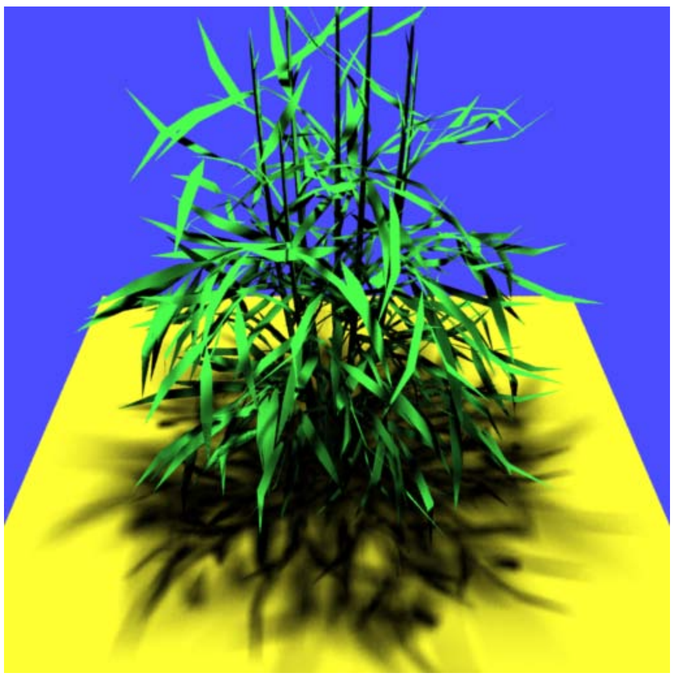
Počítačová grafika III – Monte Carlo integrování

Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

Rendering = Integrování funkcí

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{H(\mathbf{x})} L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) \cdot \cos\theta_i \, \mathrm{d}\omega_i$$



- Problémy
  - Nespojitost integradu (viditelnost)
  - Téměř libovolné hodnoty integrandu (distribuce světla, BRDF)
  - Složitá geometrie

Historie Monte Carlo (MC)

- Vývoj atomové bomby, Los Alamos 1940, John von Neumann, Stanislav Ulam, Metropolis
- Rozvoj a aplikace metod od roku 1949

Metoda Monte Carlo

- Simuluje se mnoho případů daného děje, například:
  - Neurony – vznik, zánik, srážky s atomy vodíku
  - Úlohy hromadné obsluhy – chování počítačových sítí, dopravní situace
  - Sociologické a ekonomické modely – demografie, vývoj inflace, pojišťovnictví atd.

Num. integrování – Kvadraturní vzorce

- Obecný předpis v 1D:

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

f	integrand (tj. integrovaná funkce)
n	řád kvadratury (tj. počet vzorků integrandu)
x_i	uzlové body (tj. umístění vzorků v oboru integrálu)
$f(x_i)$	vzorky integrandu
w_i	váhy

Num. integrování – Kvadraturní vzorce

- Kvadraturní pravidla se liší volbou uzlových bodů x_i a váhami w_i
  - Obdélníková metoda, Rovnoběžníková metoda, Simpsonova metoda, Gaussovská kvadratura, …
- Vzorky na integračním oboru (tj. uzlové body) jsou rozmístěny deterministicky
  - Jednoznačně určeny kvadraturním pravidlem

Kvadraturní vzorce pro více dimenzí

- Obecný předpis pro více dimenzí:

$$\hat{I} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_s=1}^{n} w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_s} f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s})$$

- Rychlost konvergence pro *s*-dimenzionální integrál je $O(N^{-1/s})$
  - Např. pro dvojnásobné zpřesnění odhadu 3-rozměrného integrálu musíme zvýšit počet vzorků $2^3 = 8$ krát

- Nepoužitelné pro vysokodimenzionální integrály
  - **Dimenzionální exploze**

Kvadraturní vzorce pro více dimenzí

- **Kvadraturní vzorce**
  - V 1D lepší přesnost než Monte Carlo
  - Ve 2D srovnatelné s MC
  - Od 3D bude MC téměř vždy lepší
- Kvadraturní metody NEJSOU metody Monte Carlo!

Monte Carlo integrování

- Vzorky jsou rozmístěny náhodně (nebo pseudonáhodně)
- Konvergence: O($N^{-1/2}$)
  - **Konvergence nezávisí na dimenzionalitě**
  - Rychlejší než klasické kvadraturní vzorce pro 3 a více dimenzí
- Speciální metody pro rozmístění vzorků
  - Quasi-Monte Carlo, Randomized quasi-Monte Carlo
  - Ještě rychlejší konvergence než MC

Monte Carlo integrování – shrnutí

- **Výhody**
  - Jednoduchá implementace
  - Robustní řešení pro různé tvary domén a integrandů
  - Efektivní pro vícerozměrné integrály
- **Nevýhody**
  - Relativně pomalá konvergence – zmenšení statistické chyby o polovinu vyžaduje zvětšit počet vzorků čtyřikrát
  - Pro syntézu obrazu: obrázek obsahuje šum

Náhodné veličiny

Náhodná veličina

- X … náhodná hodnota
- X nabývá různých hodnot s různou pravděpodobností
  - $X \sim p(\mathrm{x})$
  - Rozložení pravděpodobnosti

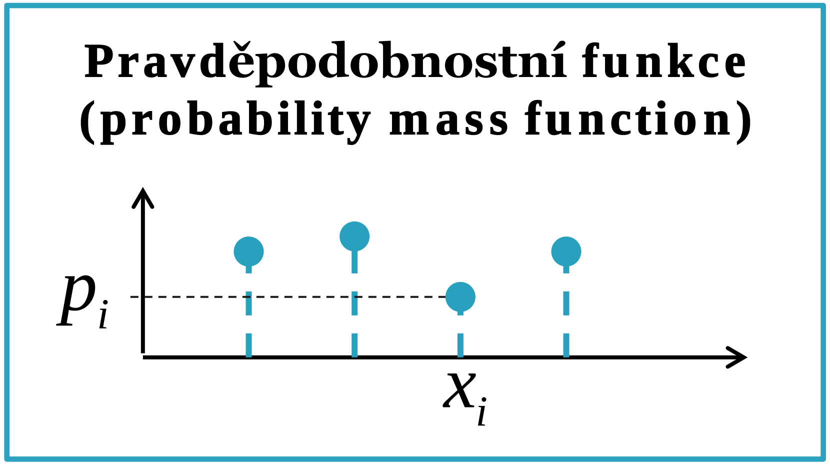
Diskrétní náhodná veličina

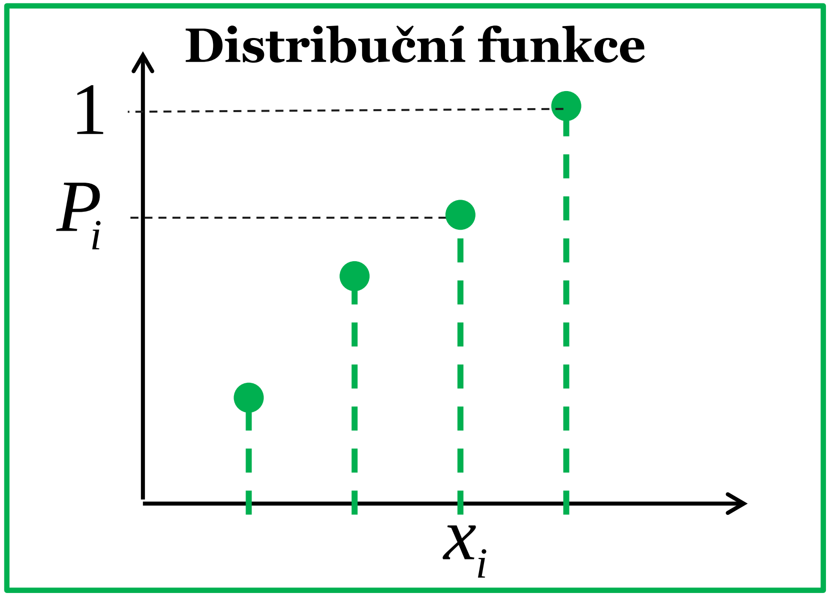
- Konečná množina hodnot x_i
- S pravděpodobností p_i

$$p_i \equiv \Pr(X = x_i) \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

- **Distribuční funkce** (cummulative distribution function)

$$P_i \equiv \Pr\left(X \leq x_i\right) = \sum_{j=1}^{i} p_j \qquad P_n = 1$$





Spojitá náhodná veličina

- **Hustota pravděpodobnosti** $p(x)$ (probability density function, **pdf**)

$$\boxed{\Pr(X \in D) = \int_D p(x)\,\mathrm{d}x}$$

- V 1d:

$$\Pr(a < X \le b) = \int_a^b p(t)\,\mathrm{d}t$$

Spojitá náhodná veličina

- **Distribuční funkce** $P(x)$
(cummulative distribution function, **cdf**)
V 1d:

$$P(x) \equiv \Pr\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t$$

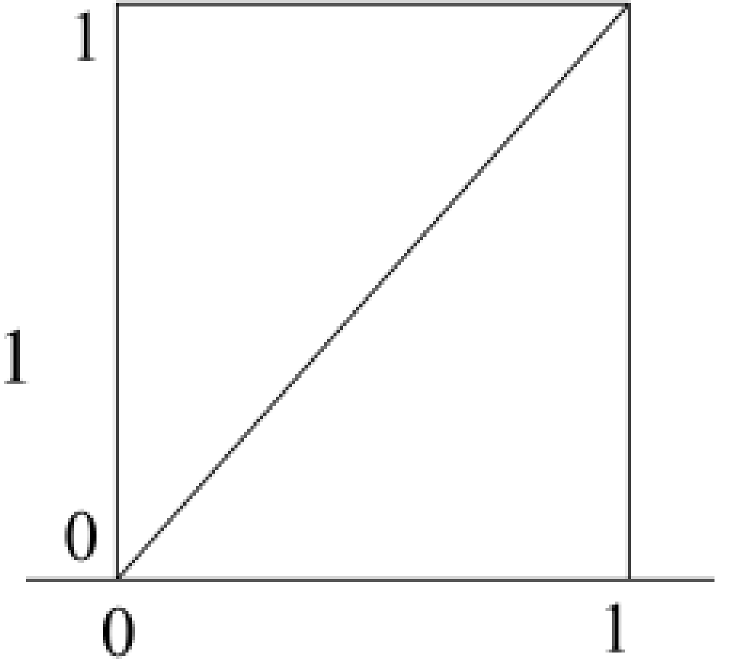
$$\boxed{\Pr\left(X = a\right) = \int_{a}^{a} p(t)\,\mathrm{d}t = 0\,!}$$

Spojitá náhodná veličina

Rovnoměrné rozdělení (uniform distribution)

Hustota pravděpodobnosti **(pdf)**

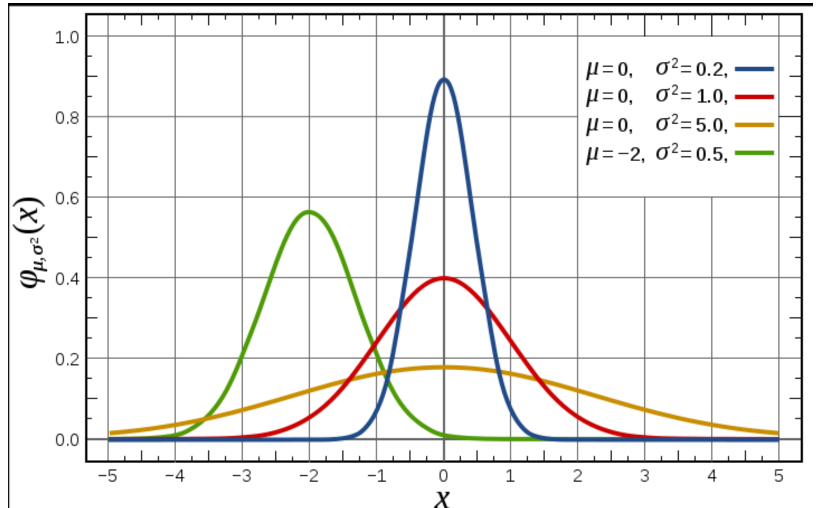
Distribuční funkce **(cdf)**



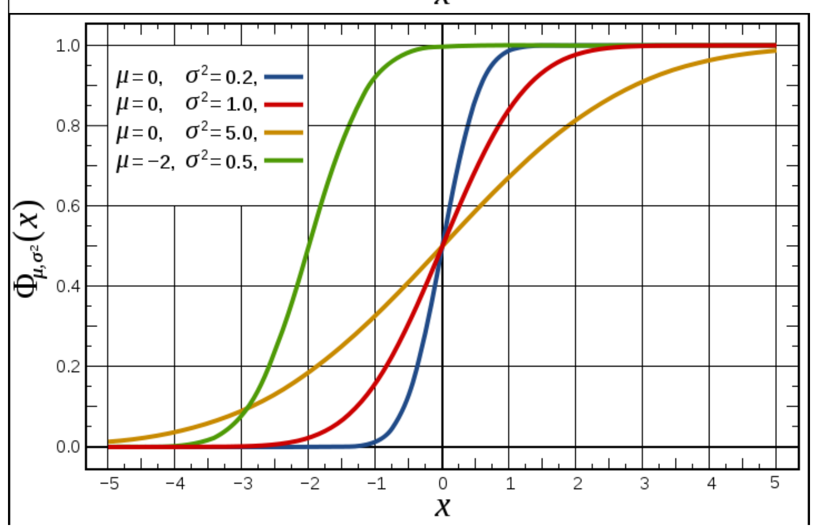
Spojitá náhodná veličina

Gaussovské (normální) rozdělení

Hustota pravděpodobnosti **(pdf)**



Distribuční funkce **(cdf)**



Zdroj: wikipedia

Stř. hodnota a rozptyl

- **Stř. Hodnota** (očekávaná hodnota, expected value)

$$E[X] = \int_D \mathbf{x}\, p(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

- **Rozptyl** (variance)

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

  - Vlastnosti

$$V[\sum_i X_i] = \sum_i V[X_i]$$ (pokud jsou X_i nezávislé)

$$V[aX] = a^2 V[X]$$

Transformace náhodné veličiny

$$Y = f\left(X\right)$$

- Y je náhodná veličina
- Stř. hodnota Y

$$E\left[Y\right] = \int_D f(\mathbf{x})\; p(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Monte Carlo integrování

Primární estimátor urč. integrálu

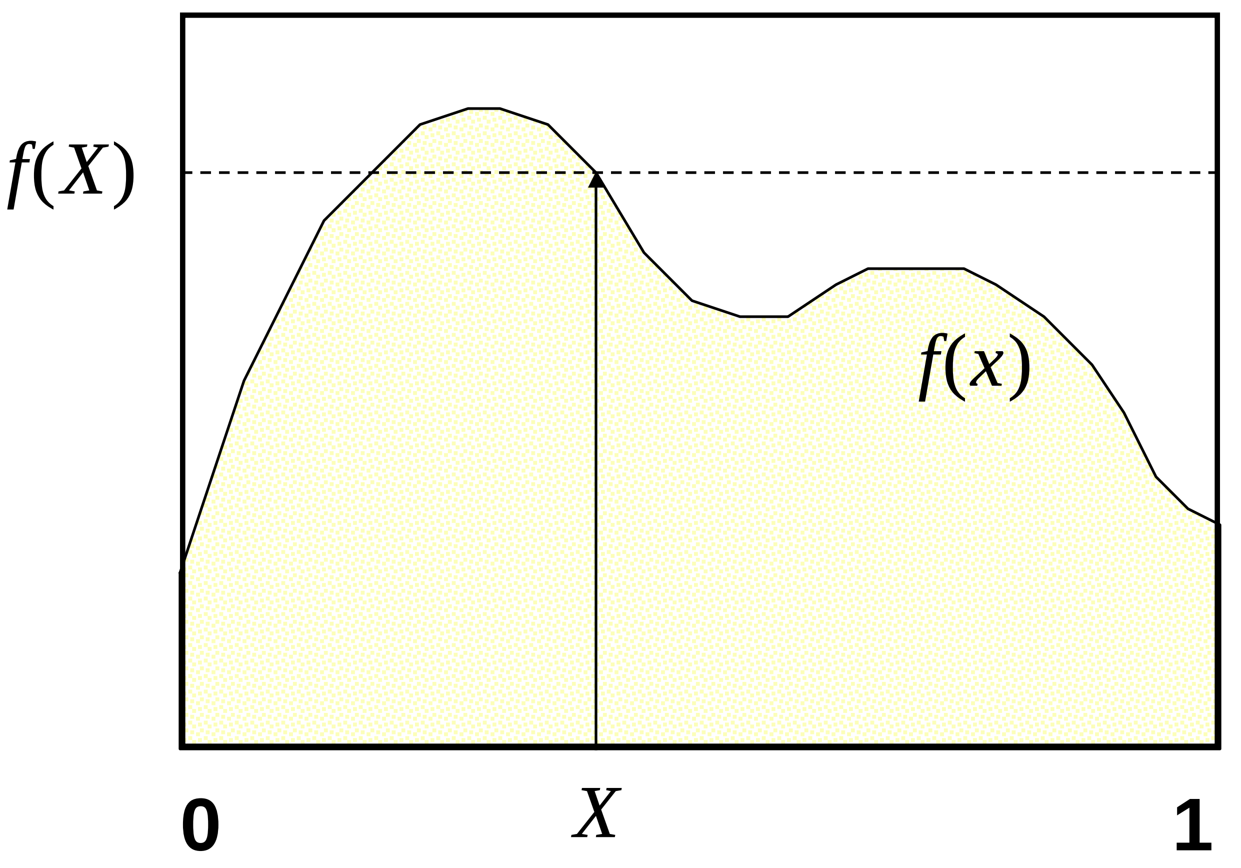
Odhadovaný integrál:

$$\boxed{I = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Je-li X náhodná veličina s distribucí $p(x)$, pak $Y = f(X)/p(X)$ je tzv. **primární estimátor** integrálu:

$$\boxed{F_{\mathrm{prim}} = Y = \frac{f(X)}{p(X)}}$$

Primární estimátor urč. integrálu



Estimátor

- **Estimátor** je **náhodná veličina**
  - Vznikla transformací jiné náhodné veličiny
- Její **realizace** (hodnota) je konkrétní **odhad** (**estimate**)

Nestrannost obecného estimátoru

- **Nestrannost estimátoru** (obecně):
  - V průměru estimátor dává správnou veličinu (bez systematické chyby)

$$\boxed{E[F] = Q}$$

Estimátor veličiny Q
(náhodná veličina)

Odhadovaná veličina
(např. integrál)

Nestrannost

Náš estimátor F_{prim} je nestranným (**unbiased**) odhadem I

$$
\begin{aligned}
E\left[F_{\text{prim}}\right] &= E[Y] \\
&= \int_{\Omega} \frac{f(x)}{p(x)}\, p(x)\, \mathrm{d}x \\
&= I
\end{aligned}
$$

Rozptyl estimátoru F_{prim}

Měřítkem kvality odhadu je jeho **rozptyl** (nebo standardní odchylka):

$$\underline{V\left[F_{\mathrm{prim}}\right]=\sigma_{\mathrm{prim}}^{2}} = E[Y^2]-E[Y]^2 = \underline{\int_{\Omega}\frac{f(x)^2}{p(x)}\,\mathrm{d}x - I^2}$$

(pro nestranný odhad)

Při výpočtu **jediného vzorku** je rozptyl výsledku příliš velký!

Sekundární estimátor integrálu

- ***N*** nezávislých náhodných veličin, $Y_i = f(X_i) \,/\, p(X_i)$

$$
\begin{aligned}
F_N &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{f(X_i)}{p(X_i)}
\end{aligned}
$$

- Sekundární estimátor je **nestranný**

Rozptyl sekundárního estimátoru

$$
\begin{aligned}
V[F_N] &= V\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i\right] \\
&= \frac{1}{N^2} \cdot N \cdot V[Y_i] \\
&= \frac{1}{N} V[Y_i] \\
&= \frac{1}{N} V[F_{\mathrm{prim}}]
\end{aligned}
$$

... std. chyba je **√*N*-krát menší**!
(konvergence **1/√*N***)

Vzorkování podle důležitosti

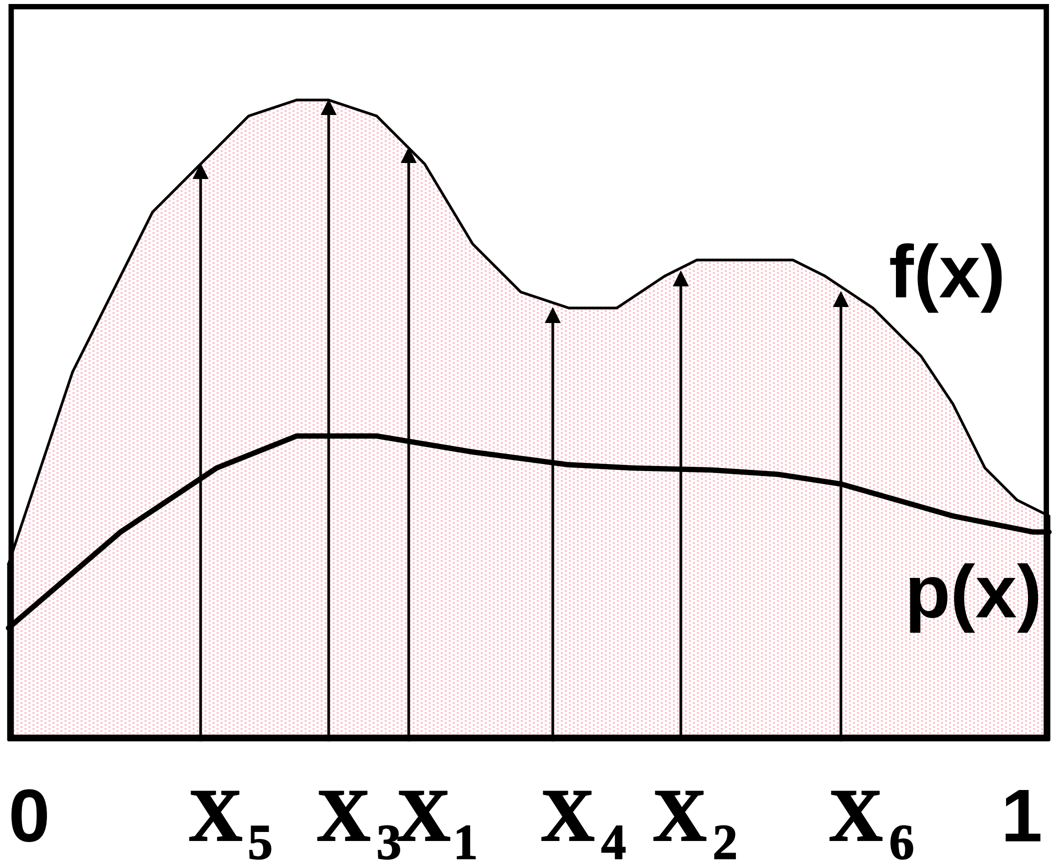
- Některé části vzorkovaného intervalu jsou **důležitější**, protože zde má *f* větší hodnotu
  - Vzorky z těchto oblastí mají větší vliv na výsledek

- Vzorkování podle důležitosti („**importance sampling**“) umisťuje vzorky přednostně do takových oblastí

  - Tj. **pdf** *p* je „ podobná“ integrandu

- **Menší rozptyl** při zachování nestrannosti

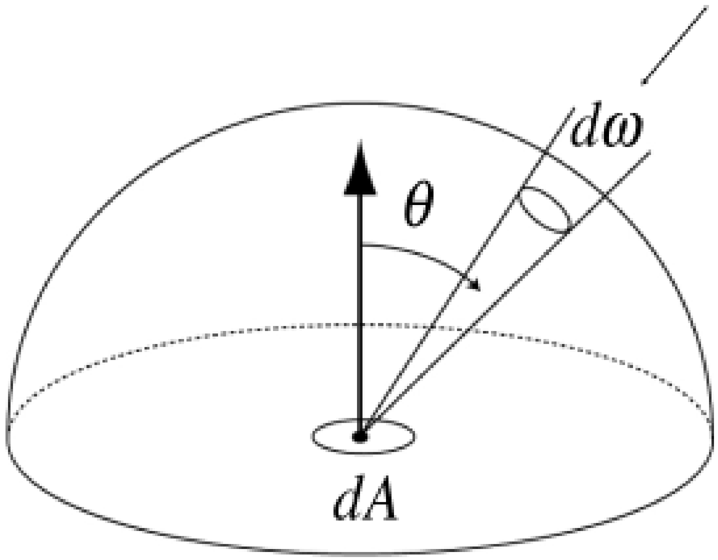
Vzorkování podle důležitosti



Příklady MC estimátorů

Odhad irradiance – uniformní vzork.

$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_\mathrm{i}(\mathbf{x}, \omega_\mathrm{i}) \cdot \cos\theta_\mathrm{i} \, \mathrm{d}\omega_\mathrm{i}$$



- Uniformní vzorkování:

$$\boxed{p(\omega) = \frac{1}{2\pi}}$$

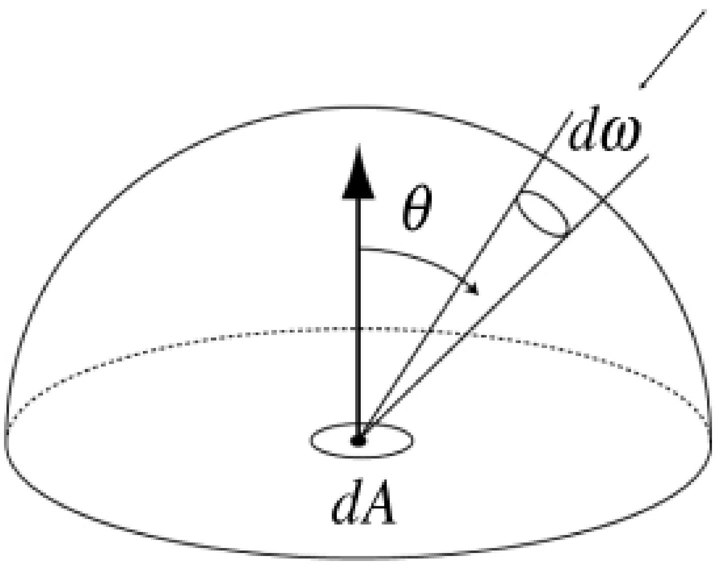
- Estimátor:

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{f(\omega_{\mathrm{i},k})}{p(\omega_{\mathrm{i},k})}$$

$$= \frac{2\pi}{N}\sum_{k=1}^{N} L_\mathrm{i}(\mathbf{x}, \omega_{\mathrm{i},k}) \cdot \cos\theta_{\mathrm{i},k}$$

Odhad irradiance – cos vzork.

$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_\mathrm{i}(\mathbf{x}, \omega_\mathrm{i}) \cdot \cos\theta_\mathrm{i} \, \mathrm{d}\omega_\mathrm{i}$$



- Importance sampling:

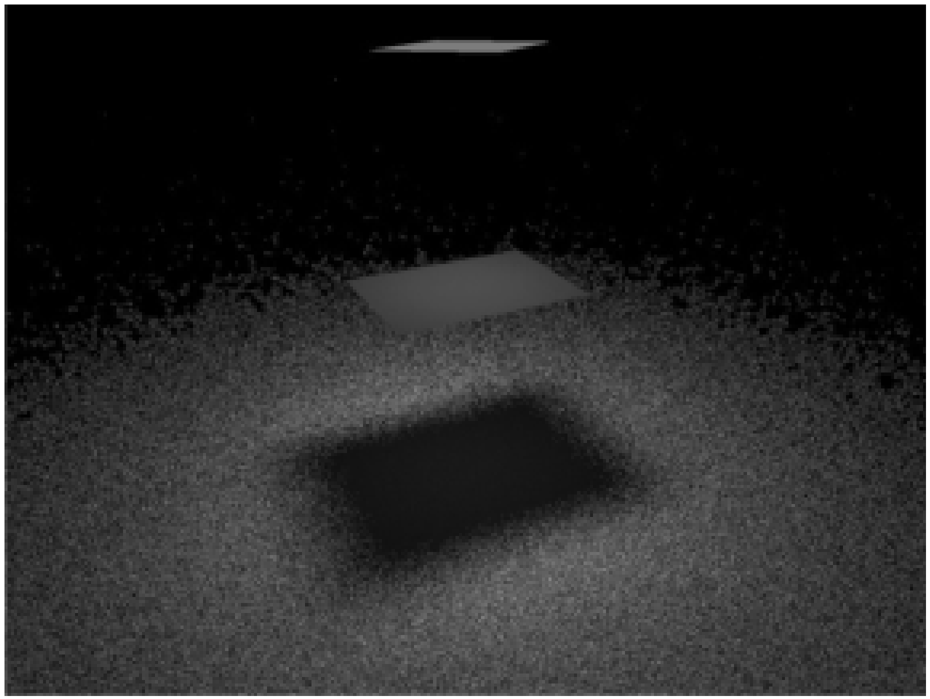
$$\boxed{p(\omega) = \frac{\cos\theta}{\pi}}$$

- Estimátor:

$$F_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{f(\omega_{\mathrm{i},k})}{p(\omega_{\mathrm{i},k})}$$

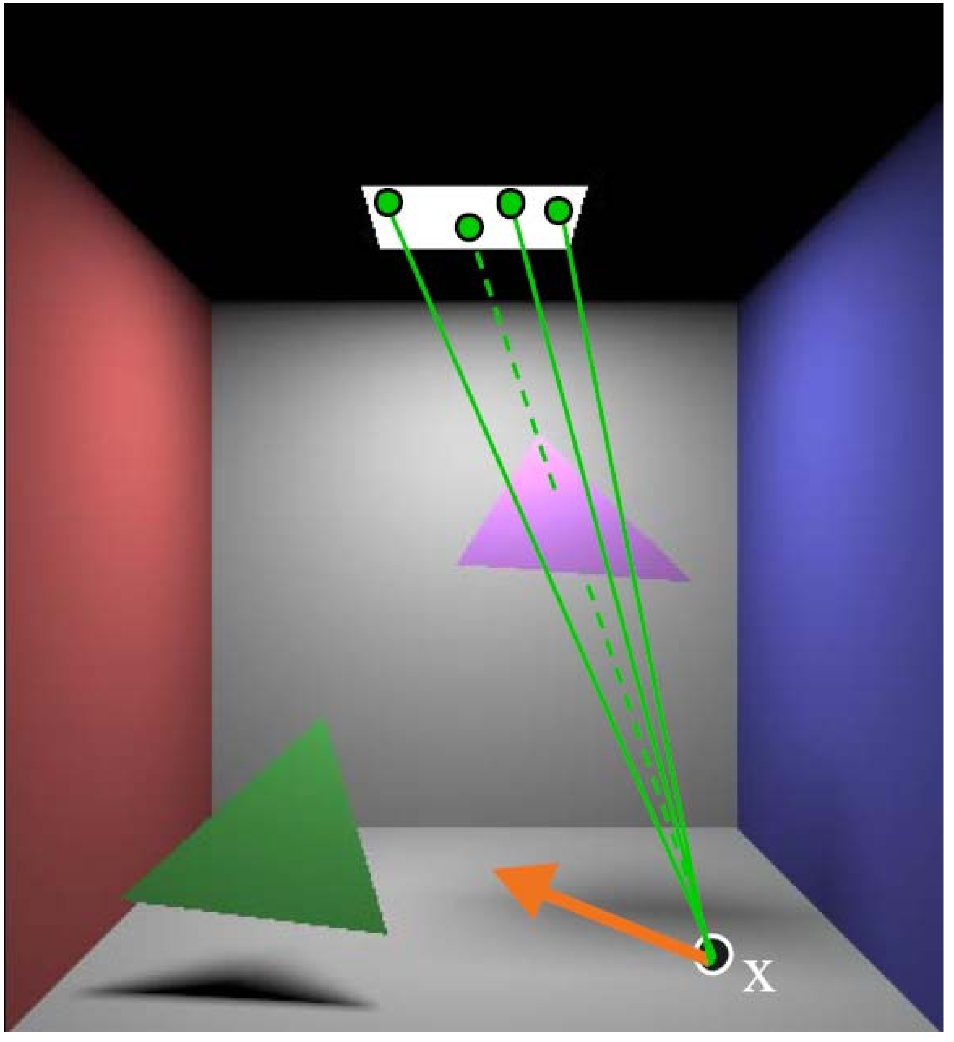
$$= \frac{\pi}{N}\sum_{k=1}^{N} L_\mathrm{i}(\mathbf{x}, \omega_{\mathrm{i},k})$$

Computing Irradiance



4 eye rays per pixel
100 shadow rays

Odhad irradiance – vzrokování zdroje



Odhad irradiance – vzrokování zdroje

$$G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x})$$

$$E(\mathbf{x}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_\mathrm{i}(\mathbf{x}, \omega_\mathrm{i}) \cdot \cos\theta_\mathrm{i} \, \mathrm{d}\omega_\mathrm{i}$$

$$= \int_A L_\mathrm{e}(\mathbf{y} \to \mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot \frac{\cos\theta_\mathbf{y} \cdot \cos\theta_\mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} \, \mathrm{d}A$$

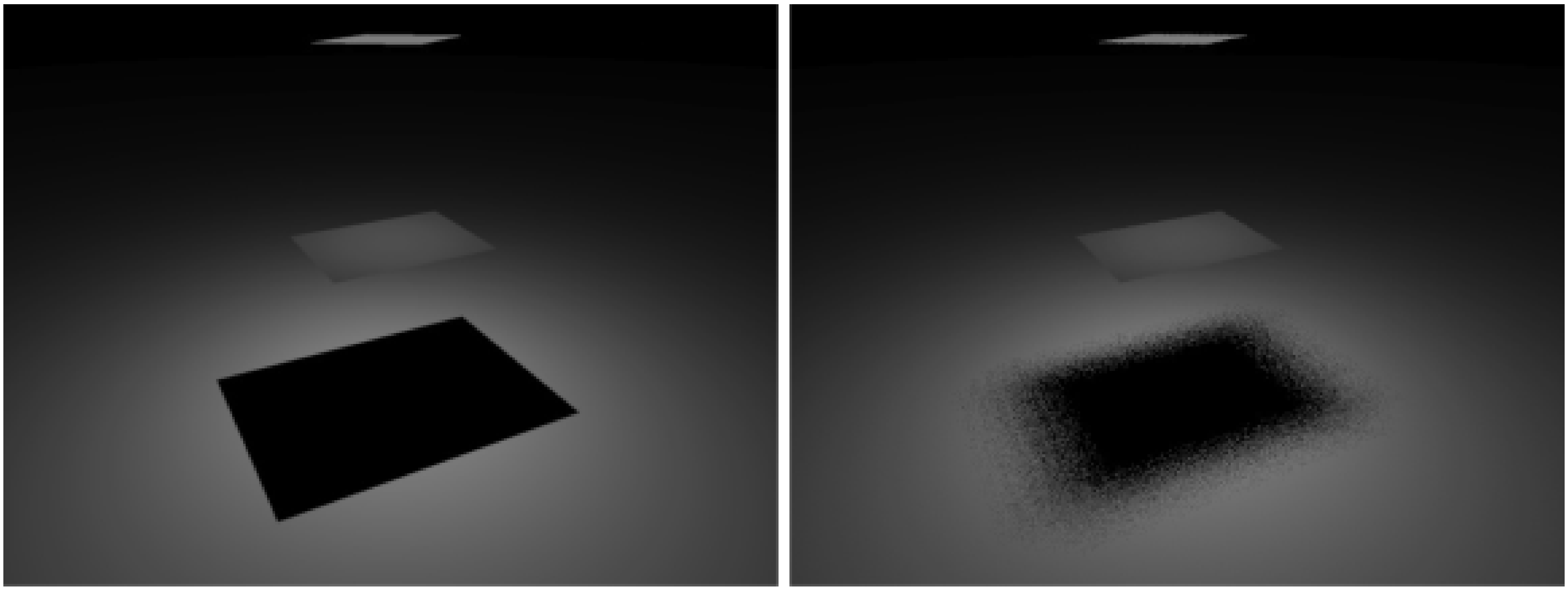
- Uniformní vzorkování plochy zdroje:

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{|A|}$$

- **Estimátor**

$$F_N = \frac{|A|}{N} \sum_{k=1}^{N} L_\mathrm{e}(\mathbf{y}_k \to \mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x})$$

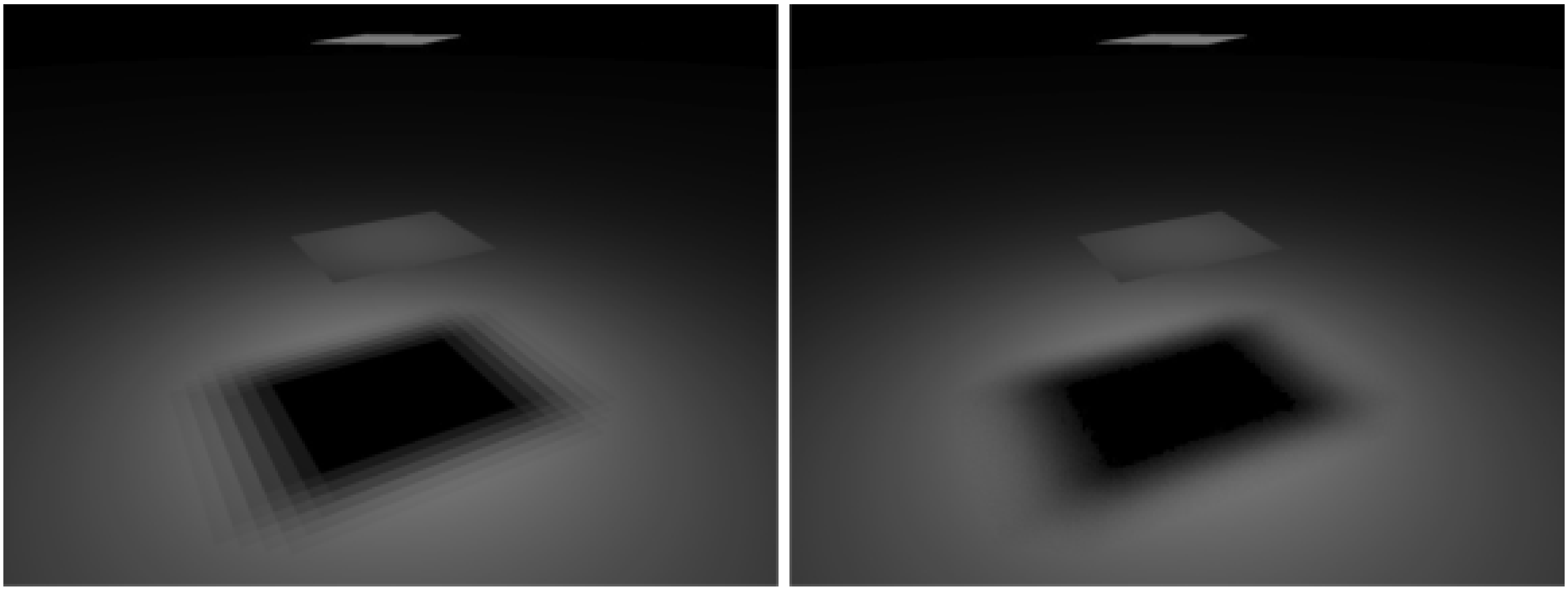
Example – Area Sampling



1 shadow ray per eye ray

Center | Random

Example – Area Sampling

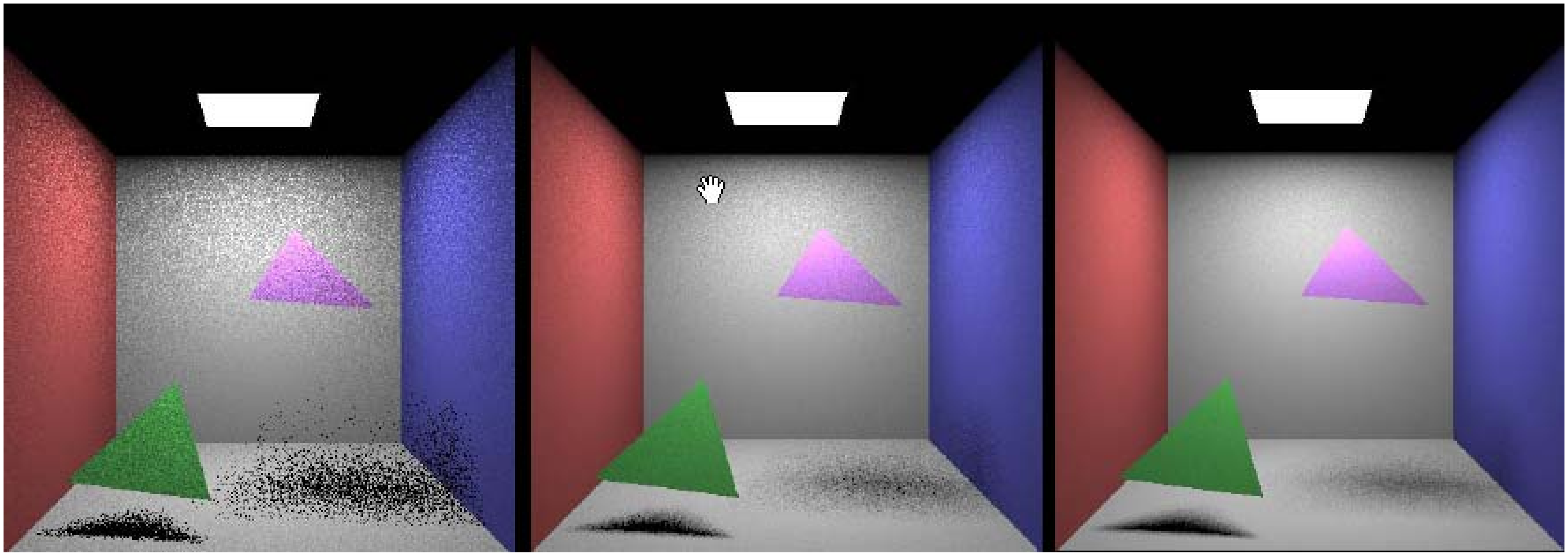


16 shadow rays per eye ray

Uniform grid

Stratified random

Plošné zdroje světla



1 vzorek na pixel 9 vzorků na pixel 36 vzorků na pixel

Přímé osvětlení na ploše s obecnou BRDF

- Odhadovaný integrál

$$L_{\mathrm{o}}(\mathbf{x},\omega_{\mathrm{o}}) = \int_A L_{\mathrm{e}}(\mathbf{y}\to\mathbf{x})\cdot f_r(\mathbf{y}\to\mathbf{x}\to\omega_{\mathrm{o}})\cdot V(\mathbf{y}\leftrightarrow\mathbf{x})\cdot G(\mathbf{y}\leftrightarrow\mathbf{x})\,\mathrm{d}A$$

- **Estimátor** (uniformní vzorkování povrchu zdroje)

$$F_N = \frac{|A|}{N}\sum_{k=1}^{N} L_{\mathrm{e}}(\mathbf{y}_k\to\mathbf{x})\cdot f_r(\mathbf{y}_k\to\mathbf{x}\to\omega_{\mathrm{o}})\cdot V(\mathbf{y}_k\leftrightarrow\mathbf{x})\cdot G(\mathbf{y}_k\leftrightarrow\mathbf{x})$$

Nepřímé osvětlení na ploše s obecnou BRDF

- Odhadovaný integrál

Pozn. $L_\mathrm{o} = L_\mathrm{r} + L_\mathrm{e}$

$$L_\mathrm{o}^{\mathrm{ind}}(\mathbf{x}, \omega_\mathrm{o}) = \int_{H(\mathbf{x})} L_\mathrm{r}(\mathrm{r}(\mathbf{x}, \omega_\mathrm{i}), -\omega_\mathrm{i}) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_\mathrm{i} \to \omega_\mathrm{o}) \cdot \cos\theta_\mathrm{i} \, \mathrm{d}\omega_\mathrm{i}$$

- **Estimátor** pro vzorkování směrů s obecnou pdf p(ω)

$$L_\mathrm{o}^{\mathrm{ind}}(\mathbf{x}, \omega_\mathrm{o}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{L_\mathrm{r}(\mathrm{r}(\mathbf{x}, \omega_{\mathrm{i},k}), -\omega_{\mathrm{i},k}) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_{\mathrm{i},k} \to \omega_\mathrm{o}) \cdot \cos\theta_{\mathrm{i},k}}{p(\omega_{\mathrm{i},k})}$$

PDF úměrná nebo velmi podobná BRDF

Distribution Ray Tracing
Path tracing

Sledování cest od kamery

```
renderImage()
{
  for all pixels
  {
    Color pixelCol = (0,0,0);
    for k = 1 to N
    {
      wk := náhodný směr skrz k-tý pixel
      pixelCol += getLi(camPos,wk)
    }
    return Lo / N
  }
}
```

Distribution Ray Tracing

```
getLi(x, wi)
{
   hit := NearestIntersect(x, wi)
   wo  := -wi;
   y   := hit.pos;
   if no intersection
        return backgroundCol;
   else
   {
        Lo = (0,0,0)
        for k = 1 to N
        {
         wk := náhodný směr na hemisféře s hustotou p(w)
         Lo += getLi(y, wk) * fr(y, wk, wo) * dot(hit.n,wk) / p(wk)
         }
        return Lo / N + directLighting (y, wo);
   }
}
```

Distribution Ray Tracing

- Ad hoc ukončení rekurze
  - maximální povolená hloubka
  - minimální povolený příspěvek

Sledování cest (Path tracing)

- Pouze jeden sekundární paprsek
  1. vyber způsob interakce (ideální lom, difúzní odraz, …)
  2. použij importance sampling podle vybrané interakce

- Přímé osvětlení
  - Doufej, že náhodně vygenerovaný paprsek trefí zdroj, anebo
  - Vyber náhodně jeden vzorek na jednom zdroji světla

- Trasuj stovky cest přes každý pixel a zprůměruj výsledek
- Výhoda: žádná exploze počtu paprsků kvůli rekurzi

Path Tracing – Implicitní osvětlení

```
getLi(x, w)
{
   Color thrput = (1,1,1)
   Color accum  = (0,0,0)
   while(1)
   {
        hit = NearestIntersect(x, w)
        if no intersection
                return accum + thrput * bgRadiance(x, w)
        if isOnLightSource(hit)
                accum += thrput * Le(hit.pos, -w)
        ρ = reflectance(hit.pos, -w)
        if rand() < ρ // russian roulette – survive (reflect)
                wi := SampleDir(hit)
                thrput *= fr(hit.pos, wi, -w) * dot(hit.n, wi) / (ρ*p(wi))
                x  := hit.pos
                w  := wi
        else // absorb
            break;
   }
   return accum;
}
```

Ukončení rekurze – Ruská ruleta

- Pokračuj v rekurzi s pravděpodobností q
- Uprav váhu faktorem $1 / q$

$$Z = \begin{cases} Y/q & \text{pokud } \xi < q \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E[Z] = \frac{E[Y]}{q} \cdot q + 0 \cdot \frac{1}{q-1} = E[Y]$$