Fraktály v počítačové grafice

Lenka Proňková

lenka.pronkova@matfyz.cz]

Obsah

- Fraktály a dynamické systémy v počítačové grafice.
- Zaměření na generování rostlin.

Modelování objektů

- Geometrické modelování [CAD]
  - technické a geometrické předměty
  - paměťové nároky
- Snímání objektů
- **Procedurální modelování**
  - zadán způsob generování
  - malý objem dat
  - snadná modifikace objektu, animace
  - obtížné definování
  - využití fraktální geometrie

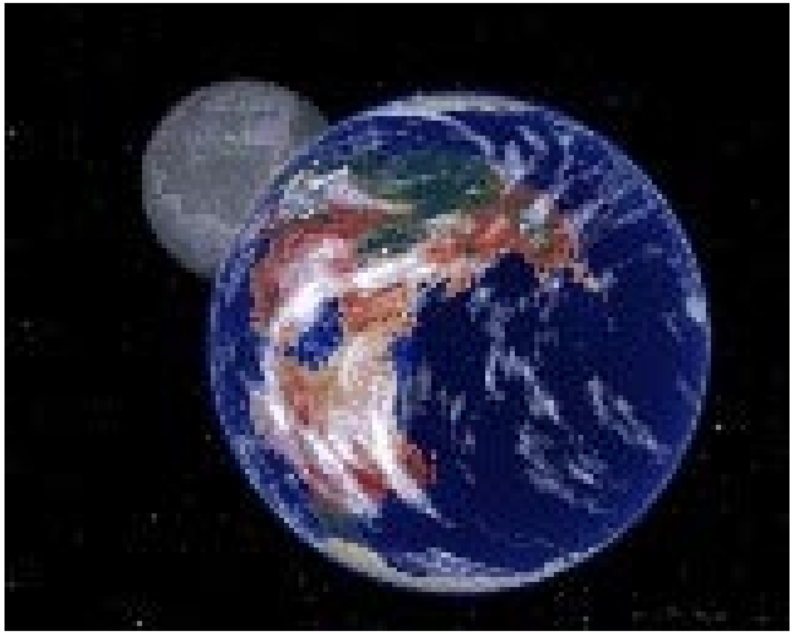
Fraktální geometrie

- Rozvíjena od 60.let 20. století.
- Objevitelem Benoit B. **Mandelbrot**, který matematicky definoval pojem fraktál.
- Na rozdíl od klasické geometrie se fraktální geometrie zabývá nepravidelností objektů.

Fraktální geometrie - Použití

- **Rostliny**
  - stromy, květiny, tráva
  - animace
  - biologické simulace
- **Přírodní objekty**
  - reliéfy, hory, řeky, mraky, kameny
- **Textury**
  - paměťová nenáročnost
- **Fraktální komprese dat**
- Další obory: biologie, medicína, fyzika

Planety



Krajiny

Animace

Rostliny

Stromy

Obecná definice fraktálu

- **Fraktál** lze nejjednodušeji definovat jako nekonečně členitý útvar, který má často zajímavé vlastnosti jako nekonečně velký obvod nebo nekonečně malý obsah.

- Fraktál je jakýkoliv geometrický nepravidelný útvar, ze kterého po rozdělení vznikne v ideálním případě několik zmenšených kopii původního celku.

Soběpodobnost

- Invariance vůči změně měřítka.
- **Soběpodobná množina** vzniká opakováním sama sebe při určité transformaci.
  [změna měřítka, rotace, posunutí, zkosení]
- Např. kámen, hory, mraky, stromy

- Hlavním znakem fraktálních útvarů.
  Tvar fraktálů je nezávislý na měřítku pod kterým je pozorujeme.

Topologická dimenze

- Představuje klasický geometrický rozměr tělesa. Je celočíselná.
- Příklady :

  Bod TD = 1

  Přímka TD = 1

  Plošný útvar TD = 2

Hausdorffova dimenze

- "Jak dlouhé je pobřeží Velké Británie?".
- **Hausdorfova dimenze** značí míru nepravidelnost geometrického útvaru.
- Udává s jakou rychlostí délka těchto útvarů roste do nekonečna.
- Pro velmi členité objekty je tato fraktální dimenze ostře větší než dimenze topologická.

Mandelbrotova definice fraktálu

- Fraktál je množina, jejíž Hausdorffova dimenze je větší než dimenze topologická.

Měření Hausdorffovy dimenze

- Platí: $N * s^{D} = 1$

  D – Hausdorffova dimenze
  s – měřítko (s=1/N)
  N – počet dílů na které se těleso rozdělí

- => $$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}$$

Měření Hausdorffovy dimenze

- Hausdorfova dimenze Kochovy vločky

  N=4 :
  $$s = \frac{1}{3}$$
  $$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}} = \frac{4}{3} = 1{,}2618595$$

- pobřeží: D=1.26
  povrch mozku člověka: D=2.76
  obvod průmětu oblaku: D=1.33

Typy fraktálů

- **IFS**
- **Dynamické systémy**
- **L-systémy**

IFS - Iterated Function System

IFS

- 1985 Demko, 1987 Barnsley
- Vychází z teorie pevných bodů, která je aplikací věty o Banachově pevném bodu.
- IFS je tvořen konečnou množinou transformací [kontrakcí] definovaných na celém prostoru.
- Aplikací IFS vznikne soběpodobná množina.

IFS – Teorém pevného bodu

- Kontrakce f:

  $$A \subseteq U,\ f : A -> A, 0 < \delta < 1:$$

  $$d[f(x), f(y)] < \delta . d[x, y]$$

- Buď f kontrakce s kontrakčním faktorem δ na metrickém podprostoru $A \subseteq U$, U úplný, potom existuje právě jeden pevný bod x_0 ležící v A.

IFS – Definice

- IFS je konečná množina kontrakcí definovaných na celém prostoru U.
- $IFS = (\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}, \{p_1, \ldots, p_n\})$

$\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ afinní transformace, kontrakce
$\{p_1, \ldots, p_n\}$ pravděpodobnosti

- Afinní transformace je definována vztahem:

$$w(x) = Ax + B$$

IFS - Generování

- Zvolení libovolného bodu nebo množiny bodů.
- Aplikace IFS systému kontraktivních zobrazení a získání nové množiny bodů.
- Iterováním, tj. opakovanou aplikací IFS systému na nově vznikající body, dochází k zpřesňování výsledného útvaru.

IFS – Příklad generování

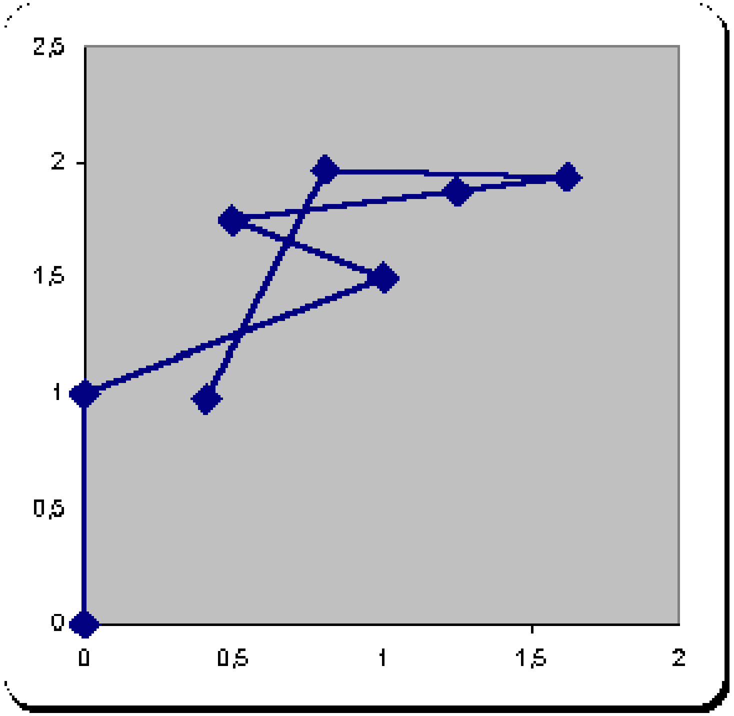
- Sierpienského trojúhelník:
  - použijeme tři transformace počátečního bodu
  - každá s pravděpodobností 1/3

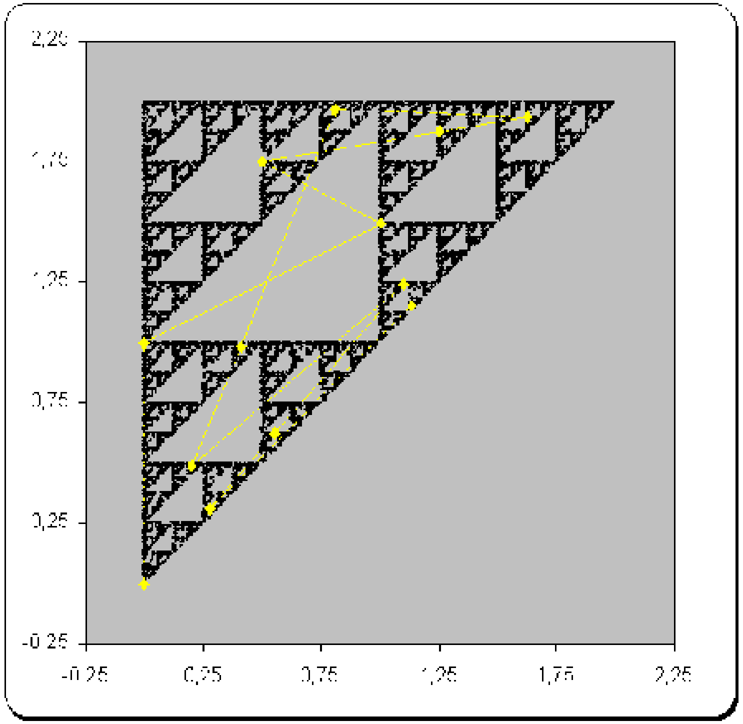
$$w_1\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0\\0 & 0{,}5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix};p=\frac{1}{3}$$

$$w_2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0\\0 & 0{,}5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};p=\frac{1}{3}$$

$$w_3\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0\\0 & 0{,}5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};p=\frac{1}{3}$$

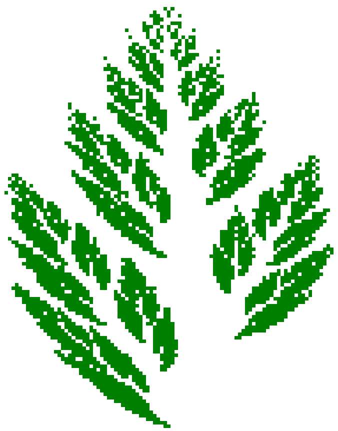
IFS – Příklad generování





- Postupná konvergence bodů k atraktoru příslušného iteračního funkčního systému.

IFS – Galerie



IFS – Atraktor

- **Atraktor** je vektor konečných bodů funkcí systému IFS.
- Tato množina je pro daný IFS systém invariatní.

IFS – Vlastnosti atraktoru

- Je-li v systému atraktor tvořen jediným bodem, libovolný bod při iteracích k němu konverguje.
- Je-li atraktor tvořen více body, libovolný bod se při iteracích pohybuje v mezích atraktoru.
- Počáteční bod nemusí ležet uvnitř atraktoru, po několika iteracích se do meze atraktoru dostane.

IFS – Generativní metody

- Náhodná procházka
- Deterministický algoritmus
- Upravený algoritmus náhodné procházky
- Algoritmus pro generování minima pixelů

IFS - Náhodná procházka

- Zvolení bodu roviny.
- Volba transformace w s ohledem na rozložení pravděpodobností.
- Aplikace transformace.
- Iterativní opakování na nově vzniklý bod.
- Po dosažení maximálního počtu iterací ukončíme.

- Stochastický, používá náhodná čísla.
- Jednoduchost, malá paměťová náročnost.
- Pomalý, velký počet bodů, některé části generovány vícekrát.

IFS – Deterministický algoritmus

- Zvolení množiny bodů v rovině.
- Postupná aplikace všech transformací.
- Pro další iteraci použita celá množina výsledných bodů.

- Deterministický.
- Rychlost.
- Exponenciální růst počtu používaných bodů.

IFS – Varianta náhodné procházky

- Zvolení bodu.
- Postupná aplikace všech transformací.
- Pro další iteraci použít výsledek pouze jedné transformace.

- Spojení výhod náhodné procházky a deterministického algoritmu.
- Menší paměťové nároky, rychlé generování.

IFS – Generování minima pixelů

- Pracujeme v diskrétním prostoru, stačí zobrazit pouze konečnou reprezentativní část fraktálu.
- Pracujeme přímo s pixely, ne s body.
- Pro reprezentaci použita bitmapa.
- Zaručena konečnost.
- Nejrychlejší.

IFS – Vytvoření IFS kódu

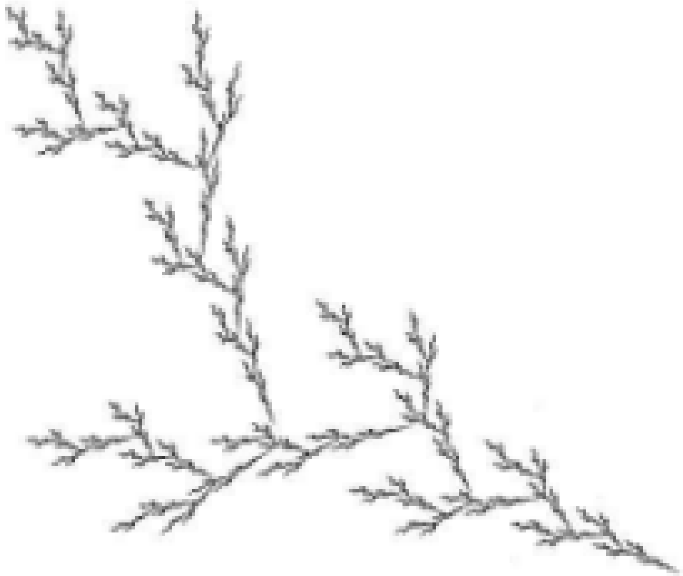
- Nakreslení základního objektu.
- Pokrytí základního objektu.
  Pokrytí objekty vzniklými ze základního objektu lineárními transformacemi

- Obrysová reprezentace.
  [seznam vrcholů]
- Výpočet transformačních matic na základě pokrytí.
  [seznam transformací]

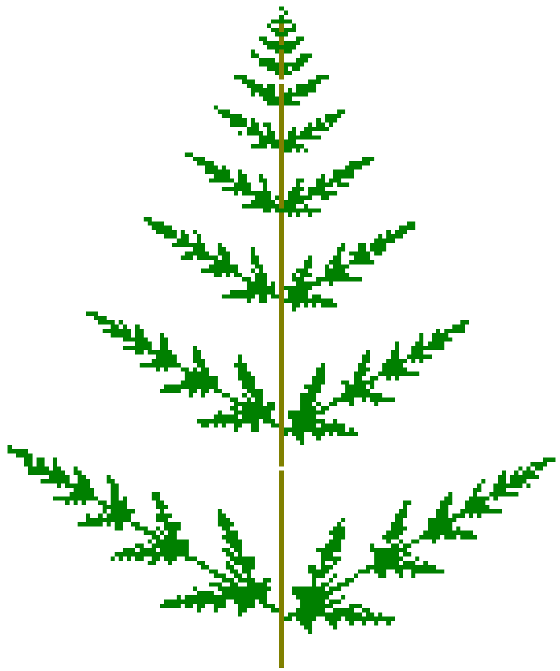
IFS - Použití

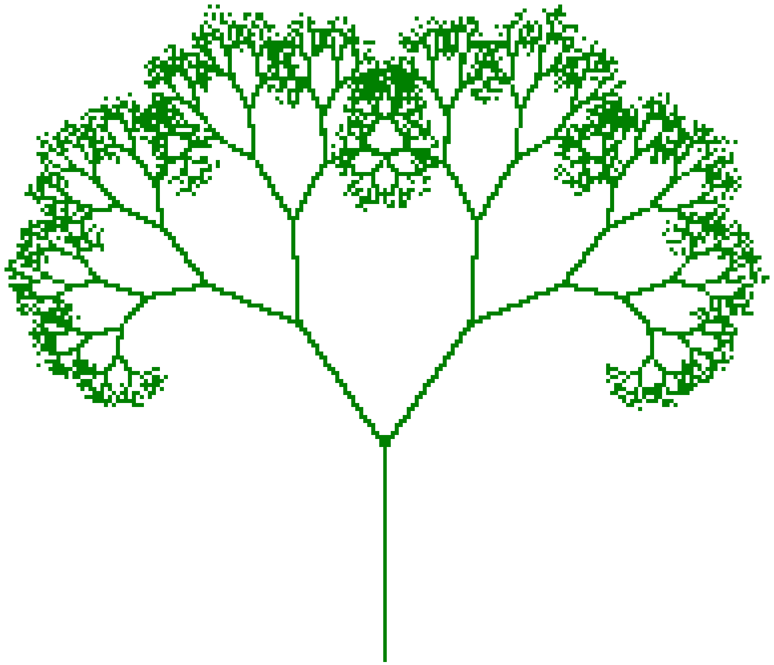
- Fraktální komprese dat
  [grafický formát FIF]
- Generování přírodních útvarů

IFS – Galerie



IFS – Galerie





Dynamické systémy

Dynamické systémy

- Dynamický systém je matematický model, který je závislý na nějaké proměnné [většinou na čase].
- Vychází z počátečních podmínek a je jimi v čase determinován.
- Zajímá nás, jakých stavů může systém nabýt. U některých systémů tento stavový prostor tvoří fraktál.

Dynamické systémy - Chování

- **Stavový vektor**
  - popisuje stav systému v daném čase
- **Dynamické podmínky**
  - určují změnu tohoto systému v čase
  - zadány soustavou diferenciálních rovnic.
- Změna stavu se děje provedením těchto diferenciálních rovnic a nahrazením starého stavového vektoru vektorem novým.

Dynamické systémy - Atraktor

- **Atraktor** je stav, do kterého systém směřuje. Tj. je to stav, ve které je stavový vektor, když je systém v nekonečném čase.
- Typy atraktorů:
  - pevné body
  - periodické body = systém osciluje
  - chaotický atraktor
  - podivný aktraktor

Fraktální dynamické systémy

- Dynamické systémy s fraktální strukturou vykazují velkou citlivost na počáteční podmínky a mají podivný atraktor.

  - **Juliovy množiny v komplexní rovině**

  - **Mandelbrotova množina**

Juliovy množiny

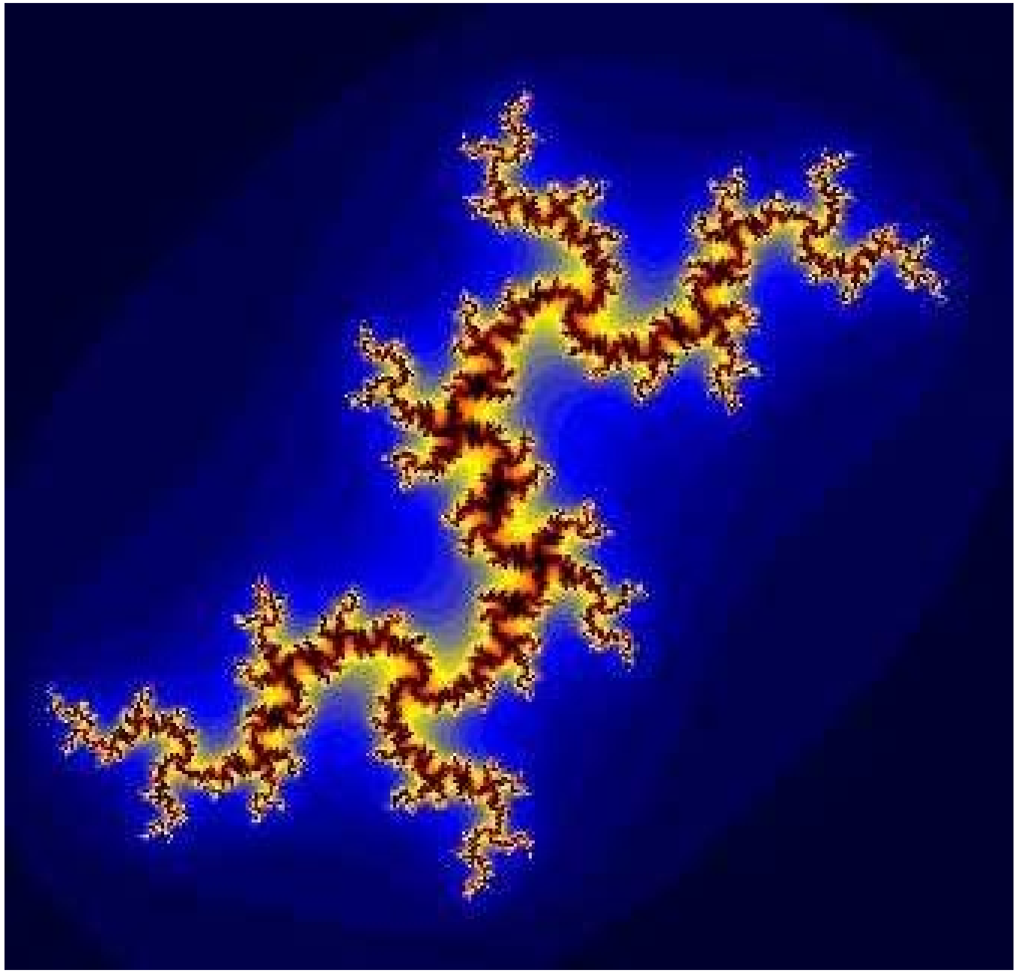
- Generována nelineárním kvadratickým komplexním polynomem: $f_c(z) = z^2 + c, \quad z, c \in C$
- Juliova množina je hranice množiny těch z, pro která je posloupnost $\{f_c(z), f_c(z) = f_c^2, \ldots\}$ omezená.
- Juliových množin je nekonečně mnoho.
- Vztah k Mandelbrotově množině:

$c \in MM$ - JM spojitá

$c \notin MM$ - rozpad JM na Fatouův prach

$c \in hranice MM$ - JM spojitá, ale nemá vnitřek

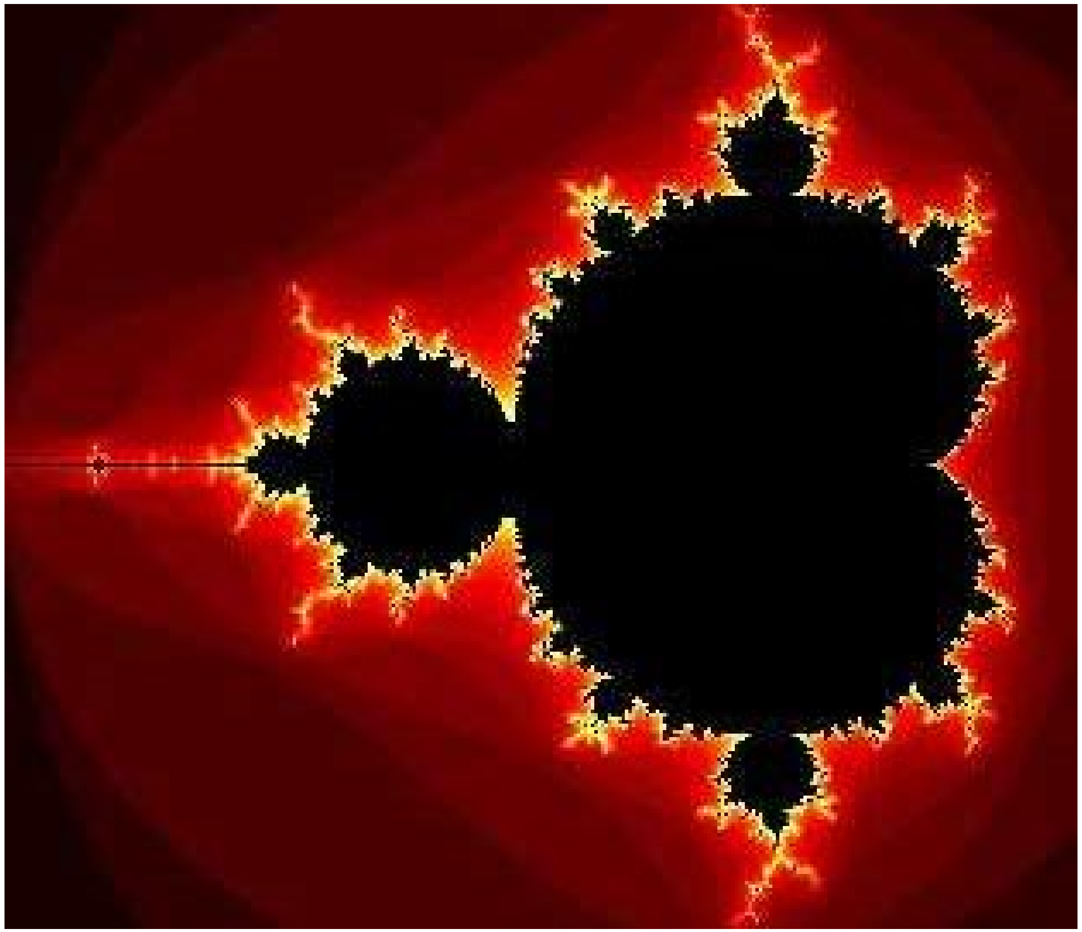
Juliovy množiny



Mandelbrotova množina

- Nelineární deterministický fraktál
- Množina takových c, pro která je Juliova množina funkce $f_c(z)$ souvislá.
- Množina bodů, pro které je posloupnost $\{c, c^2+c, (c^2+c)^2+c, \ldots\}$ omezená.
- Pouze jedna.

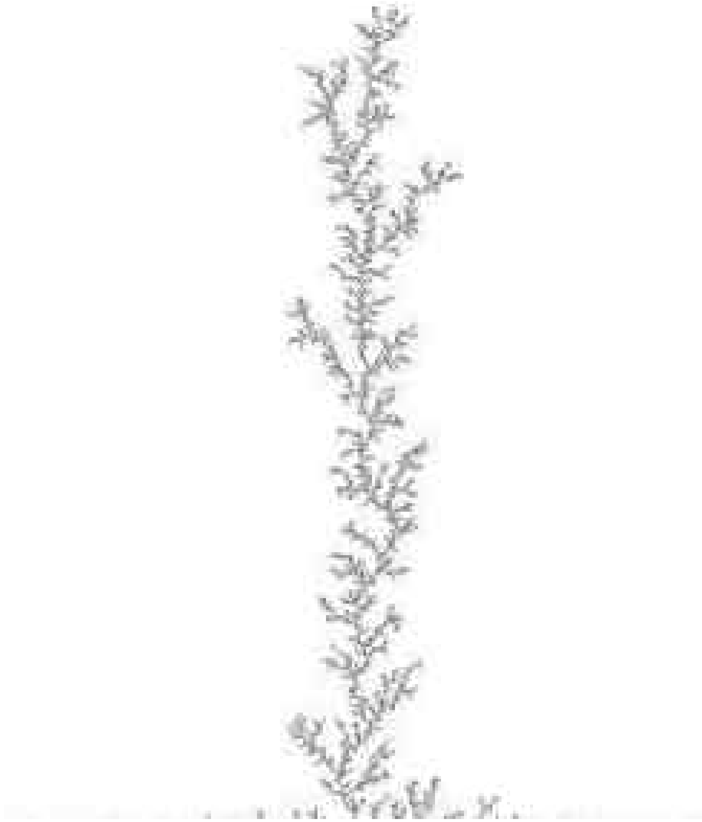
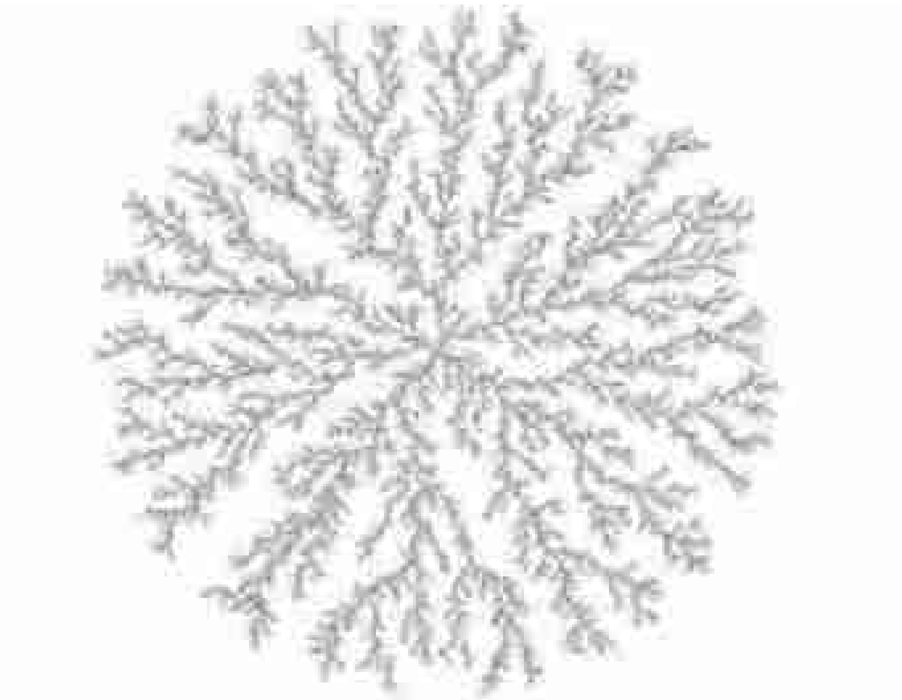
Mandelbrotova množina



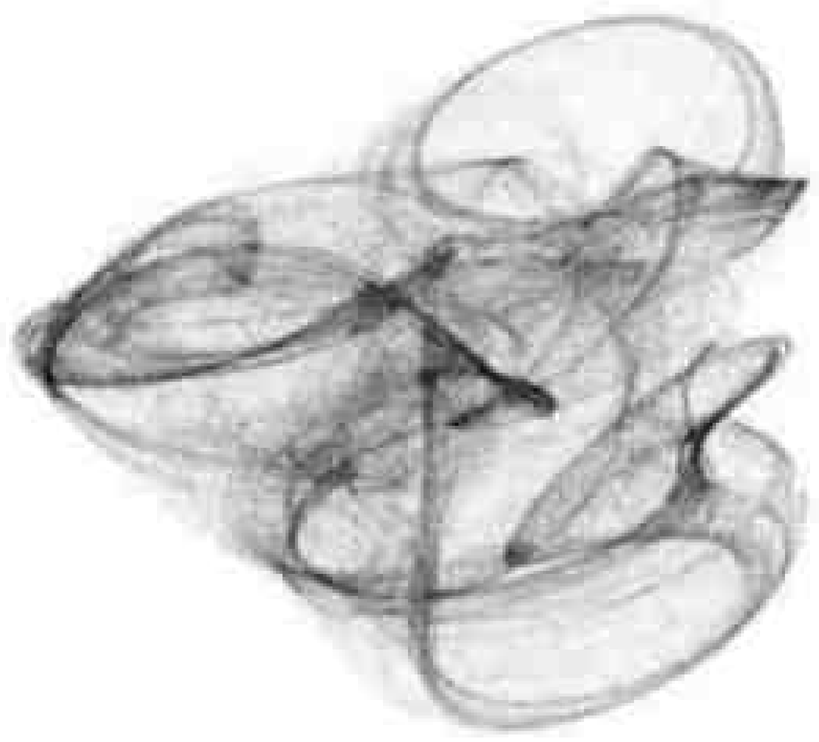
Dynamické systémy - Použití

- Mandelbrotova množina
  - generování textur
  - 3D modely hor
- Simulace

Dynamické systémy - Galerie

Dynamické systémy - Galerie



L-Systémy

L-systémy

- **Lindenmayerovy systémy**
- Skupina fraktálů definovaných pomocí přepisovacích gramatik.
- Podstatou tvorby L-systémů je přepisování řetězců podle určitých pravidel, kde každý symbol v řetězci má přiřazen jistý geometrický význam.
- Těmto fraktálům se také někdy říká **graftály**.

L-systémy - Definice

- Deterministický bezkontextový L-systém je uspořádaná trojice **G=[V, P, S]** :

- V je konečná abeceda symbolů

- P je konečná množina pravidel tvaru

$$A \Rightarrow B, \quad A \in V, B \in V^*$$

P neobsahuje dvě pravidla se stejnou levou stranou

- S je axiom, neprázdná posloupnost

L-systémy - Generování

- Derivování počátečního symbolu.
  Derivace řetězce znamená paralelní přepsání všech neterminálů v řetězci.
- Geometrická interpretace posloupnosti symbolů.
  [**želví grafika**]

L-systémy – Turtle graphics

- Želva reprezentuje kreslicí zařízení.
- Definována:
  - stavem [poloha želvy, orientace]
  - tabulkou akcí
- Sekvenční čtení řetězce a interpretace symbolů pomocí tabulky akcí.

L-systémy – Příklad derivace

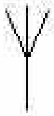
- G=[{A, F, -, +},
  {A=>F - - F - - F, F=>F+ F - - F+ F,+=>+, -=>- },
  A]
- První dvě derivace L-Systému G:

  A=> F - - F - - F =>

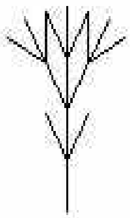
  => F+ F - - F+ F - - F+ F - - F+ F - - F+ F - - F+ F
- Grafická interpretace:

F	posun želvy dopředu
+	natočení želvy doleva
-	natočení želvy doprava
(,)	uložení na zásobník, obnovení stavu želvy

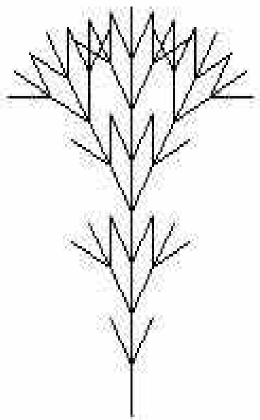
L-systémy – Příklad derivace



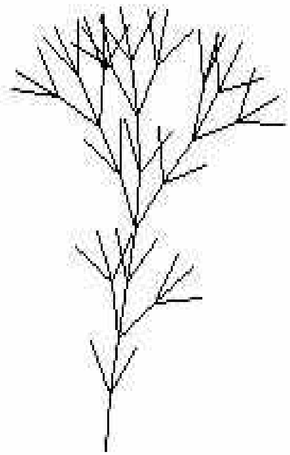
Obr. 1 - 1. iterace



Obr. 2 - 2. iterace



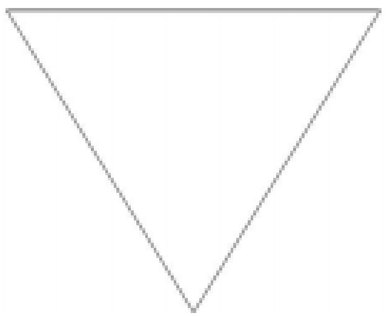
Obr. 3 - 3. iterace



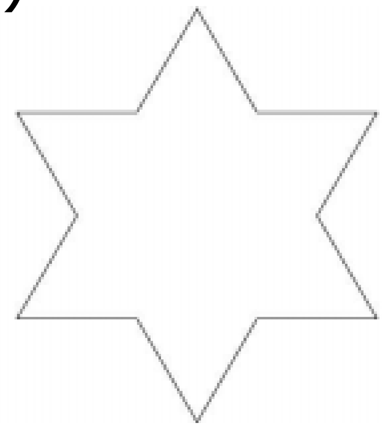
Obr. 4 - 3. iterace + chaos

L-Systémy – Kochova křivka

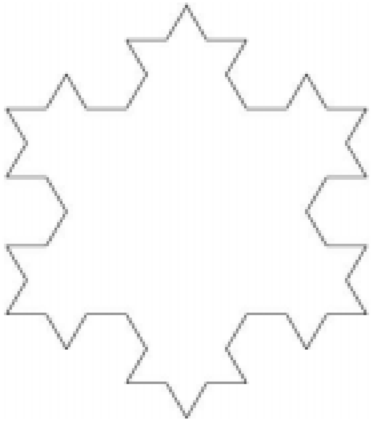
1.)



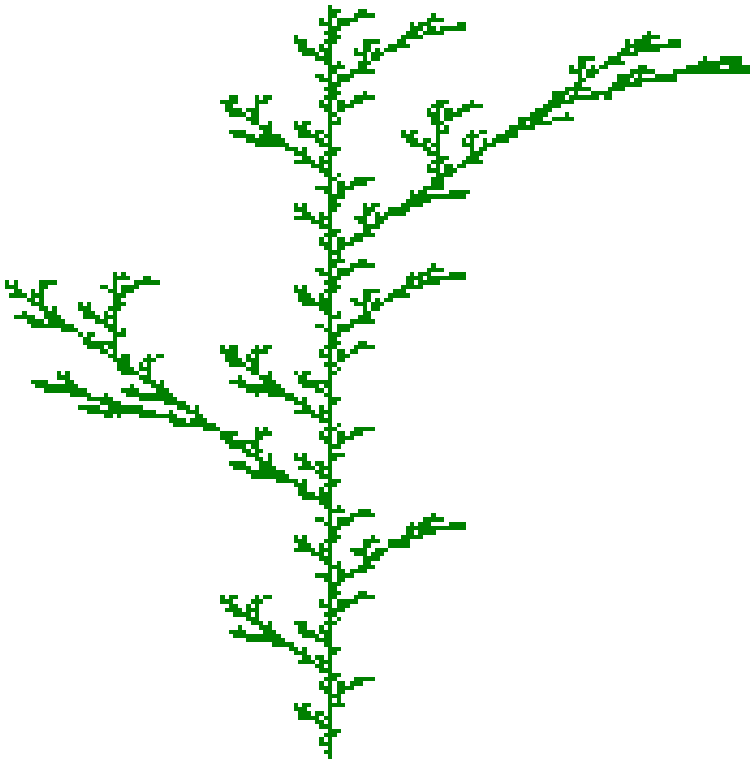
2.)

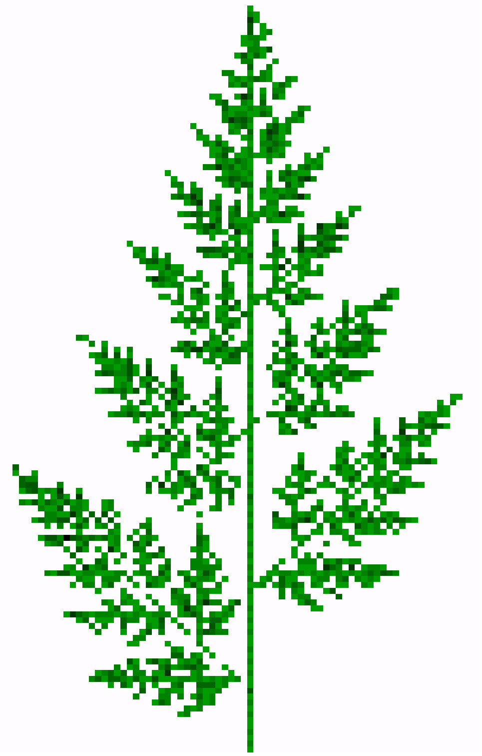


3.)



L-Systémy - Galerie





Parametrické L-systémy

- *Parametrické 0L-Systémy*
- Tvorba závislá pouze na hodnotách několika parametrů, které se v průběhu generace nemění. Nejsou zahrnuty evoluční procesy ani vliv vnějšího prostředí.
- Dělení:

    - D0L - Deterministické
    - SOL - Stochastické

Deterministické 0L-systémy

- *Deterministický 0L-systém* je uspořádaná čtveřice

  G=[V, P, S, Σ]

  Σ - mno□ina formálních parametru,

  formální parametry: aritmetické, logické, srovnávací operátory a závorky
- Umělá pravidelnost, každá část vytvořeného fraktálu je vždy přesnou kopií celkového tvaru.
- předchůdce: podmínka=>nástupce

Stochastické 0L-systémy

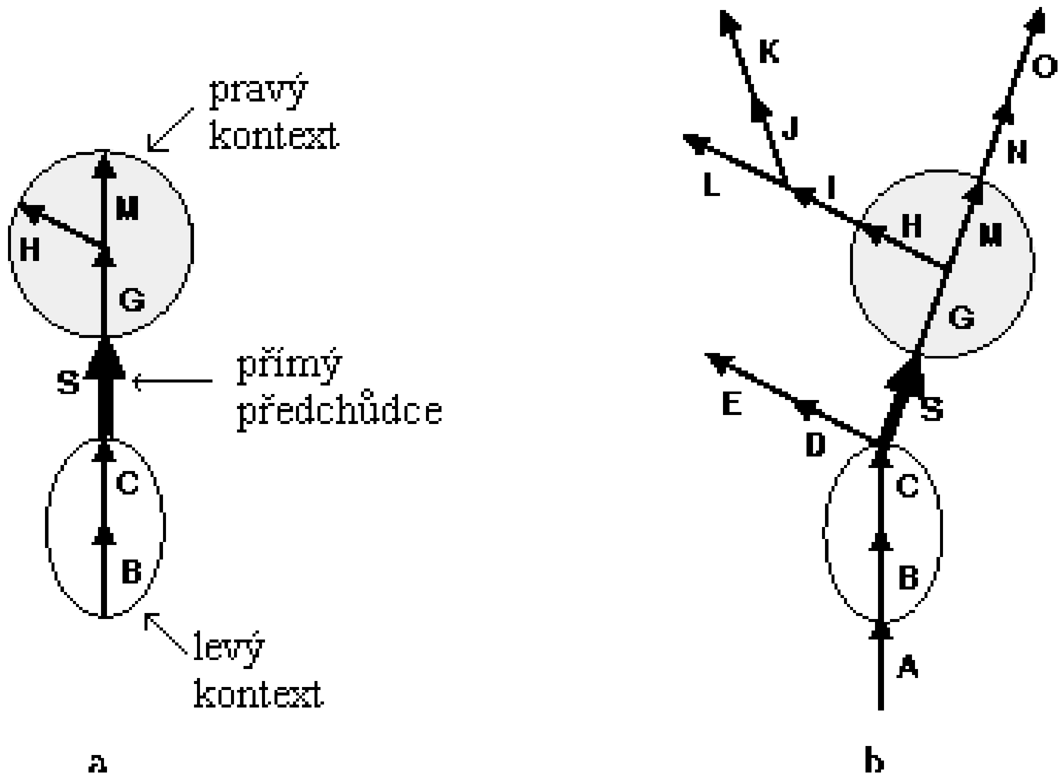
- *Stochastický 0L-systém* je uspořádaná pětice **G=[V, P, S, Σ, π]**

  π - pravdepodobnostní faktor
- Částečná stochastizace L-pravidel.
- Ovlivňování vlastností generátorů: délky úseček, prostorovou orientaci, výběr pravidla.
- Statická samopodobnost fraktálu.
- předchůdce: podmínka=>nástupce: pravděpodnost

Kontextové L-systémy

- *Kontextově sensitivní L-Systémy (endogenní)*
- Snaha zohlednit vnitřní procesy formující strukturu. [chemické reakce, tok látek, ..]
- Přepisujeme s ohledem na sousední části řetězce.
- lc [předchůdce] rc: podmínka => nástupce D2L
- 2L-systémy - vliv pravého a levého kontextu [lc, rc] 1L-Systémy

Kontextové L-Systémy



- Příklad kontextově senzitivního L-Systému.

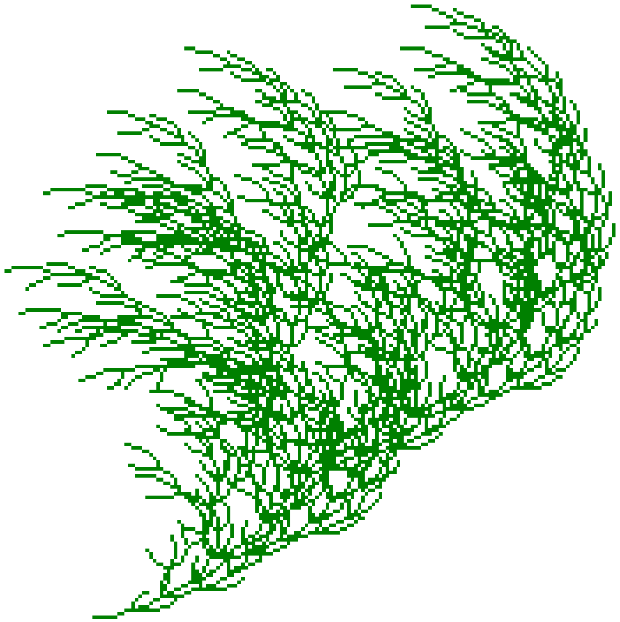
Enviromentální L-systémy

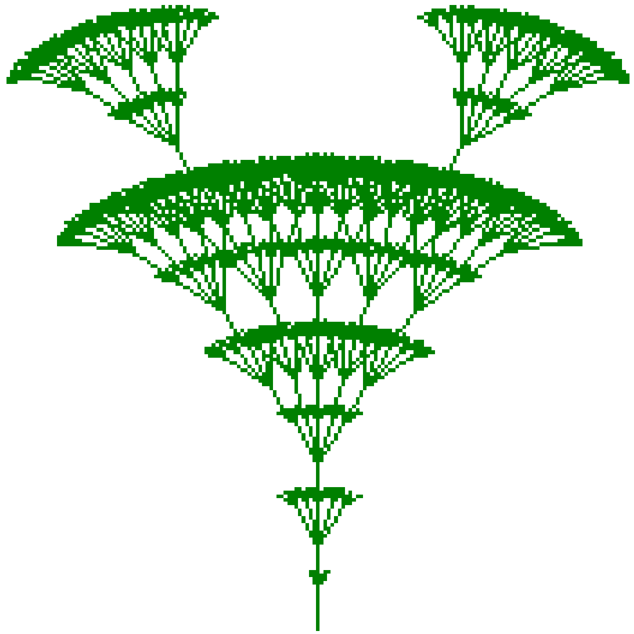
- *Enviromentálně senzitivní L-systémy (exogenní)*
- Vliv okolního prostředí.
- Pravidla, která interpretují reakci struktury na podněty z okolí.
  [reakce rostlin na překážky, popínání po předmětech, reakce na prořezávání]

L-Systémy - Použití

- Generování rostlin, stromů, řek a dalších přírodních útvarů.
- Simulace vývoje některých biologických materiálů, zejména rostlin. [1L a 2L systémy]

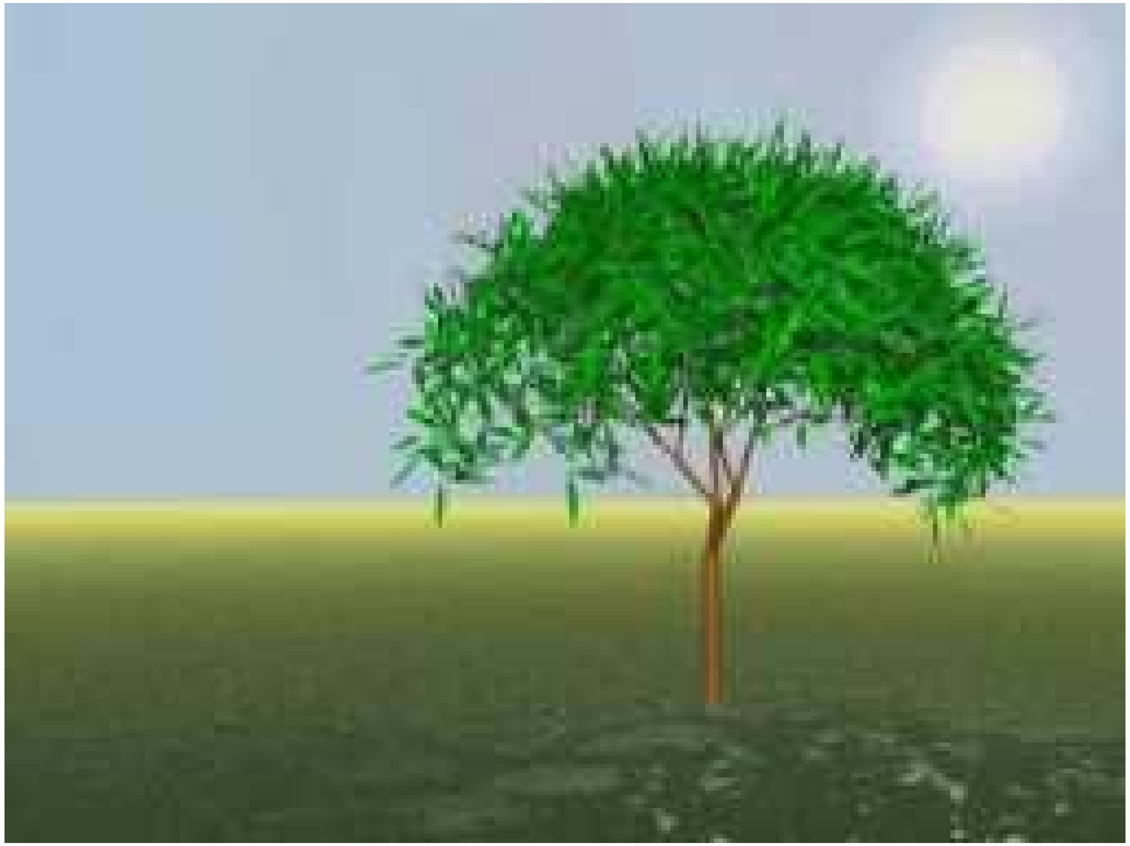
L-Systémy - Galerie





L-Systémy - Galerie

L-Systémy - Galerie



Informace - Fraktály

- http://www.fee.vutbr.cz/~tisnovpa/
- http://www.sci.muni.cz/~prudil/fractals/

- http://www.fractint.org/
- http://www.paru.cas.cz/~hubicka/XaoS/

Informace – L-Systémy

- Linterman:
  http://i31www.ira.uka.de/~linter/
- Beneš:
  http://sgi.felk.cvut.cz/~benes/

- http://www.xs4all.nl/~ljlapre/
- http://life.csu.edu.au/complex/tutorials/tutorial2.html