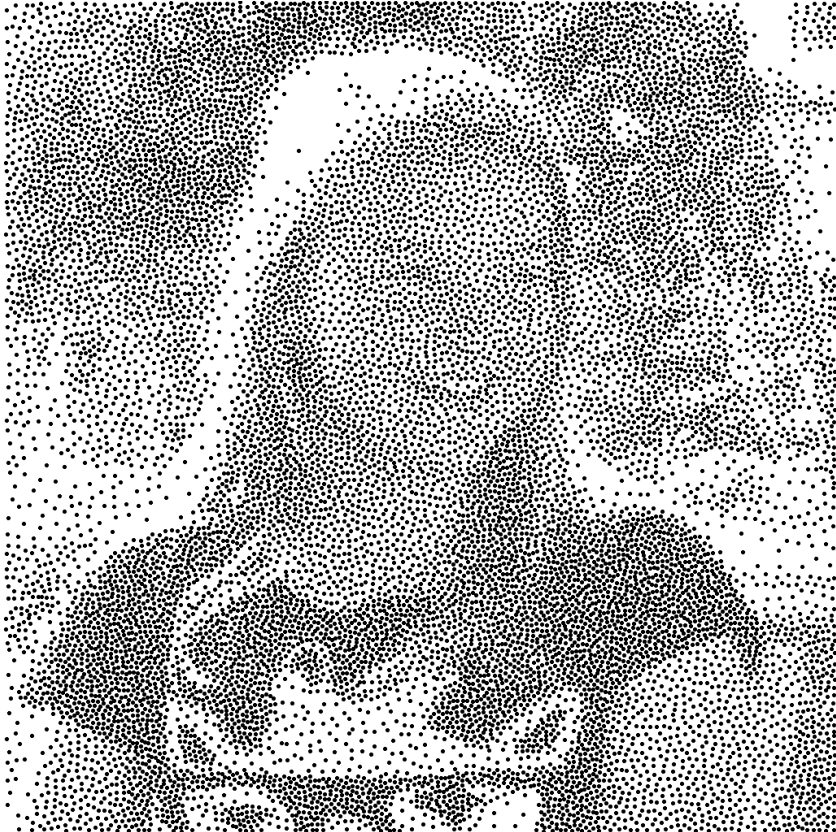


CCDT

Řízení hustotou pravděpodobnosti



Řízení hustotou pravděpodobnosti



Příroda



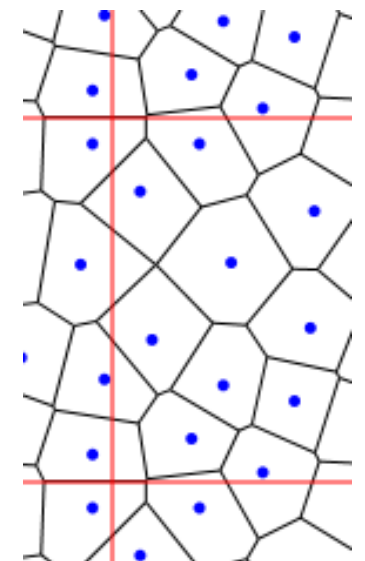
- ◆ fyzikální zákony, **sítnice oka**, ..



Aplikace



- ◆ vzorkování pro **Monte-Carlo** kvadraturu
 - ◆ rychlost, diskrepance, hustota
- ◆ **tiskařství** – tupování („stippling“), FM dithering
 - ◆ hustota, spektrální vlastnosti, estetika
- ◆ simulace **přírodních jevů** (stromy, buňky, ..), **hry**
 - ◆ spektrální vlastnosti, estetika, hustota
 - ◆ deterministické chování
- ◆ **design**, architektura
 - ◆ estetika, efektivita výroby (opakování vzorů)
- ◆ generování **sítí pro FEM**
 - ◆ diskrepance, hustota

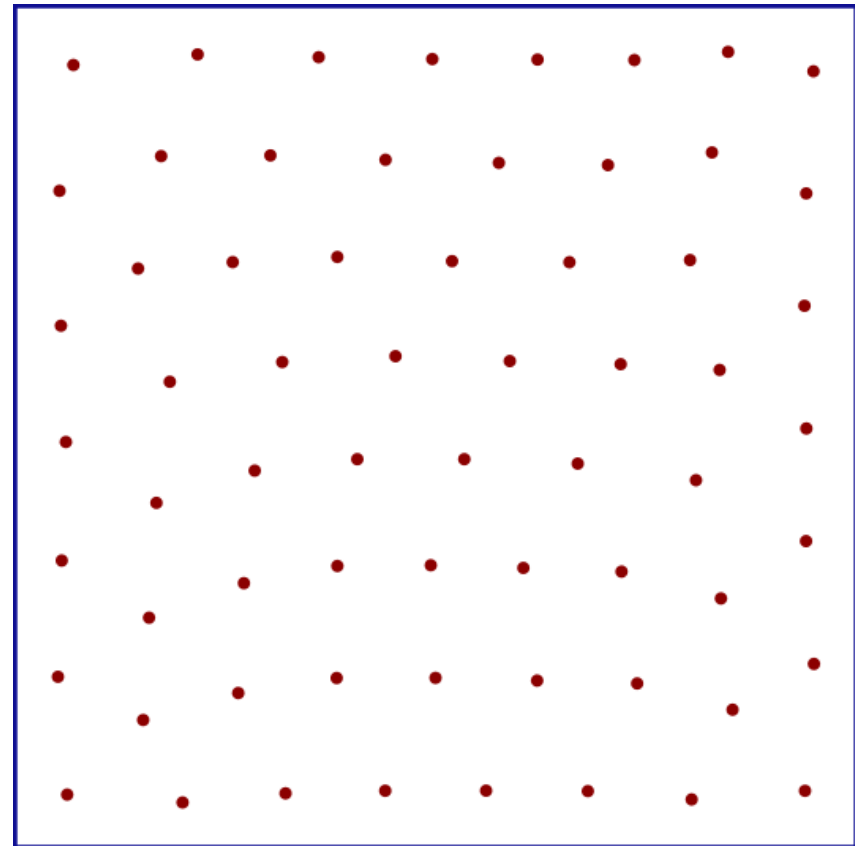


Jak hodnotit rozložení bodů v rovině?

- ◆ rovnoměrnost pokrytí: **diskrepance**
- ◆ míra nahodilosti?
- ◆ estetika?

Lloydův algoritmus

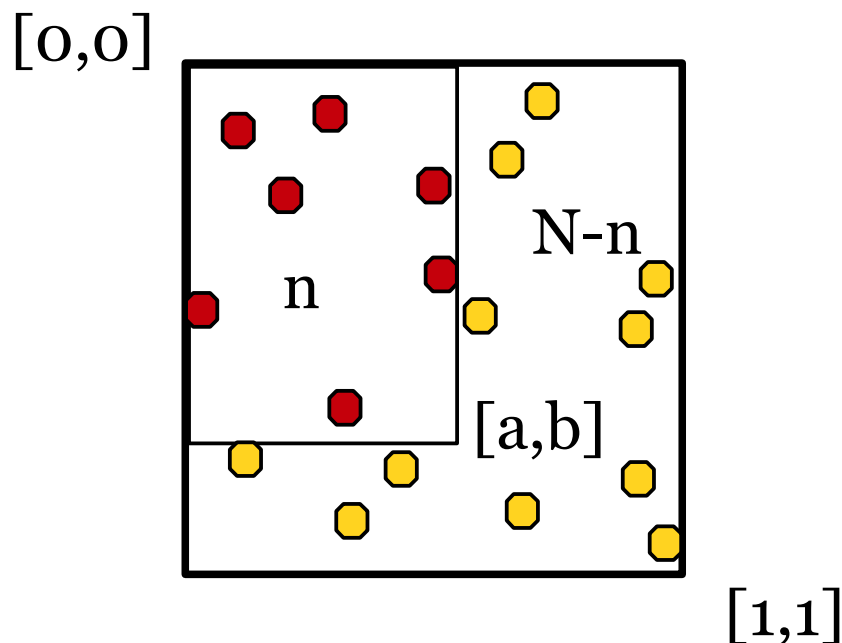
„Centroidal Voronoi“
skalární kvantizace
1982





Diskrepance

- ♦ **míra rovnoměrnosti** pokrytí domény sadou vzorků
- ♦ Monte-Carlo integrace
 - ♦ **Zaremba 1968** zavádí pojem diskrepance (ukotvené levé horní rohy obdélníků)



$$d(a, b) = \left| ab - \frac{n}{N} \right|$$

$$D_\infty = \max_{a, b \in [0,1]} d(a, b)$$



Jiné formy diskrepance

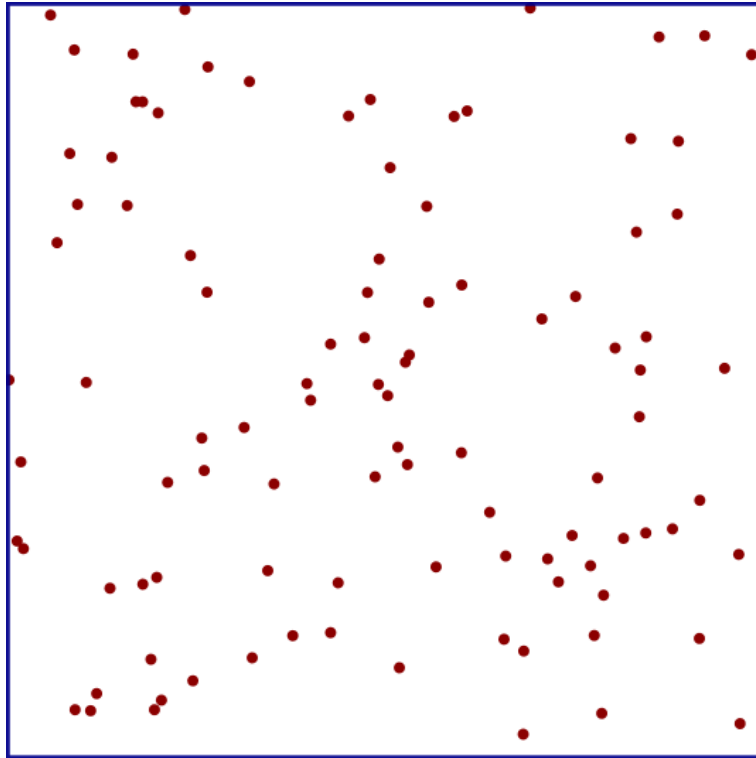
- ♦ střední kvadratická hodnota místo maxima

$$D_2 = \iint d(a, b)^2 da db$$

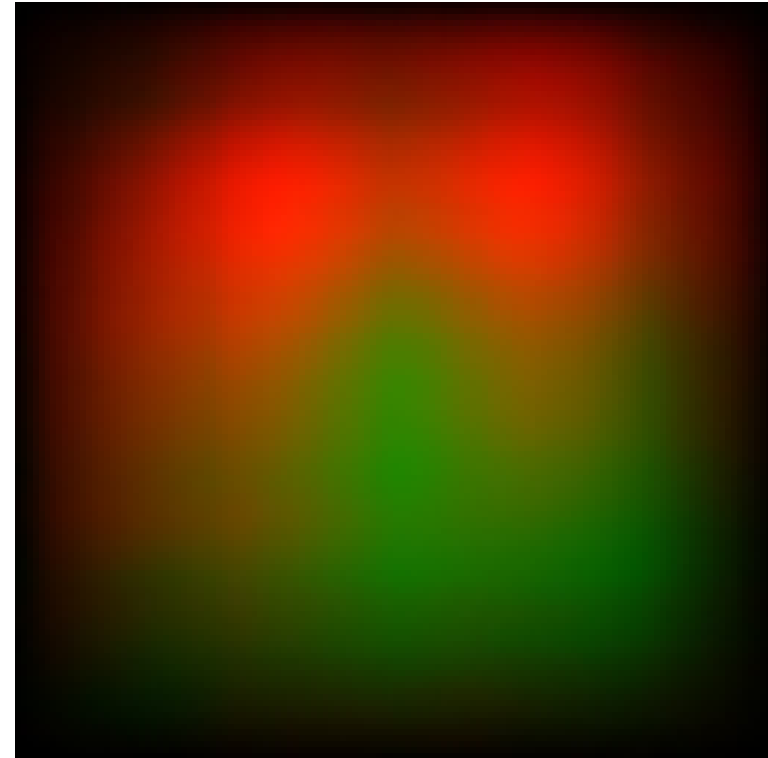
- ♦ **Stroud 1971** navrhuje počítat přes všechny obdélníky

$$d(a, b, c, d) = \left| (a - c)(b - d) - \frac{n}{N} \right|$$

Visualizace diskrepance



random

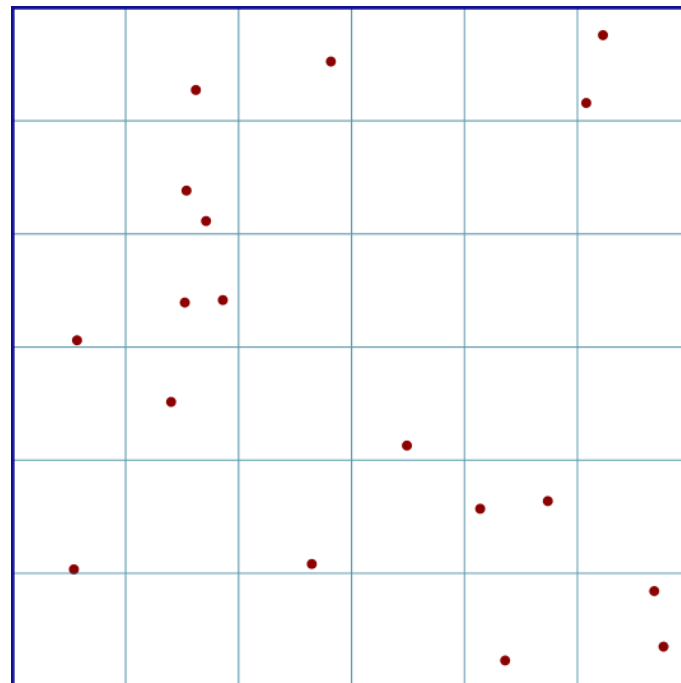


Dr-Cr

Shluky !



- ♦ jsou přirozené?
 - ♦ „Zákon řídkých jevů“ („Law of Rare Events“)
 - ♦ Poissonovo rozdělení s malou hodnotou μ



$$\mu = 0.5$$

$$c_0 = 23$$

$$c_1 = 8$$

$$c_2 = 5$$

Spektrální charakteristiky



- ◆ hodnocení míry pravidelnosti
 - ◆ přítomnost nežádoucích vzorů
 - ◆ výskyt shluků
- ◆ **spektrální analýza** se objevuje při hodnocení kvality pŕltónování v tiskařství
 - ◆ již Allebach 1977
 - ◆ detailní použití: Ulichney, Digital Halftoning, 1987
- ◆ frekvenční spektrum – **Fourierova transformace**
 - ◆ **periodogram** – již Schuster 1898
 - ◆ průměrování periodogramů – Bartlett 1948

Fourierovské „power spectrum“



- množina N vzorků v rovině:

$$\mathcal{S} = \{s_k\}_{k=1}^N = \{[x_k, y_k]\}_{k=1}^N$$

- funkce rozložení vzorků (definovaná na \mathbb{R}^2):

$$s(x, y) = \sum_{k=1}^N \delta(x - x_k, y - y_k)$$

Fourierovské „power spectrum“



- Fourierova transformace se dá zjednodušit na:

$$F(\mathbf{f}) = \sum_{k=1}^N e^{-2\pi i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{s}_k)}$$

kde \mathbf{f} je frekvenční vektor $[f_x, f_y] \in \mathbf{Z}^2$

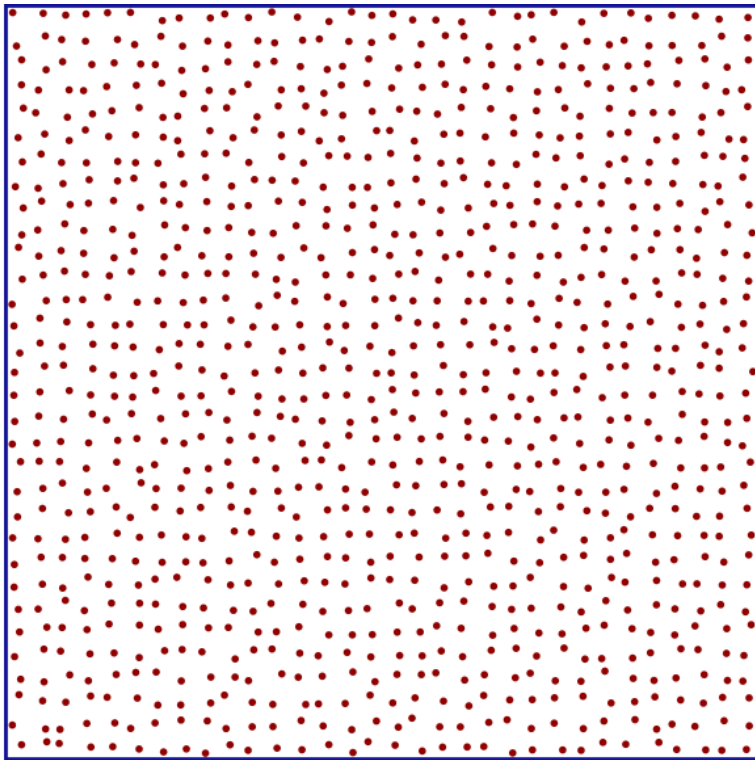
- a nakonec výkonové spektrum:

$$P(\mathbf{f}) = |F(\mathbf{f})|^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \cos(2\pi \mathbf{f} \cdot \mathbf{s}_k) \right)^2 + \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \sin(2\pi \mathbf{f} \cdot \mathbf{s}_k) \right)^2$$

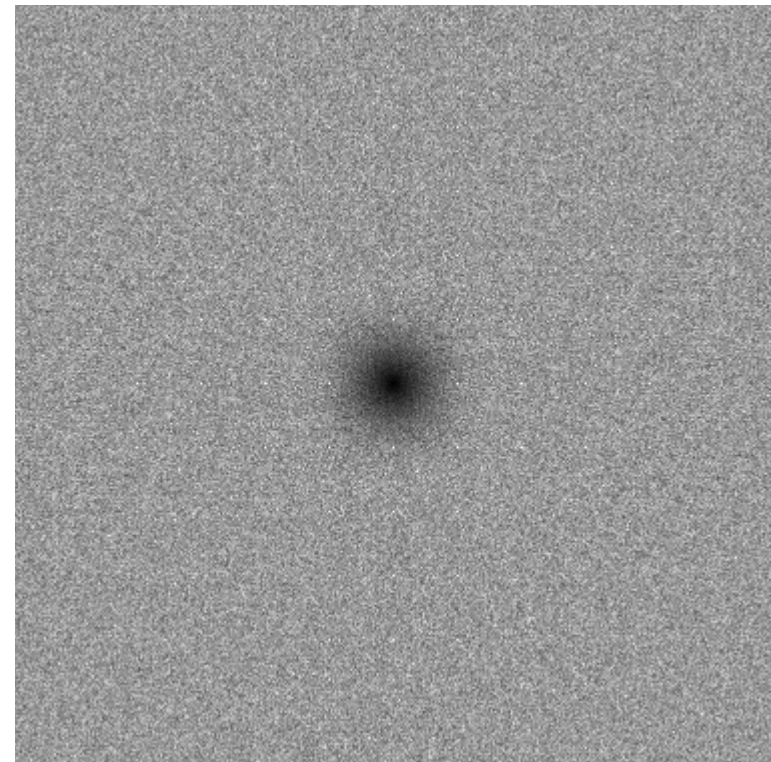
Příklady spektrální analýzy



◆ Fourierova transformace



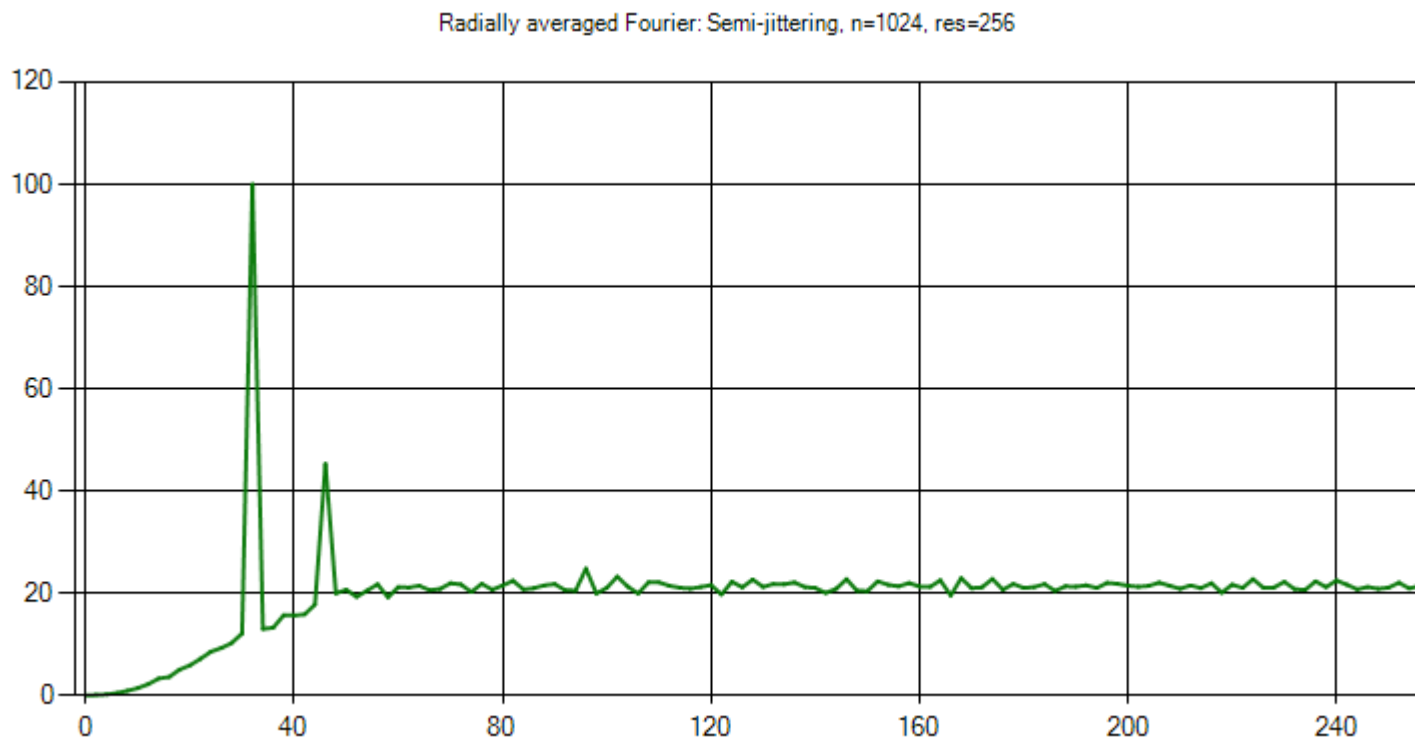
semi-jittering





Příklady spektrální analýzy

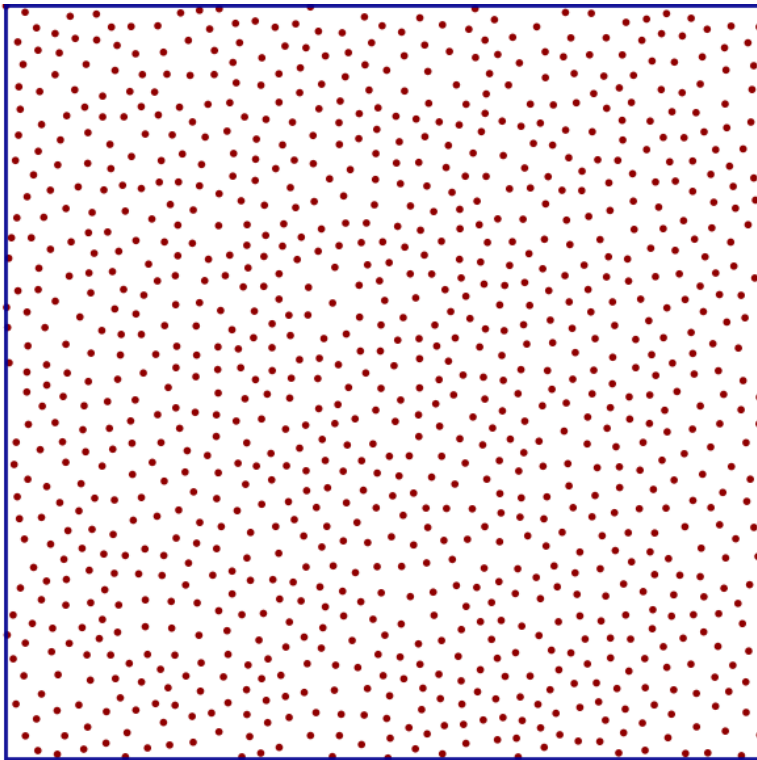
- ◆ radiálně průměrované spektrum
 - ◆ hodnocení radiální symetrie
 - ◆ redukce nízkých frekvencí (chceme „modrý šum“)



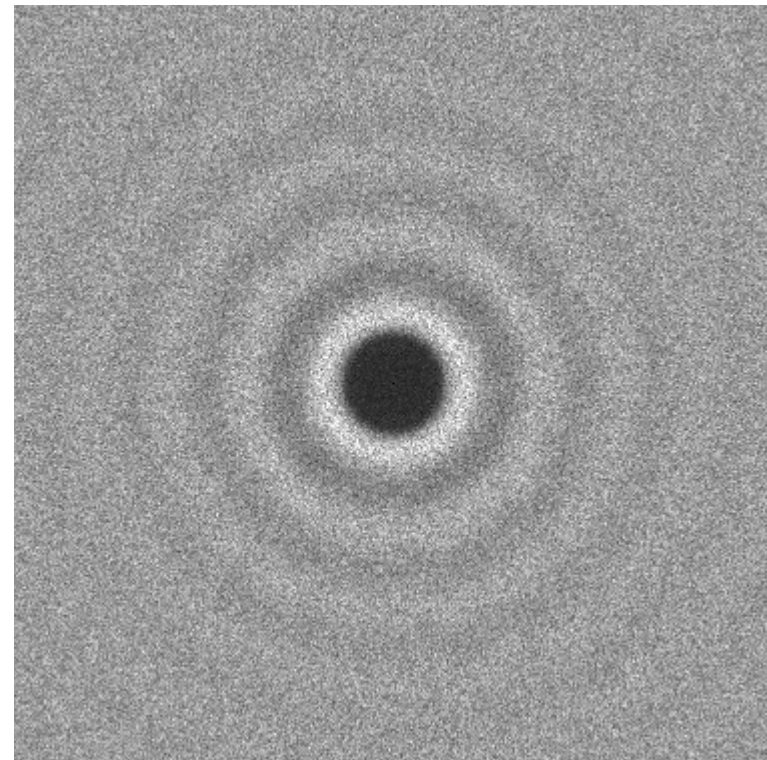
„Pěkné“ spektrum



- ♦ vlastnosti „modrého šumu“ (Ulichney 1987)



Mitchell

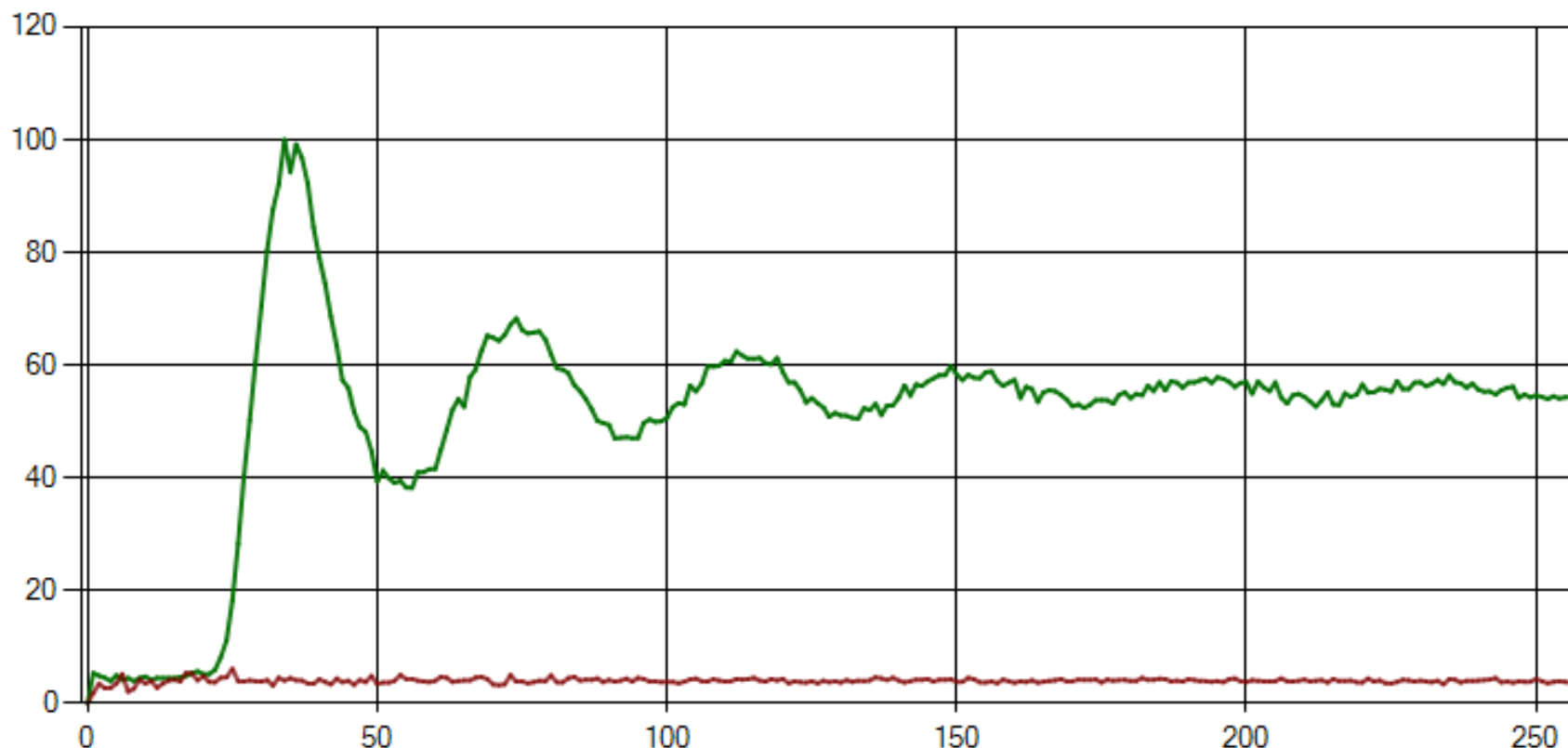


„Pěkné“ spektrum



- ◆ radiálně průměrované spektrum
- ◆ červený graf – **radiální rozptyl** (izotropie spektra)

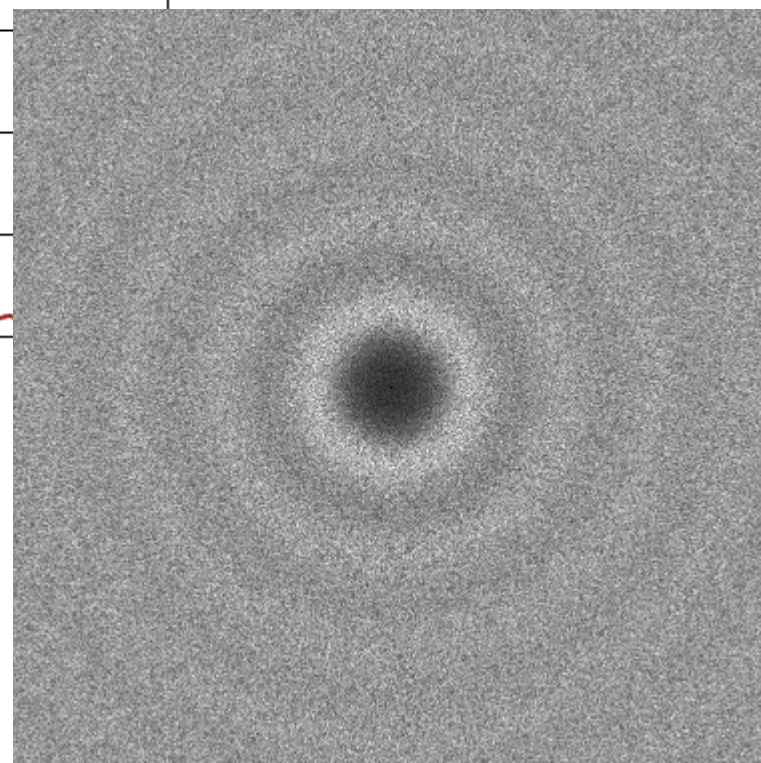
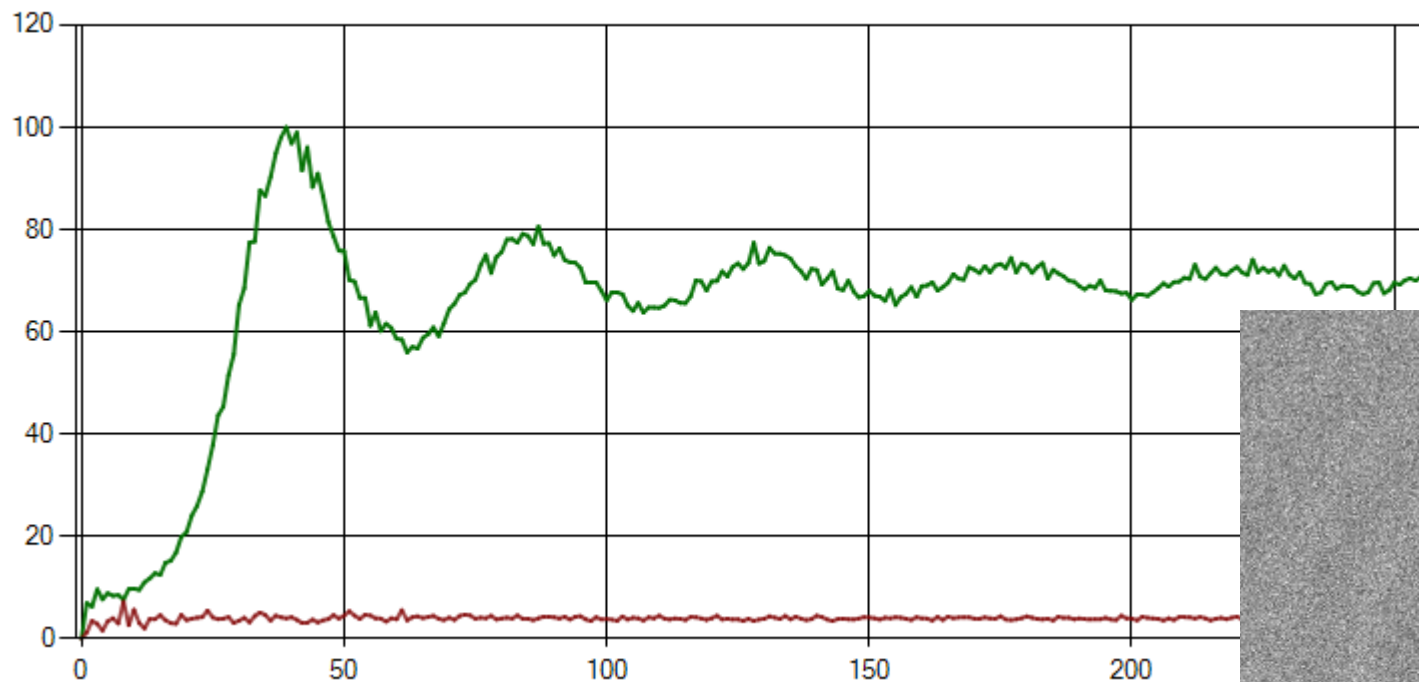
Radially averaged Fourier: Mitchell, inst=10, n=1024, res=256



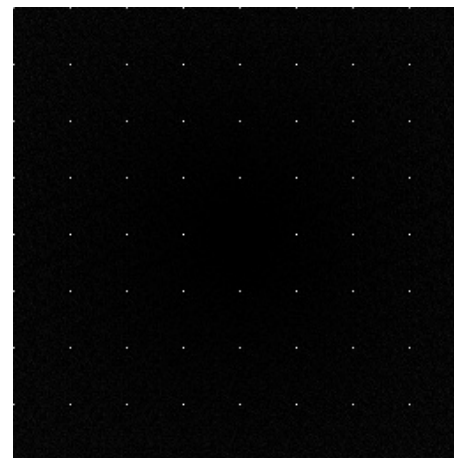
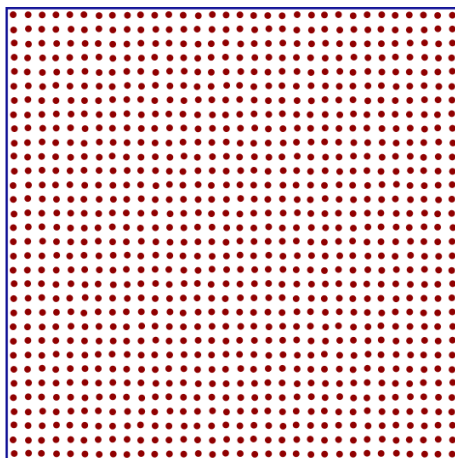


Jiné „pěkné“ spektrum

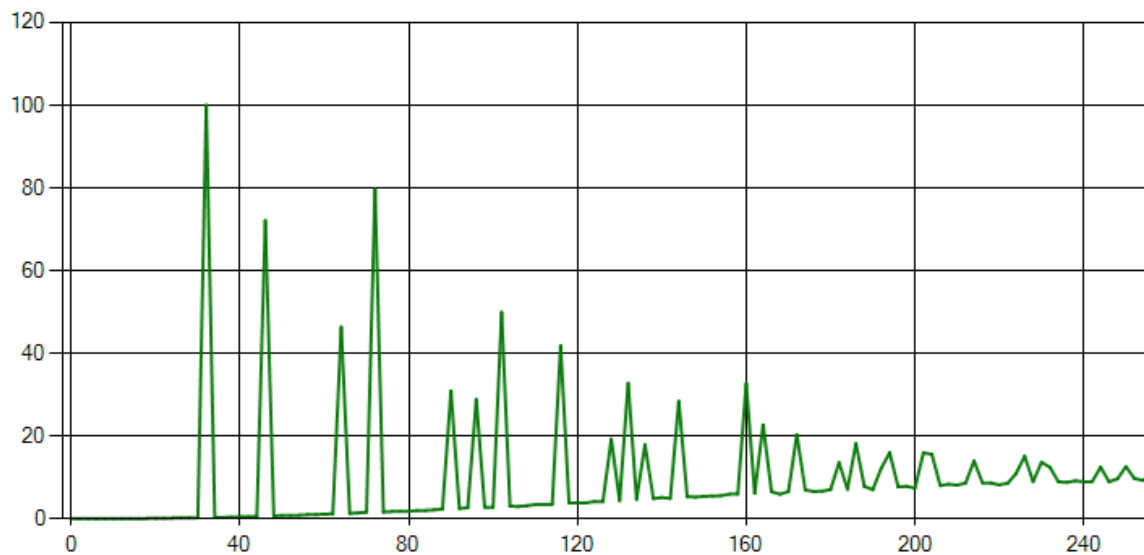
Radially averaged Fourier: Poisson-disk, inst=10, n=1024, res=256



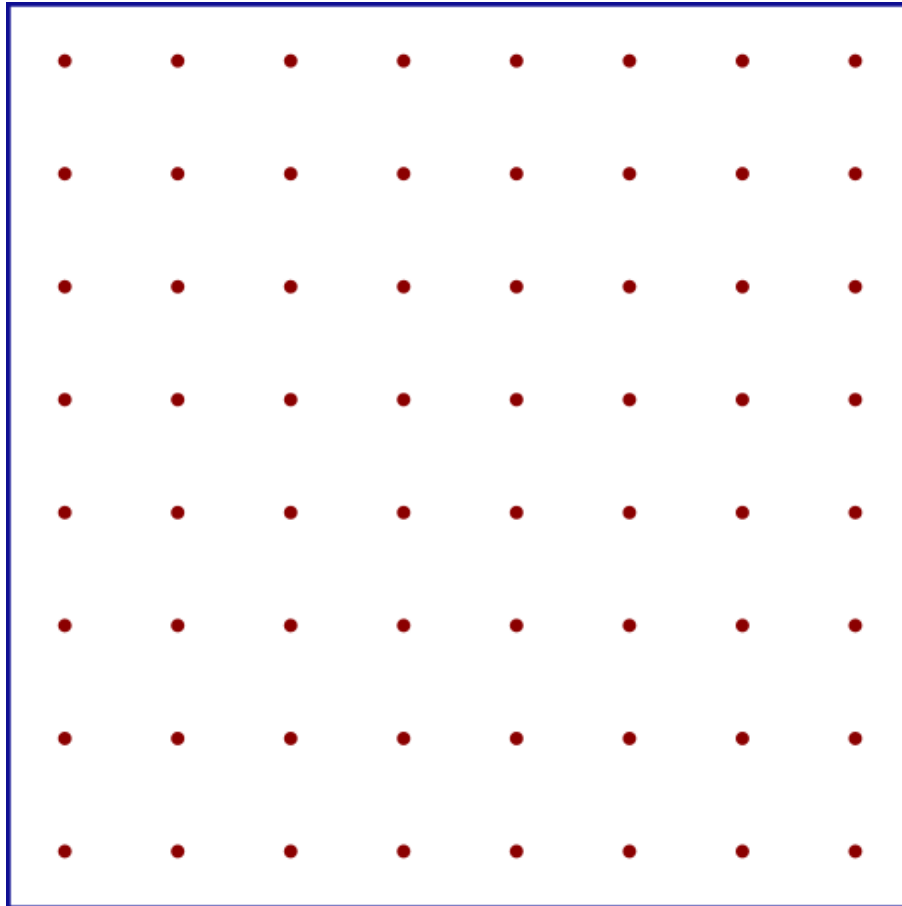
Příliš velká pravidelnost



Radially averaged Fourier: Semi-jittering, n=1024, res=256

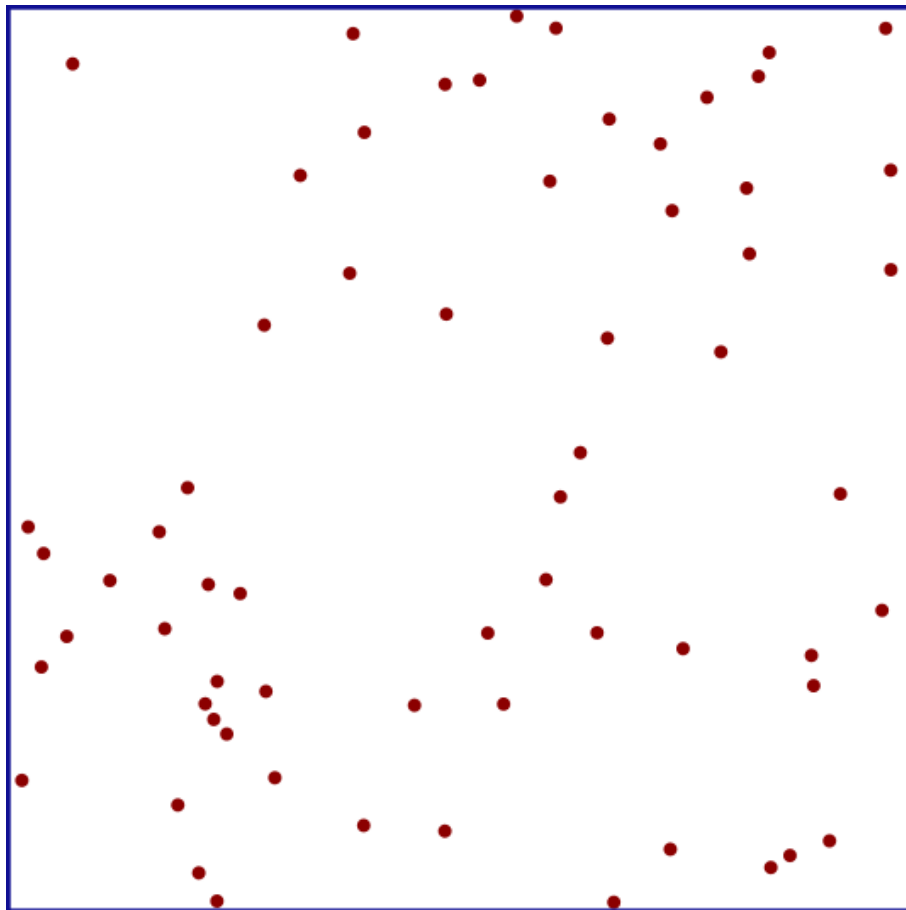


Pravidelný rastr



- + **diskrepance**
- + **jednoduchost**
- pravidelnost
- interference
- nepokrývá doménu

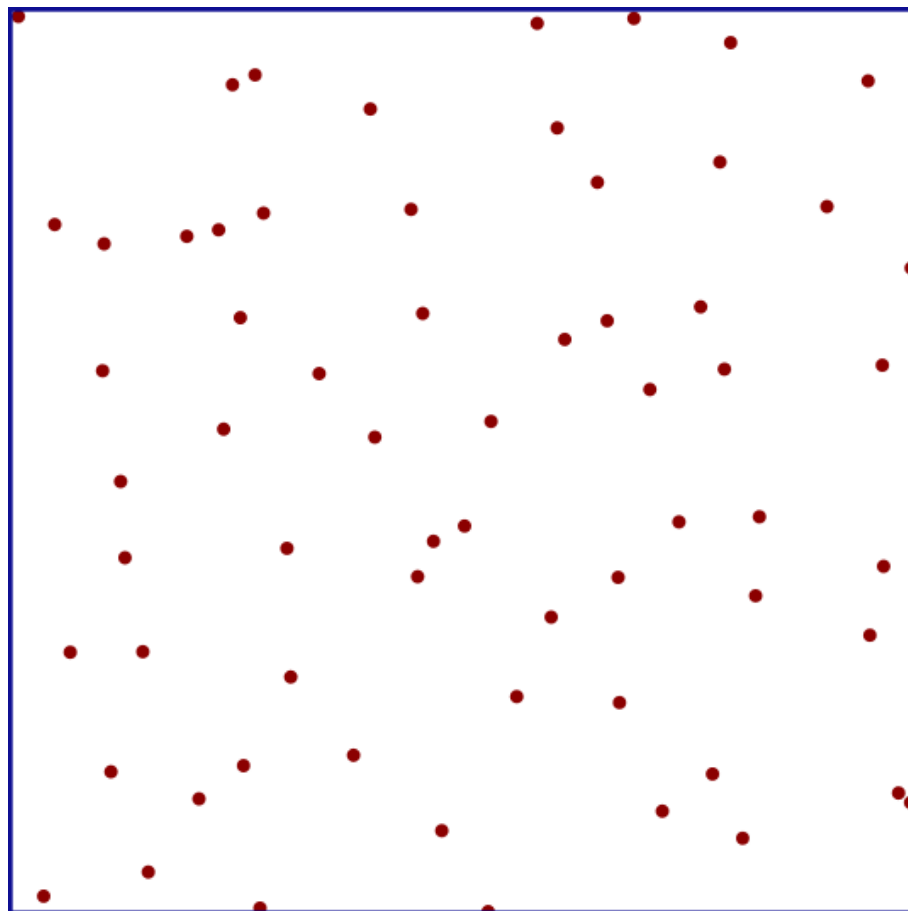
Náhodné vzorkování



- + **nepravidelnost**
- + **jednoduchost**
- + **lze řídit hustotou**
- + **pokrývá doménu**
- **diskrepance (shluky)**

Nezávislé realizace
vhodné náhodné veličiny

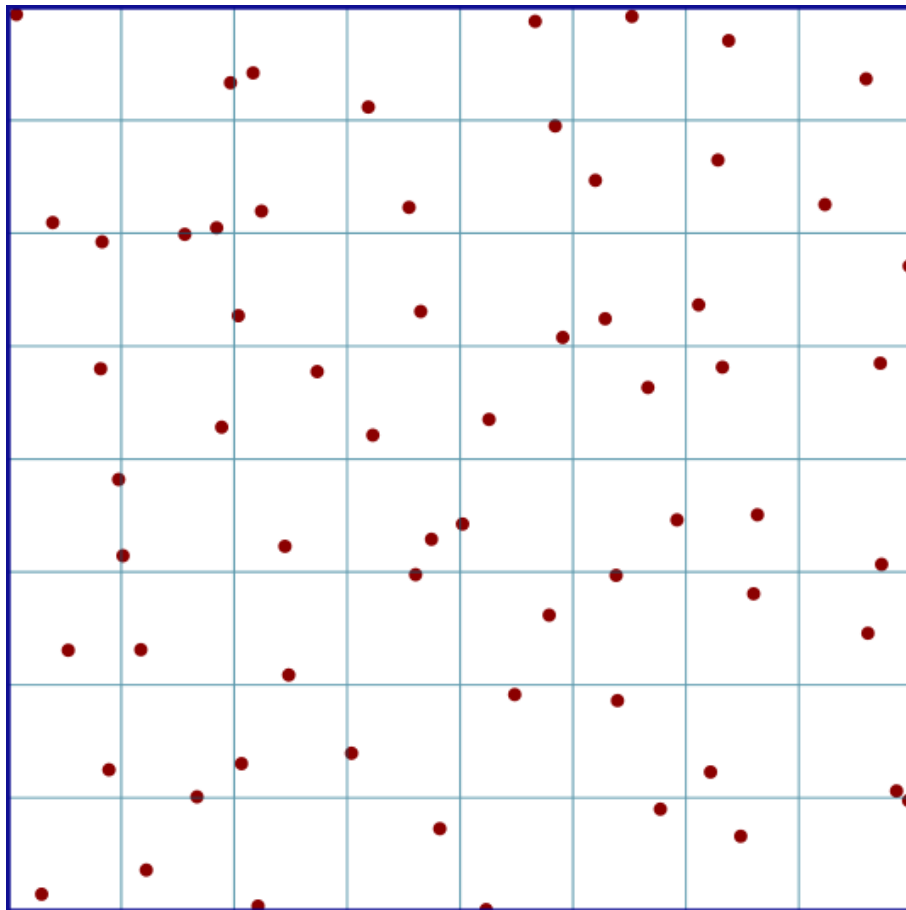
Jittering (roztřesení)



- + **nepravidelnost**
- + **jednoduchost**
- + **diskrepance**
- + **pokrývá doménu**
- nelze snadno řídit hustotou

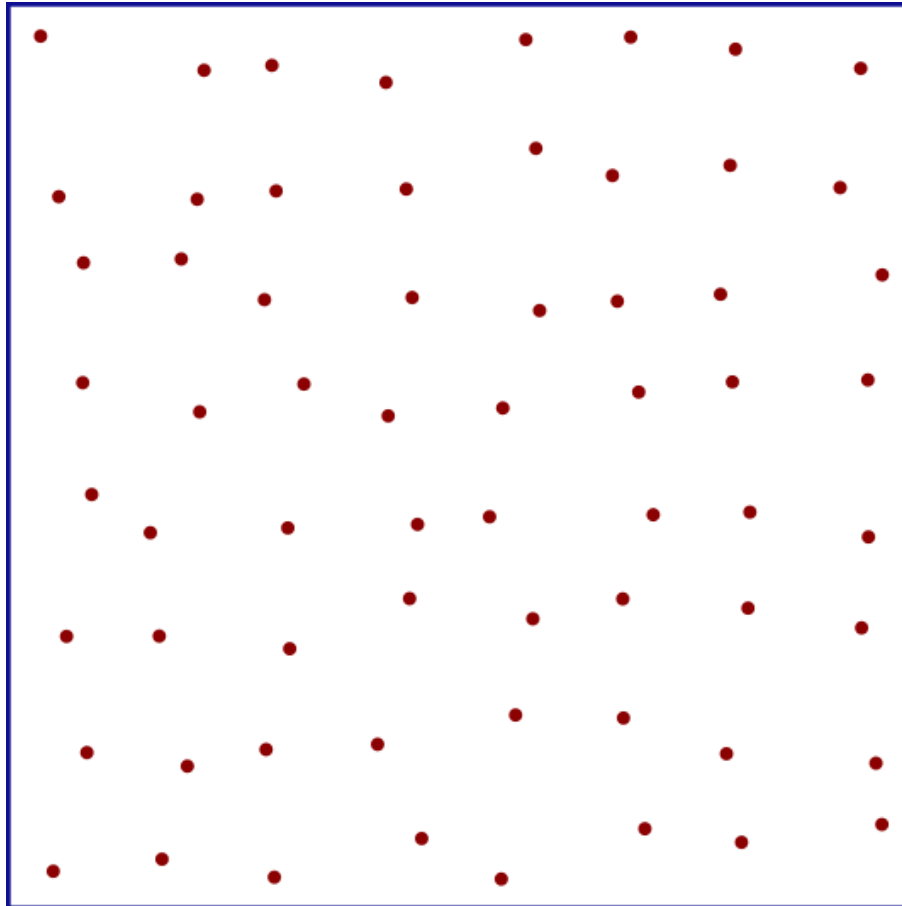
„Stratified sampling“
ve statistice..

Jittering (roztřesení)



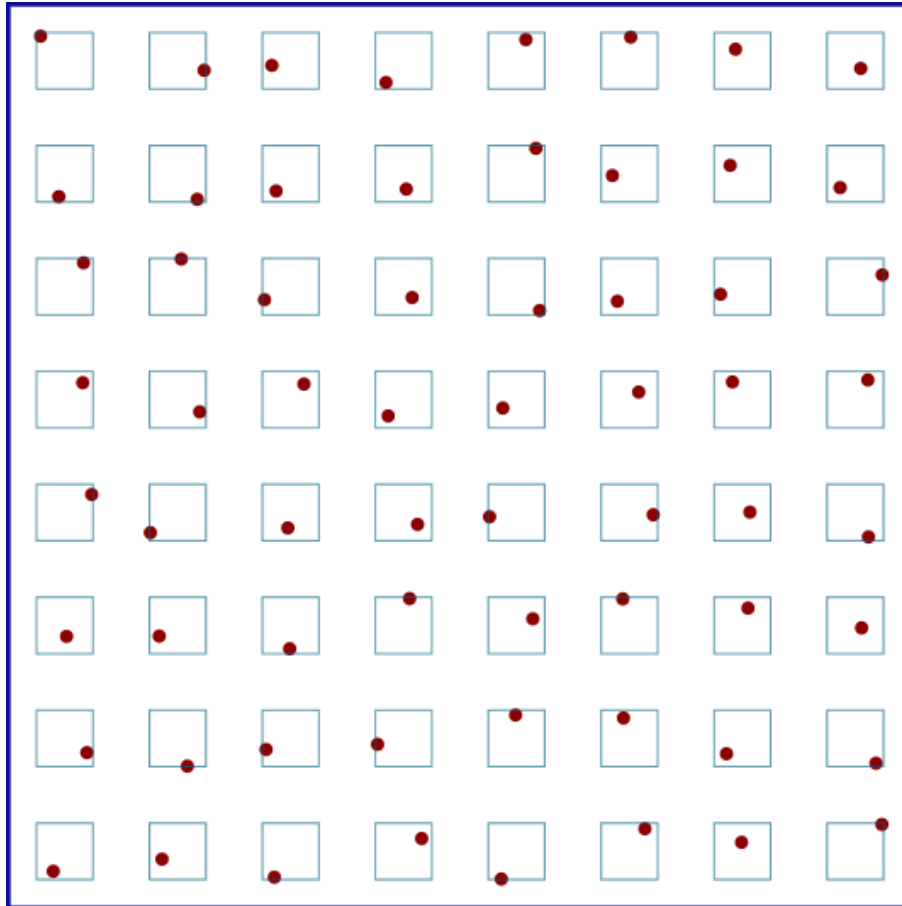
Subintervaly mohou být libovolné (stejný obsah)

Semi-jittering



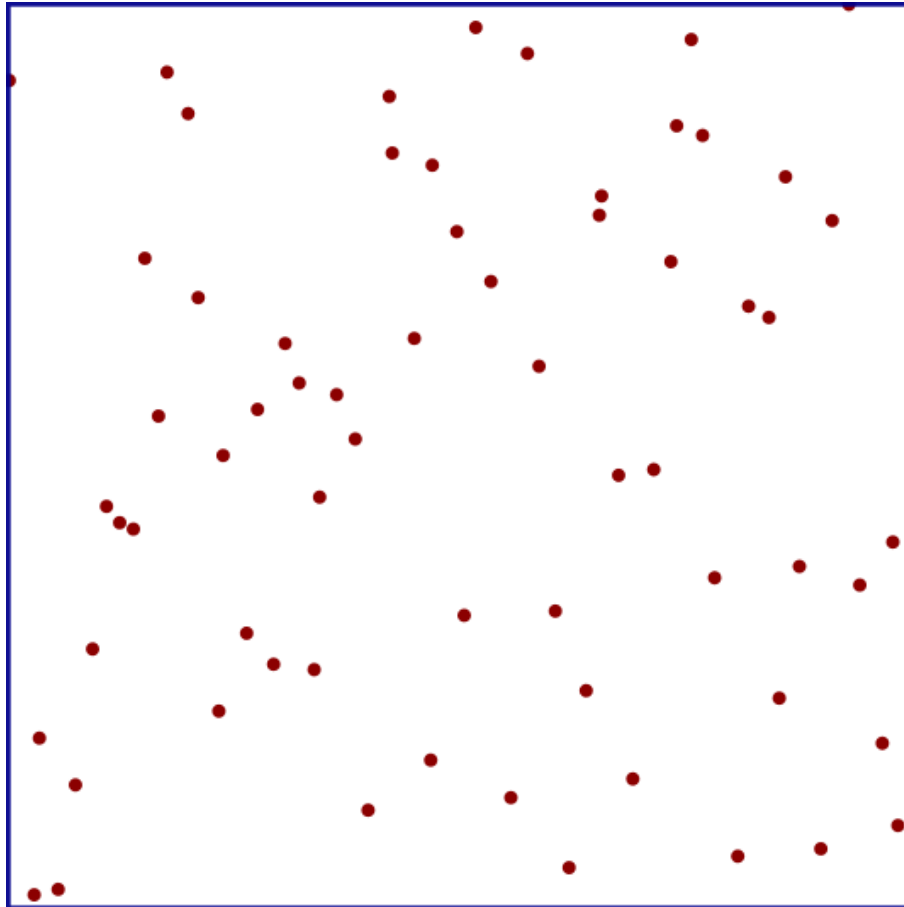
- + **jednoduchost**
- + **diskrepance**
- částečná pravidelnost
- nepokrývá doménu
- nelze snadno řídit hustotou

Semi-jittering



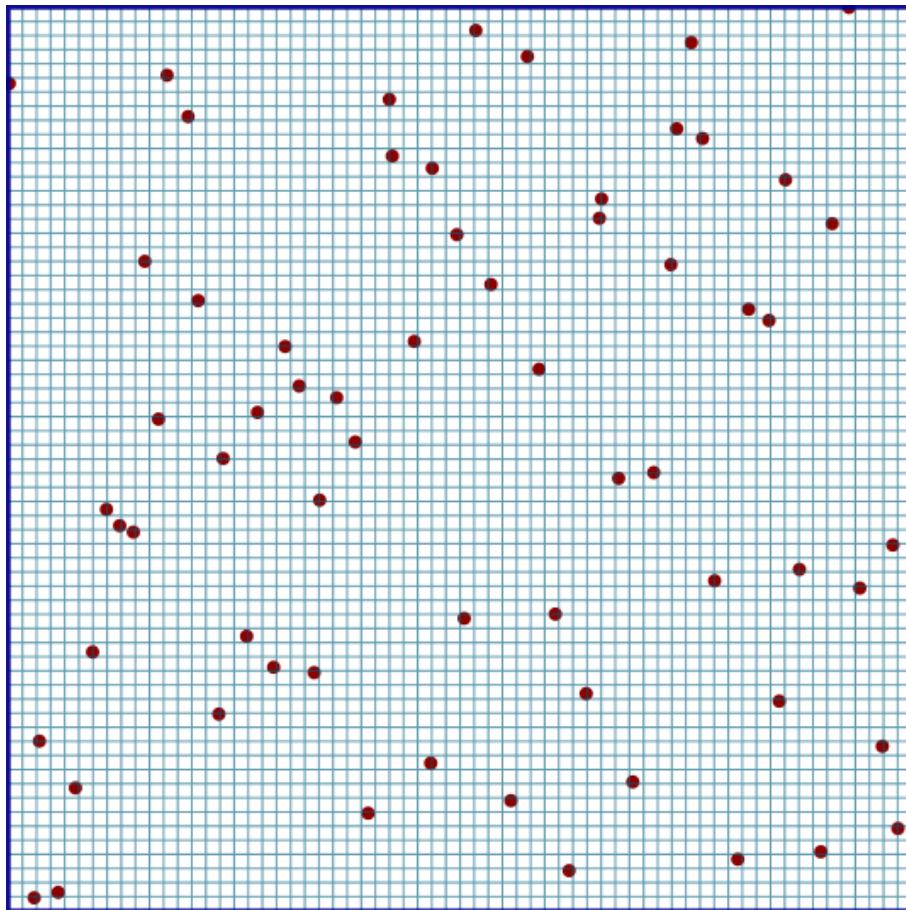
Amplitudy roztřesení
mohou být i jiné

N věží („N rooks“)



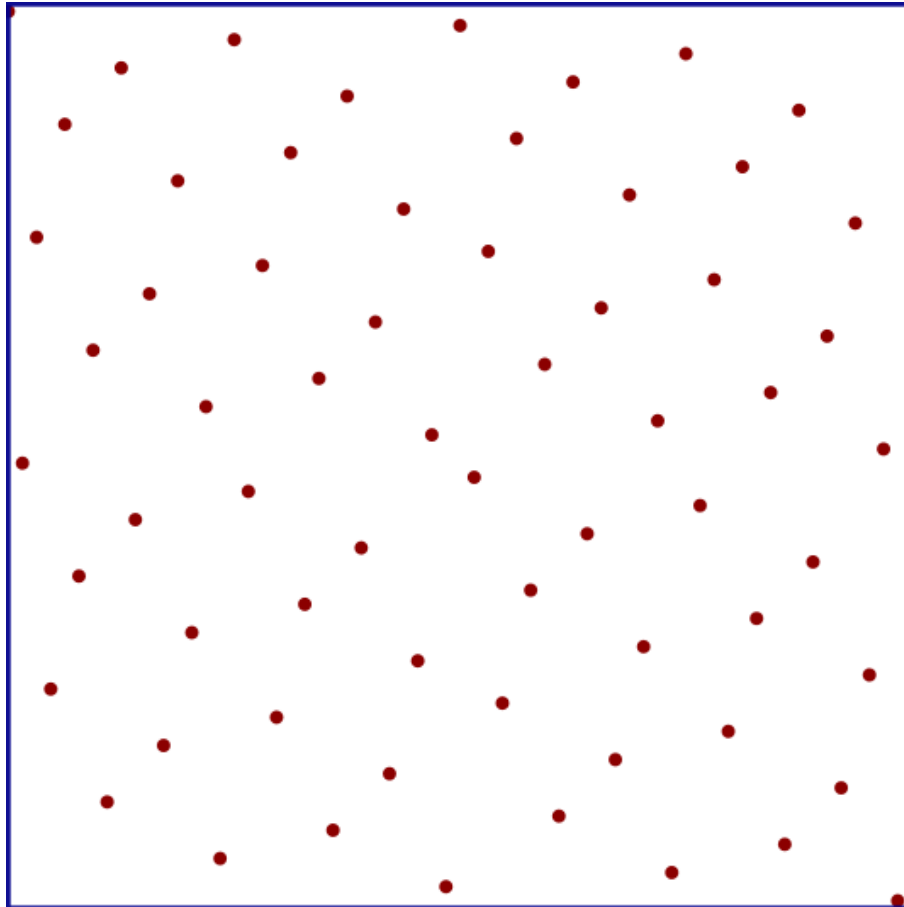
- + **nepravidelnost**
- + **pokrývá doménu**
- trochu horší diskrepance (shluky)

N věží („N rooks“)



V každém řádku i sloupci
právě jeden vzorek..

Hammersley



- + **výborná diskrepance**
- + **deterministické**
- + **velmi rychlý výpočet**
- nelze zahušťovat
- špatné spektrum

Na podobném principu je založena i Haltonova sekvence..



Deterministické sekvence

- na podobném principu jsou založeny:
 - Halton, Hammersley, Larcher-Pillichshammer
- pro prvočíslo b necht' je kladné přirozené číslo n vyjádřeno pomocí b -ární reprezentace:

$$n = \sum_{k=0}^{L-1} d_k(n) b^k$$

- pak je definováno číslo v intervalu $[0,1)$:

$$g_b(n) = \sum_{k=0}^{L-1} d_k(n) b^{-k-1}$$



Halton, Hammersley

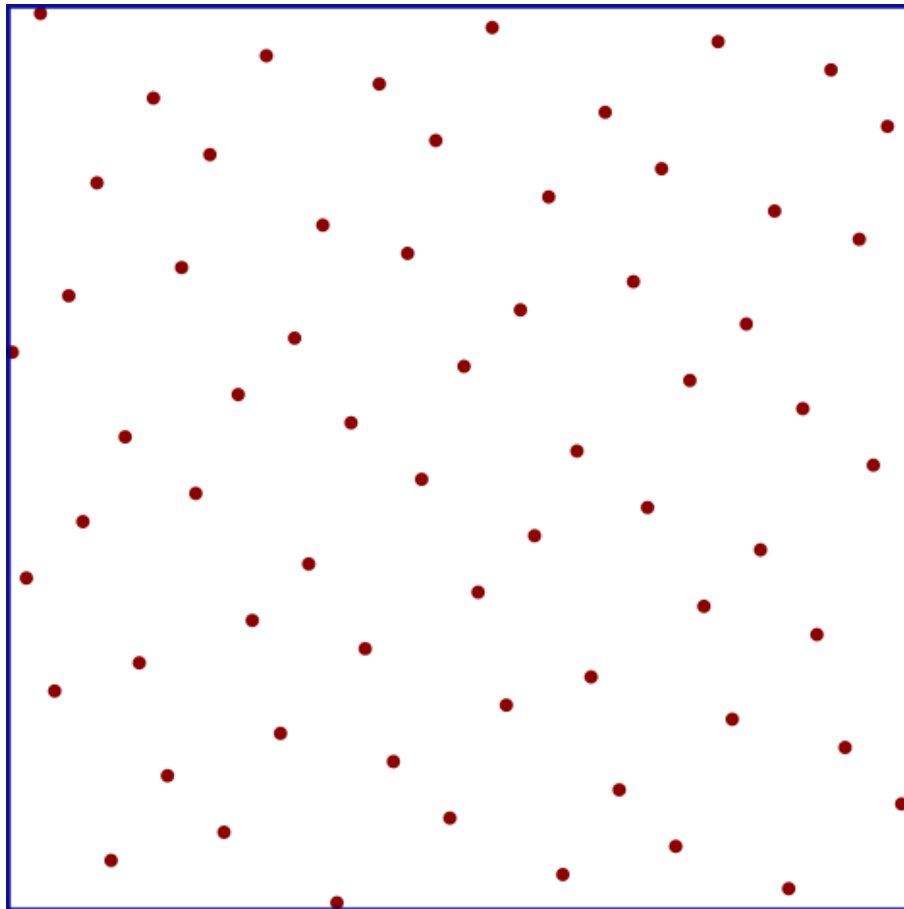
- ◆ slavná Haltonova sekvence (např. $b_1=2$, $b_2=3$):

$$x(n) = \left[g_{b_1}(n), g_{b_2}(n) \right]$$

- ◆ Hammersley sekvence (např. $b=2$):

$$x(n) = \left[\frac{n}{N}, g_b(n) \right]$$

Larcher–Pillichshammer



- + **výborná diskrepance**
- + **deterministické**
- + **velmi rychlý výpočet**
- + **lze randomizovat**
- nelze zahušťovat
- špatné spektrum



Larcher–Pillichshammer

- místo $d_k(n)$ se používá

$$lp_k(n) = \left(\sum_{i=k}^L d_i(n) \right) \bmod 2$$

- analogicky definujeme

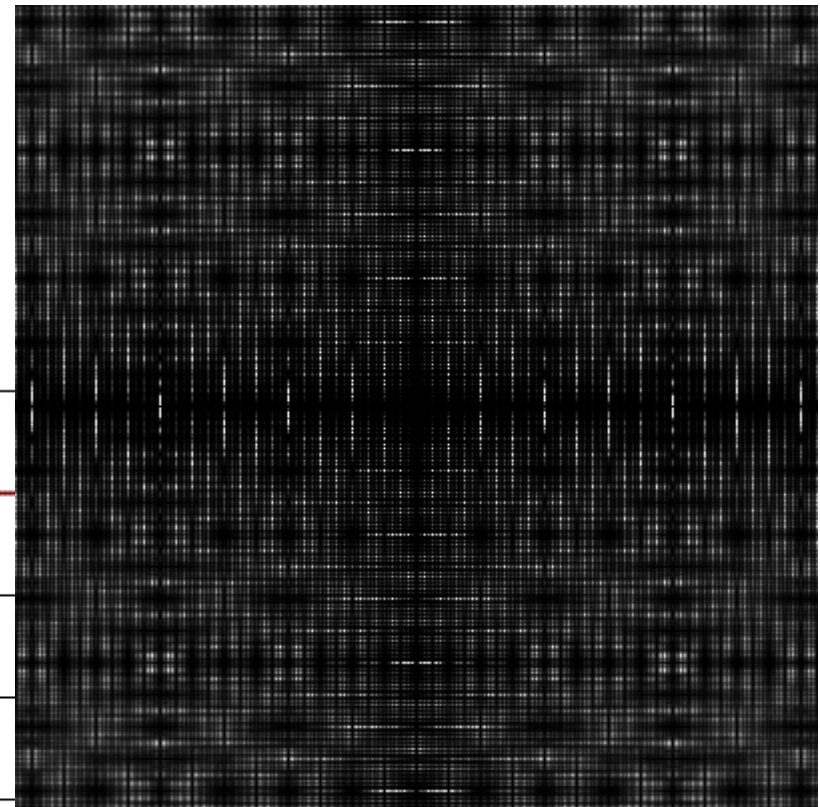
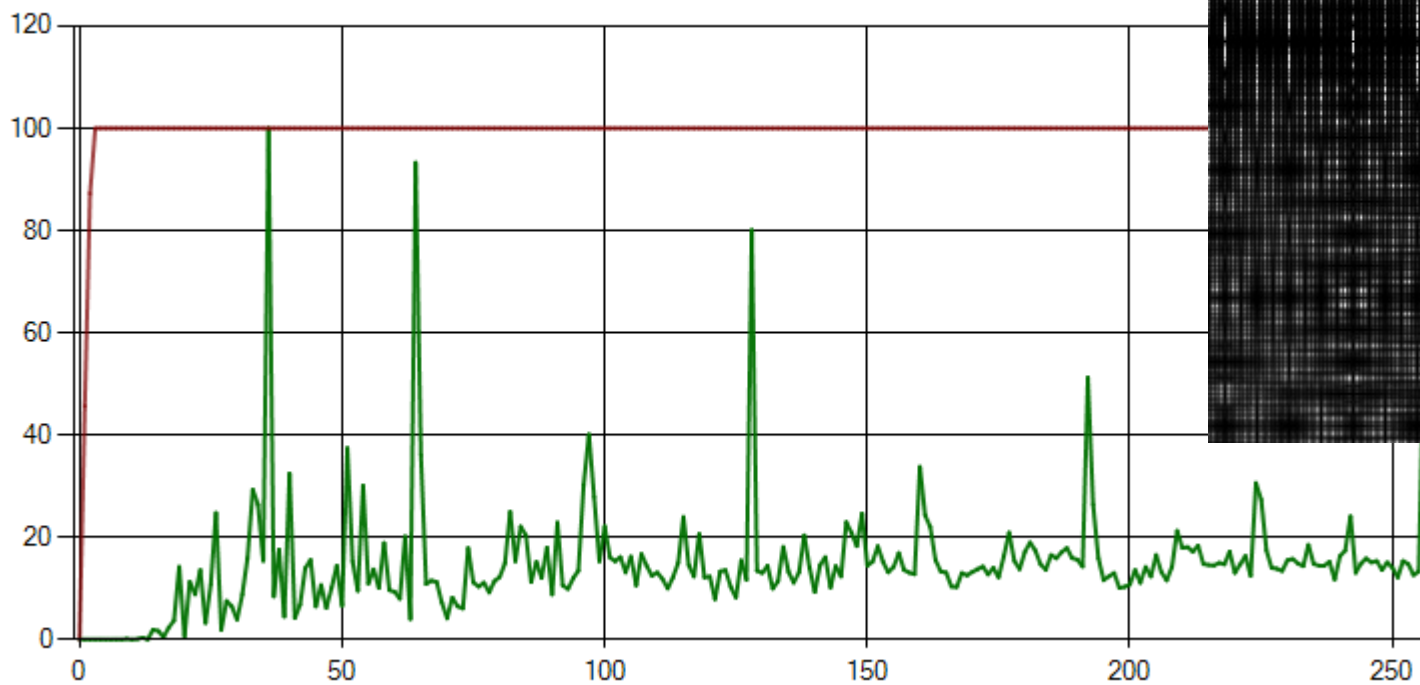
$$lp(n) = \sum_k lp_k(n) 2^{-k-1}$$

- .. a posloupnost vzorků $x(n) = \left[\frac{n}{N}, lp(n) \right]$

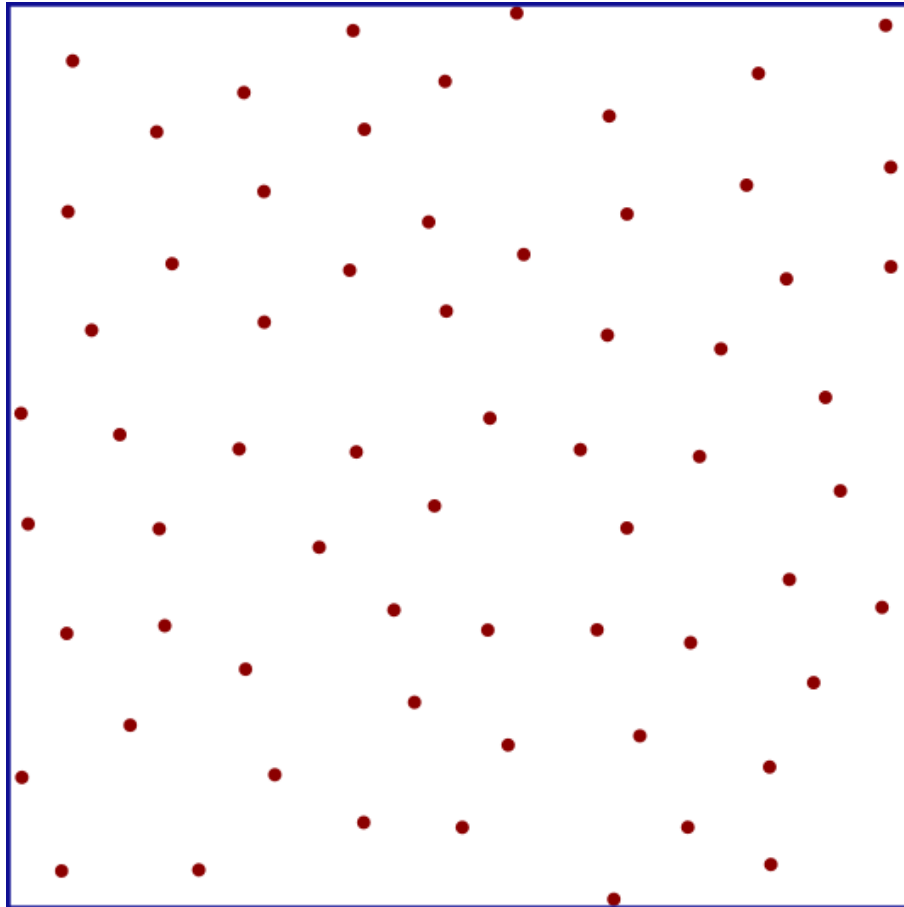
Pravidelnosti ve spektru



Radially averaged Fourier: Larcher-Pillichshammer, inst=10, n=1024, res=256



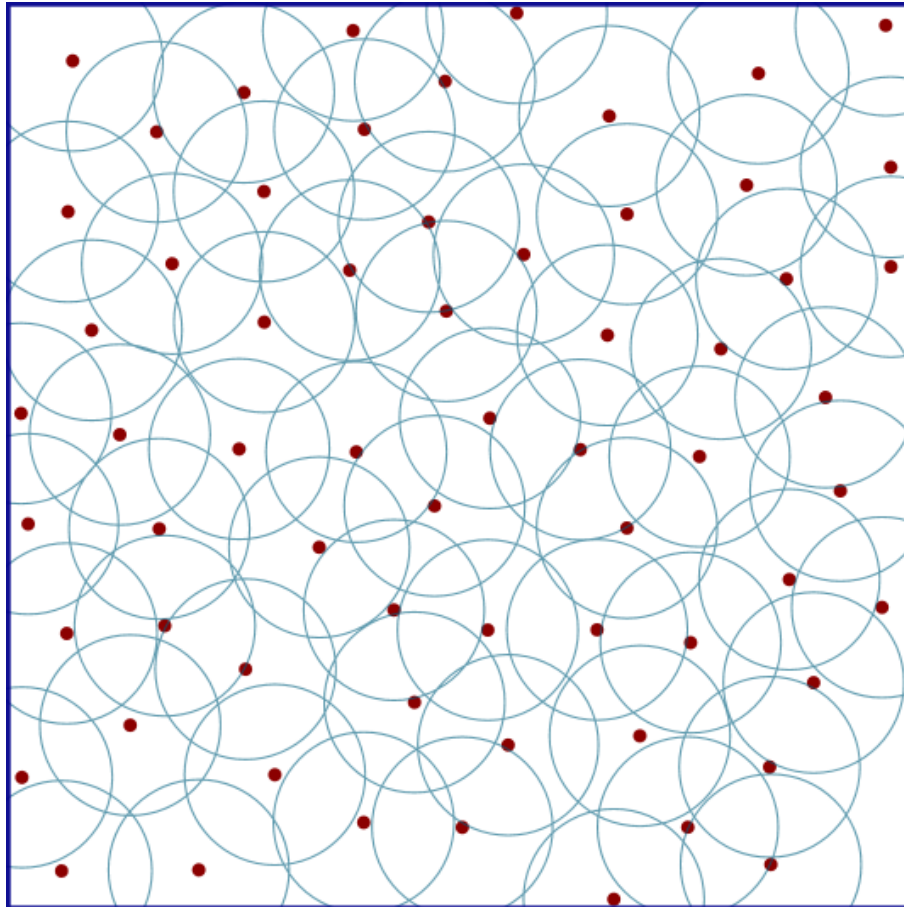
Poissonovo diskové vzorkování



- + **nepravidelnost**
- + **estetika**
- + **diskrepance**
- + **pokrývá doménu**
- + **lze řídit hustotou**
- pomalé
- obtížné nastavení D

Dva vzorky nesmějí být
blíže než D

Poissonovo diskové vzorkování

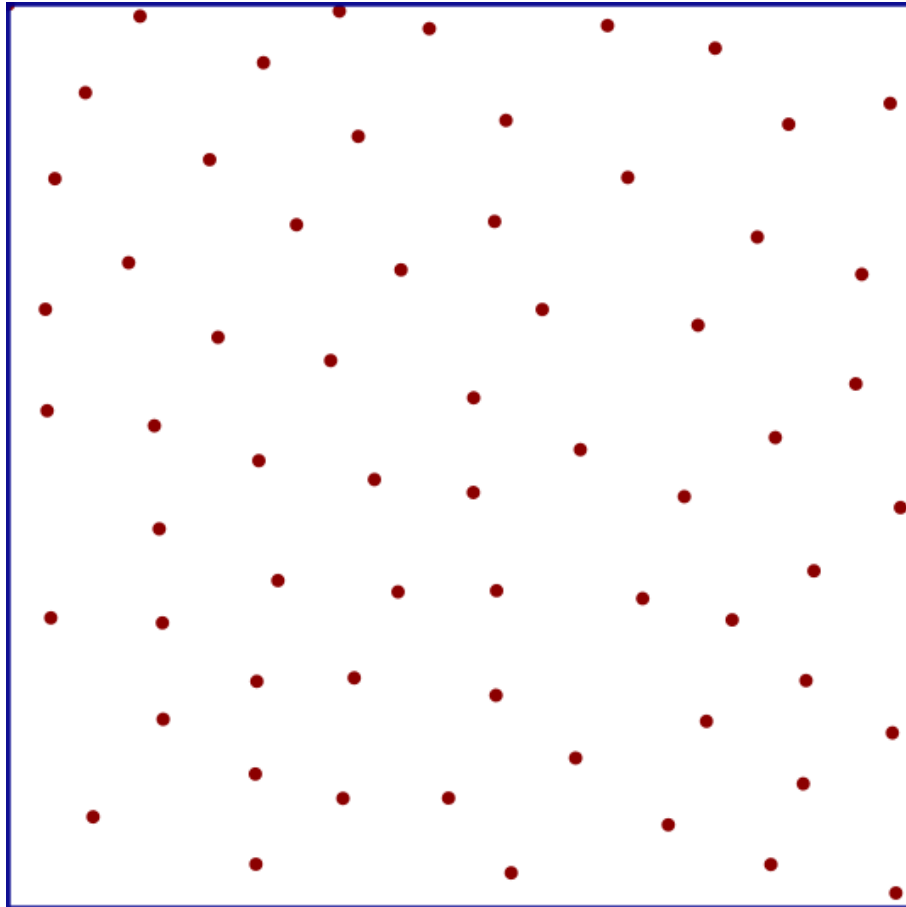


Algoritmus:

vrhání šipky s kontrolou vzdálenosti („dart-throwing with rejection“)

$$D = 0.1$$

Mitchellův algoritmus

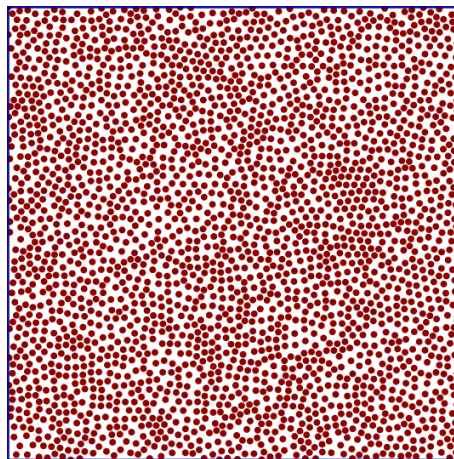
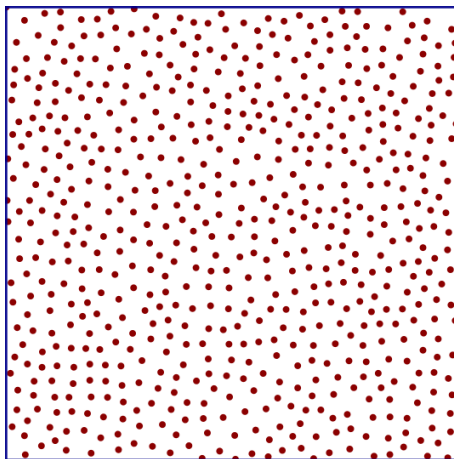
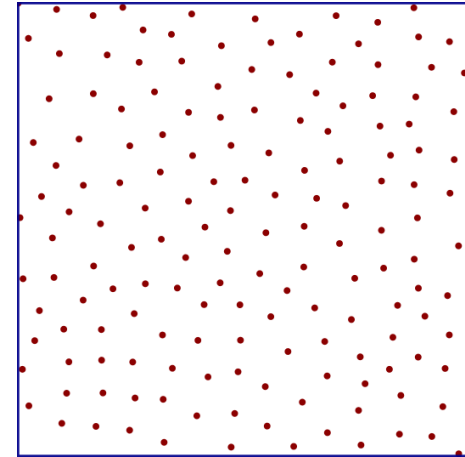
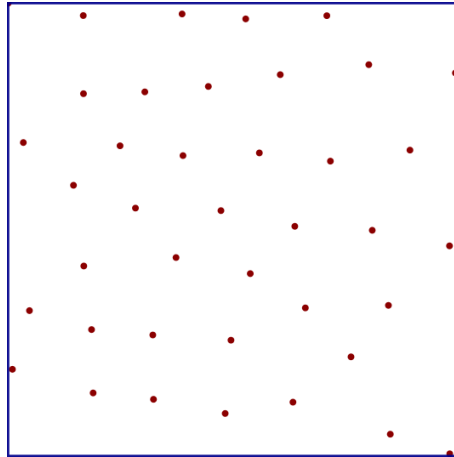
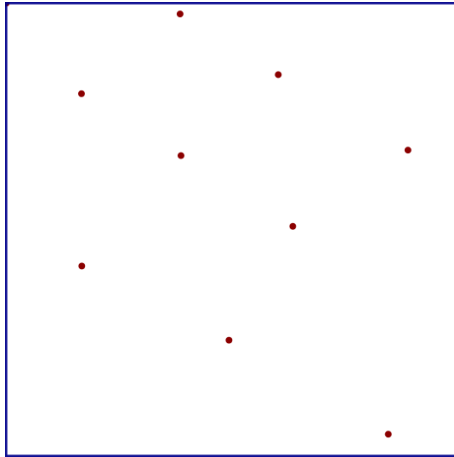


+ jako Poisson-disk
+ inkrementální
+ nepotřebuje D
- velmi pomalý!

Algoritmus:

N -tý vzorek vybírám
z NK kandidátů,
přijmu ten nejvzdálenější
 $K > 5$ (větší K .. kvalita)

Inkrementální ukázka

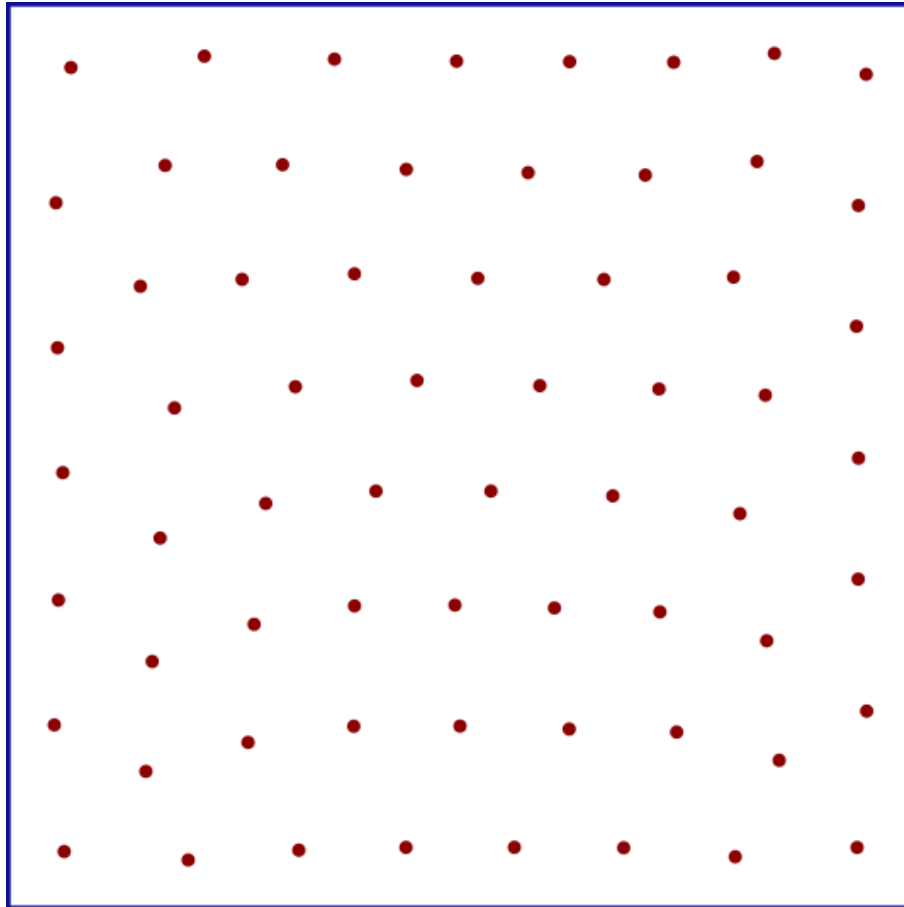


Počet vzorků:

10, 40, 160,
640, 2560

$K = 10$

Lloydův algoritmus

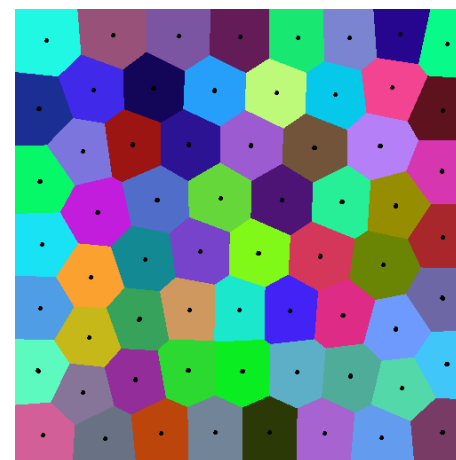
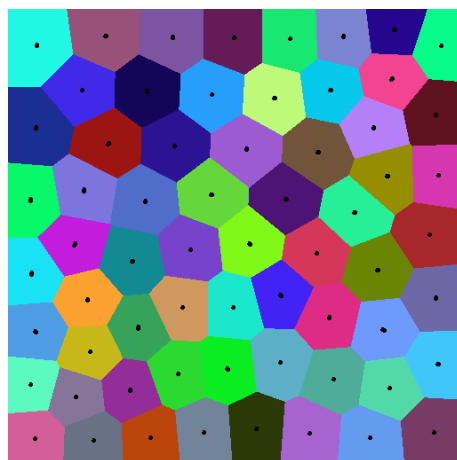
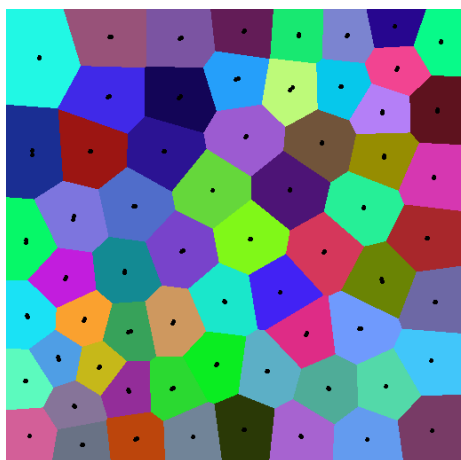
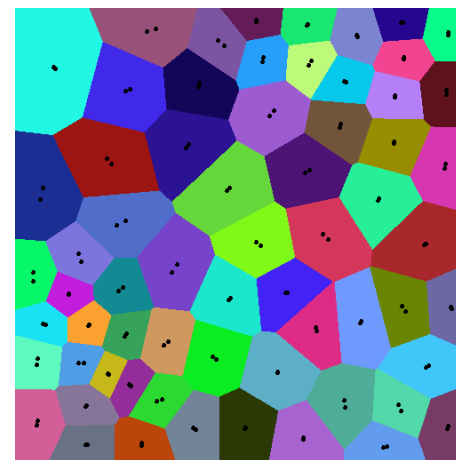
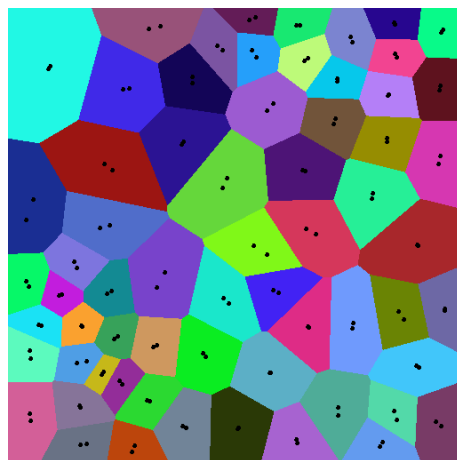
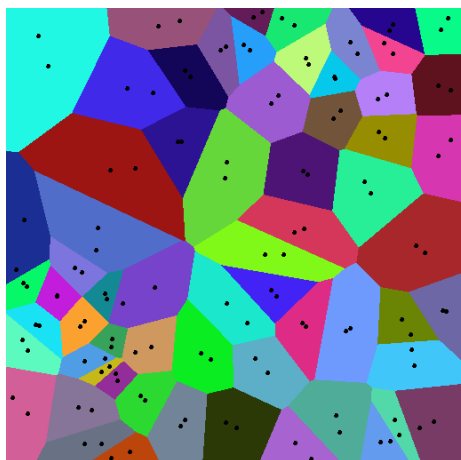


- + **diskrepance**
- + **modrý šum**
- + **výborně pokrývá**
- pomalý!
- pravidelnosti na konci konvergence!

Algoritmus:

generátor každé Voronoi buňky se posune do těžiště své buňky .. iterace

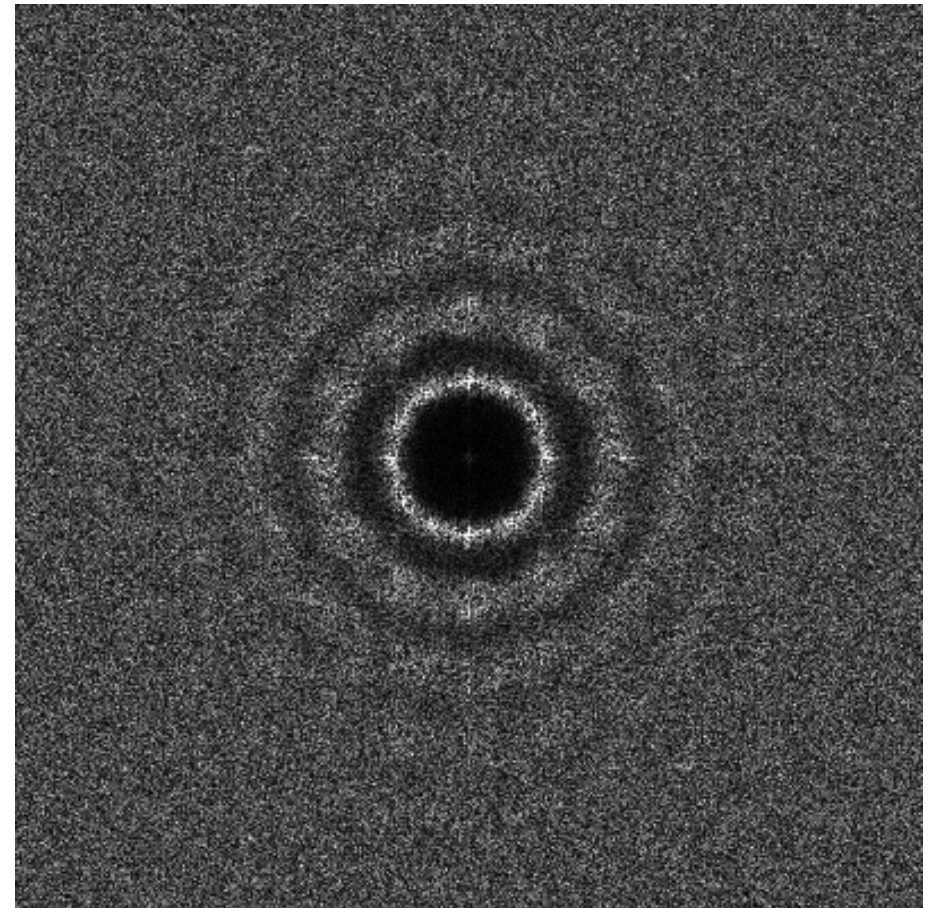
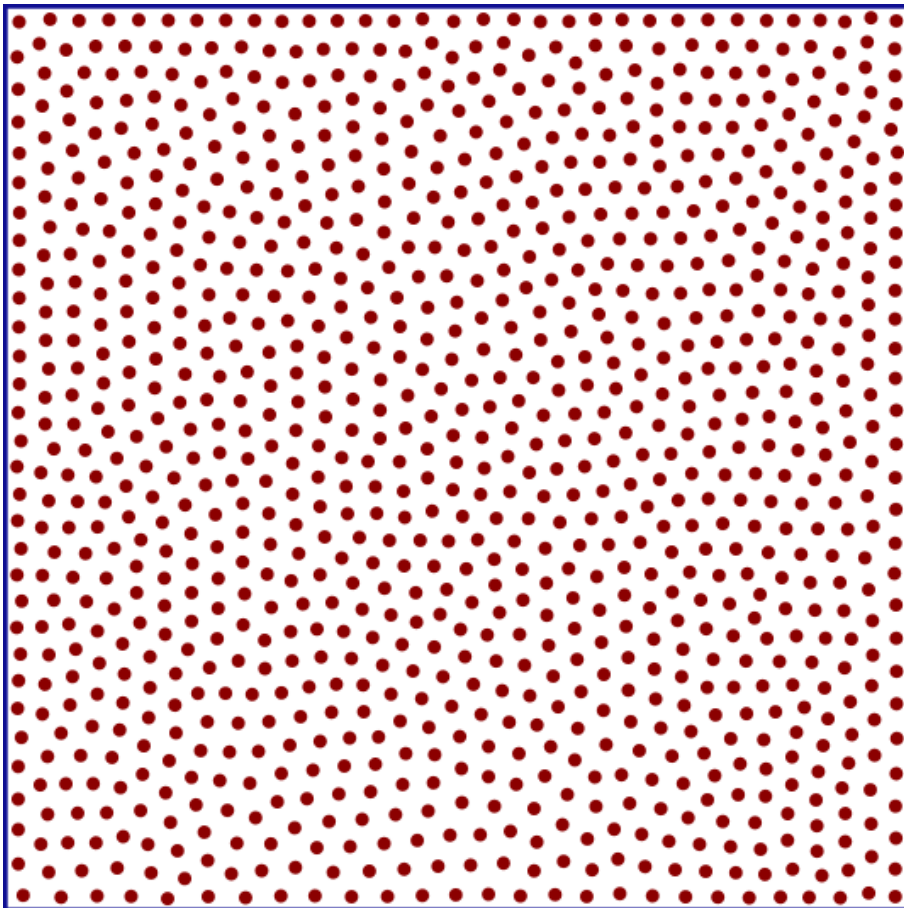
Lloyd - postup výpočtu



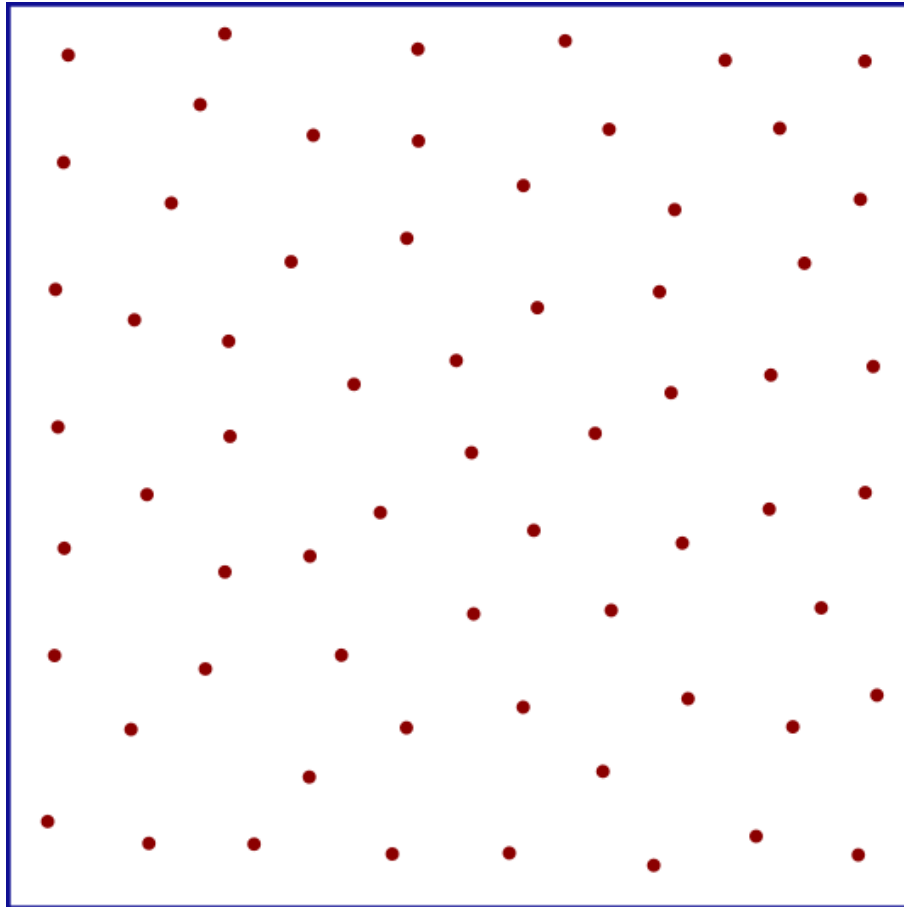
Pravidelnosti



Lloyd (Centroidal Voronoi), $N = 1024$, iterations = 100



Kapacitně omezené distribuce



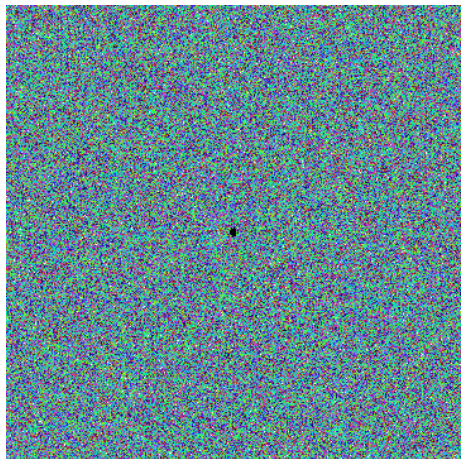
- + **diskrepance**
- + **modrý šum**
- + **výborně pokrývá**
- + **lze řídit distribucí**
- pomalý (ale je známo množství urychlení)

Vychází z Centr. Voronoi:
Aby nevznikaly pravidelnosti, zavádí se kapacitní omezení

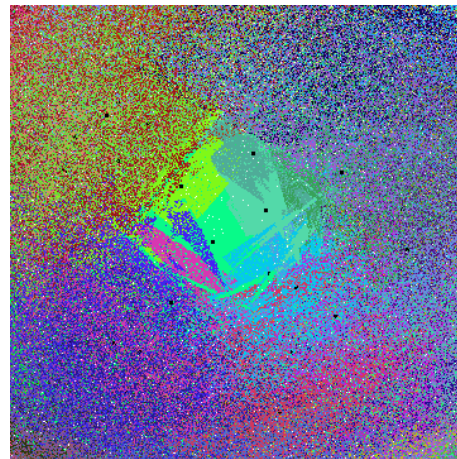
CCPD

```
function CCPD( $N, K, pdf$ )      ▷ počet vzorků,  $K$ , hustota pravděp.  
     $Point[] S \leftarrow new Point[N]$       ▷ sada vzorků  
     $List<Point>[] P \leftarrow new List<Point>[N]$       ▷ a jejich body  
    for  $i \leftarrow 1, N$  do      ▷ inicializace  
        for  $k \leftarrow 1, K$  do  
             $P[i].add(pdf())$       ▷ bod vygenerovaný podle hustoty  $pdf$   
        end for  
         $S[i] \leftarrow CENTROID(P[i])$       ▷ těžiště seznamu bodů  
    end for  
    repeat      ▷ jedna zlepšující generace  
         $changed \leftarrow false$   
        for all  $i, j \leftarrow 1, N$  do  
             $List<Point> T_i \leftarrow CLOSER(P[i], S[j], S[i])$   
             $List<Point> T_j \leftarrow CLOSER(P[j], S[i], S[j])$   
            if  $T_i \neq \emptyset \wedge T_j \neq \emptyset$  then  
                 $changed \leftarrow true$       ▷ body se budou vyměňovat  
                repeat      ▷ výměna nejméně výhodných bodů  
                     $P[i].remove(T_i[0]); P[j].add(T_i[0]); T_i.deleteAt(0)$   
                     $P[j].remove(T_j[0]); P[i].add(T_j[0]); T_j.deleteAt(0)$   
                until  $T_i = \emptyset \vee T_j = \emptyset$   
                 $S[i] \leftarrow CENTROID(P[i])$       ▷ přepočítám těžiště  
                 $S[j] \leftarrow CENTROID(P[j])$   
            end if  
        end for  
    until  $\neg changed$   
    return  $S$   
end function
```

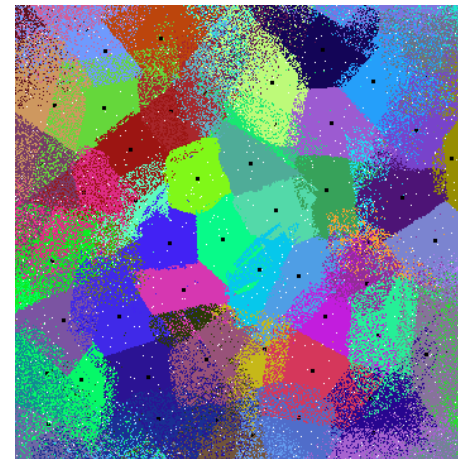
CCPD – postup výpočtu



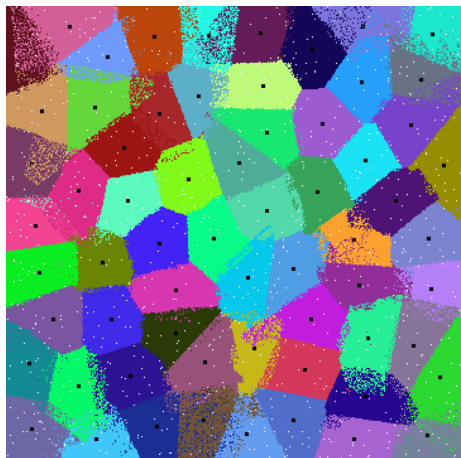
0



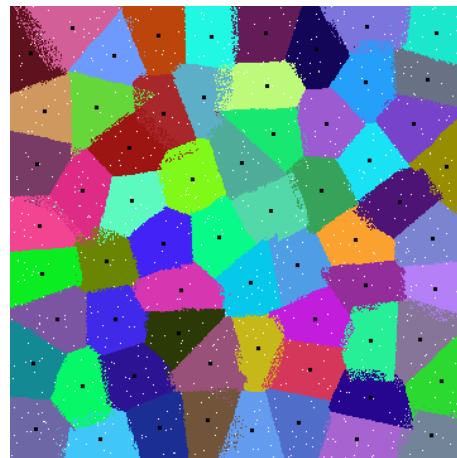
1



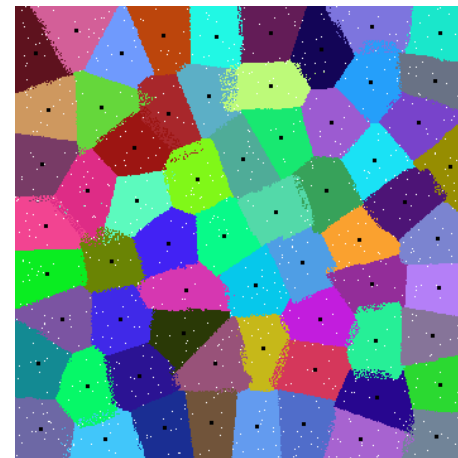
2



3



4



23

Porovnání metod – diskrepance



- ◆ průměrování přes 100 pokusů
 - ◆ 1024 vzorků v sadě, vhodné nastavení parametrů jednotlivých vzorkování (někdy i více variant)
 - ◆ Stroudova diskrepance (všechny obdélníky, RMS)
 - ◆ průměrná diskrepance ($\cdot 10^{-3}$) a std. odchylka ($\cdot 10^{-6}$)
- Lloydův algoritmus
 - ◆ pro dobrý výsledek se musí zastavit před koncem konvergence (empiricky: generace 40)
 - ◆ pro porovnání i výsledek z pokročilejšího stadia konvergence – cca Centroidal Voronoi (generace 400)

Porovnání metod – diskrepance



metoda	diskrepance	SD
Pravidelné	7.468	0.0
Hammersley *	0.811	0.0
Larcher-Pillichshammer *	0.811	0.0
Náhodné	8.941	2.5
Jittering	2.593	0.0
Semi-jittering	4.159	0.0
N věží	5.220	0.5
Poissonův disk	3.255	0.2
Mitchell	3.183	0.2
Lloyd (g=40)	6.400	2.5
Lloyd (g=400)	5.661	1.8
CCPD	2.154	0.0



Literatura

- ◆ P. Shirley: ***Discrepancy as a Quality Measure for Sample Distributions***, Eurographics 1991
- ◆ J. Matoušek: ***Geometric Discrepancy – An Illustrated Guide***, Springer, 2000
- ◆ A. Lagae, P. Dutré: ***A Comparison of Methods for Generating Poisson Disk Distribution***, CGF 08
- ◆ M. Balzer, T. Schlömer, O. Deussen: ***Capacity-Constrained Point Distributions: A Variant of Lloyd's Method***, SIGGRAPH 2009
- ◆ D. P. Mitchell: ***Spectrally optimal sampling for distribution ray tracing***, SIGGRAPH 1991
- ◆ R. Ulichney: ***Digital Halftoning***, MIT Press, 1987