Obousměrné sledování cest

Jaroslav Křivánek

KSVI MFF UK Praha

e-mail: Jaroslav.Křivánek@mff.cuni.cz

WWW: http://cgg.ms.mff.cuni.cz/~jaroslav/

Veachova formulace

- Všechny směry **<u>od</u>** plochy (pro příchozí i odchozí světlo)

- Hodnota pixelu = I_j = „měření“ = odezva hypotetického senzoru, který je součástí scény

Veachova formulace

- „Emitovaná importance“ $W_e\,(\mathbf{x}, \omega)$
  - citlivost senzoru (odezva na jednotkový tok)
  - bod **x** je na senzoru (u Lafortuna je ve scéně)

Terminologie

- **Obousměrné sledování cest**
  - Bidirectional path tracing
  - BPT
- **Sledování cest**
  - Path tracing
  - PT

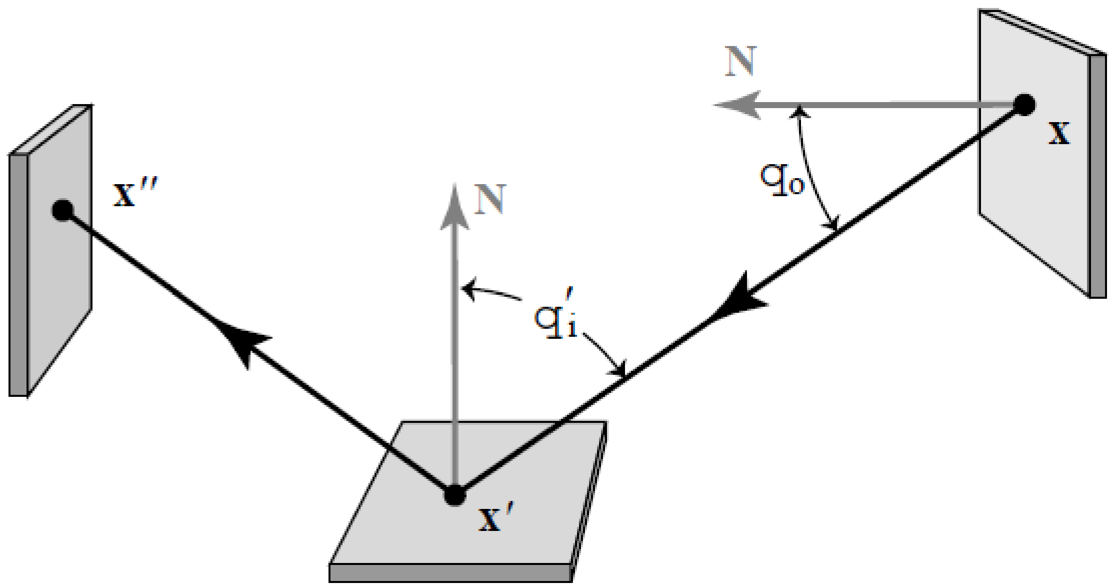
BPT vs. PT

BPT, 25 vzorků (cest) na pixel

PT, 56 vzorků (cest) na pixel

Tříbodová formulace (3-b)

- Eliminace směrů



$$L(\mathbf{x} \to \mathbf{x}') = L(\mathbf{x}, \omega)$$

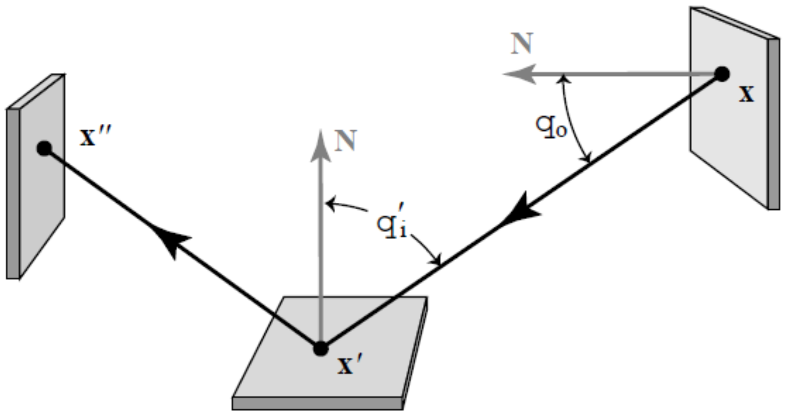
$$f_s(\mathbf{x} \to \mathbf{x}' \to \mathbf{x}'') = f_s(\mathbf{x}', \omega_i \to \omega_o)$$

$$\omega = \widehat{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}$$

$$\omega_i = \widehat{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}$$

$$\omega_o = \widehat{\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'}$$

Zobrazovací rovnice v 3-b



$$L(\mathbf{x}' \to \mathbf{x}'') = L_\mathrm{e}(\mathbf{x}' \to \mathbf{x}'') + \\ + \int_{\mathcal{M}} L(\mathbf{x} \to \mathbf{x}')\, f_\mathrm{s}(\mathbf{x} \to \mathbf{x}' \to \mathbf{x}'')\, G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}')\, dA(\mathbf{x})$$

$$G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') = V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') \frac{|\cos(\theta_\mathrm{o})\ \cos(\theta'_\mathrm{i})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}$$

Měřicí rovnice v 3-b

$$I_j = \int_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} W_{\mathrm{e}}^{(j)}(\mathbf{x}\to\mathbf{x}')\, L(\mathbf{x}\to\mathbf{x}')\, G(\mathbf{x}\leftrightarrow\mathbf{x}')\, dA(\mathbf{x})\, dA(\mathbf{x}')$$

$\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$ šipka = směr šíření světla

$W_{\mathrm{e}}^{(j)}(\mathbf{x} \to \mathbf{x}')$ důležitost emitovaná z **x**' do **x** (proti směru světla)

x' ... na senzoru
x … na ploše scnény

Transport světla jako integrál

- Cíl: místo integrální rovnice chceme formulovat transport světla jako integrál přes cesty:

$$I_j = \int_\Omega f_j(\bar{x})\, d\mu(\bar{x})$$

- Výhoda
  - Možnost aplikovat klasické MC metody
  - Aplikace kombinovaných estimátorů (MIS)
  - Aplikace Metropolis vzorkování

Míra na prostoru cest

Ω_k … cesty délky *k*

$$\bar{x} = \mathbf{x}_0 \, \mathbf{x}_1 \, \ldots \, \mathbf{x}_k$$

míra množiny cest $D \subset \Omega_k$

$$\mu_k(D) = \int_D dA(\mathbf{x}_0) \cdots dA(\mathbf{x}_k)$$

$$d\mu_k(\mathbf{x}_0 \ldots \mathbf{x}_k) = dA(\mathbf{x}_0) \cdots dA(\mathbf{x}_k)$$

Míra na prostoru cest

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$$ cesty všech možných délek

míra množiny cest $D \subset \Omega$

$$\mu(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(D \cap \Omega_k)$$

Definice „funkce příspěvku“

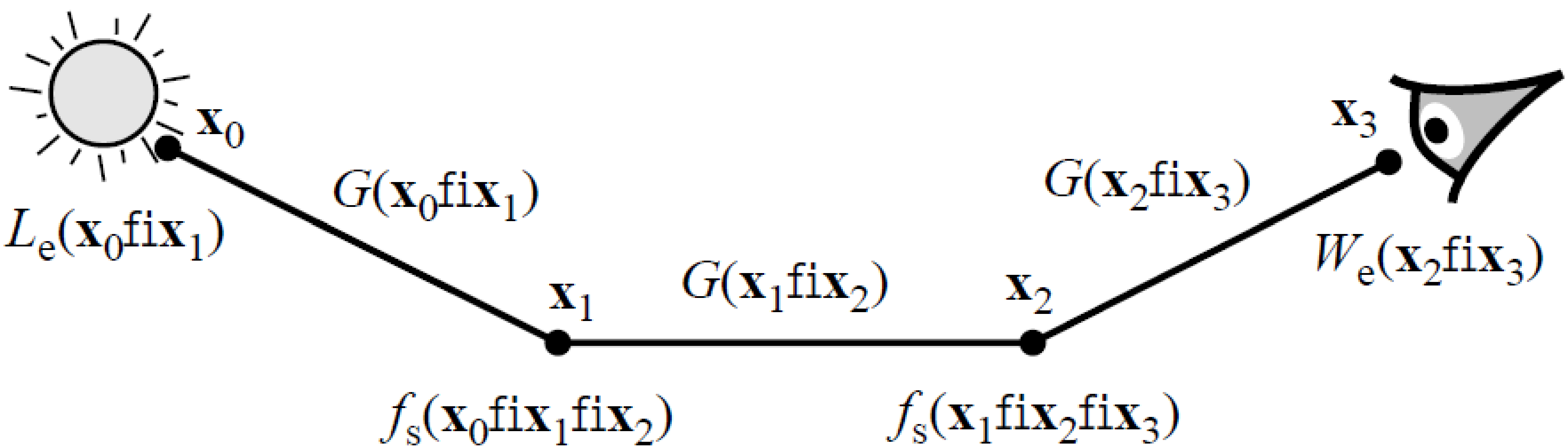
- Z rekurzivní expanze 3-b zobrazovací rce

$$
\begin{aligned}
f_j(\bar{x}) \quad = \quad & L_\mathrm{e}(\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1)\, G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1)\, W_\mathrm{e}^{(j)}(\mathbf{x}_{k-1} \to \mathbf{x}_k) \\
& \cdot \prod_{i=1}^{k-1} f_\mathrm{s}(\mathbf{x}_{i-1} \to \mathbf{x}_i \to \mathbf{x}_{i+1})\, G(\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}_{i+1})
\end{aligned}
$$

Definice „funkce příspěvku“

- Např. $\bar{x} = \mathbf{x}_0\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$

$$
\begin{aligned}
f_j(\bar{x}) \quad = \quad & L_{\mathrm{e}}(\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1)\, G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1)\, f_{\mathrm{s}}(\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2) \\
& \cdot G(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2)\, f_{\mathrm{s}}(\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_3) \\
& G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3)\, W_{\mathrm{e}}^{(j)}(\mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_3)
\end{aligned}
$$



Aplikace integrálu přes cesty

$$I_j = \int_\Omega f_j(\bar{x})\, d\mu(\bar{x})$$

Odhad integrálu pomocí klasických Monte Carlo metod:

$$I_j \approx \frac{f_j(\bar{X})}{p(\bar{X})}$$

Jak definovat a spočítat hustotu na prostoru cest?

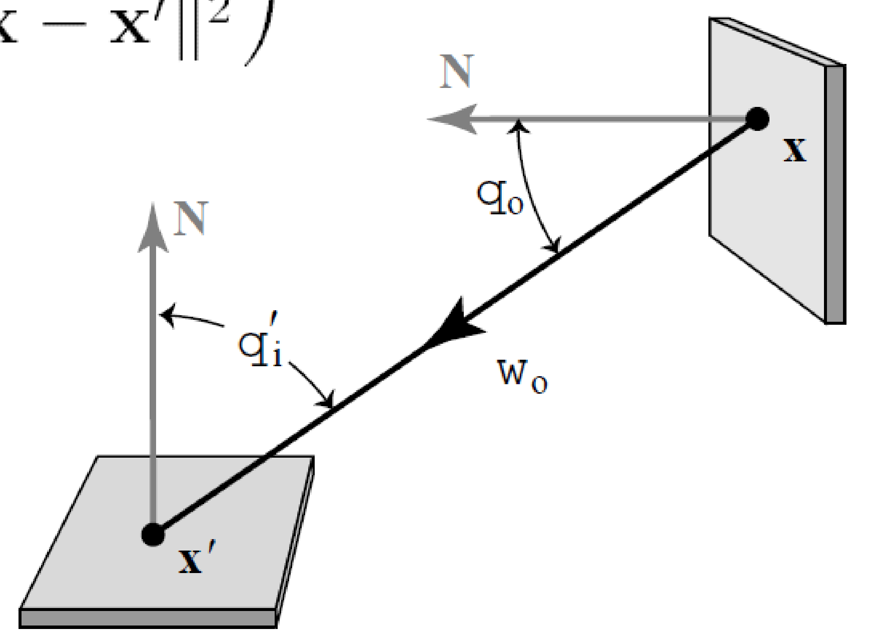
Hustota p-nosti na prostoru cest

- Hustota pravděpodobnosti cesty
  - součin hustot pro jednotlivé vrcholy (vzhledem k plošné míře)
- Hustoty pro vrcholy
  - Zdroj světla, čočka – dáno
  - Vzorkování směru ...

Hustota pro vzrokování směru

- Hustota p-nosti není invariantní vůči míře
- Nutno konvertovat z dω na dA

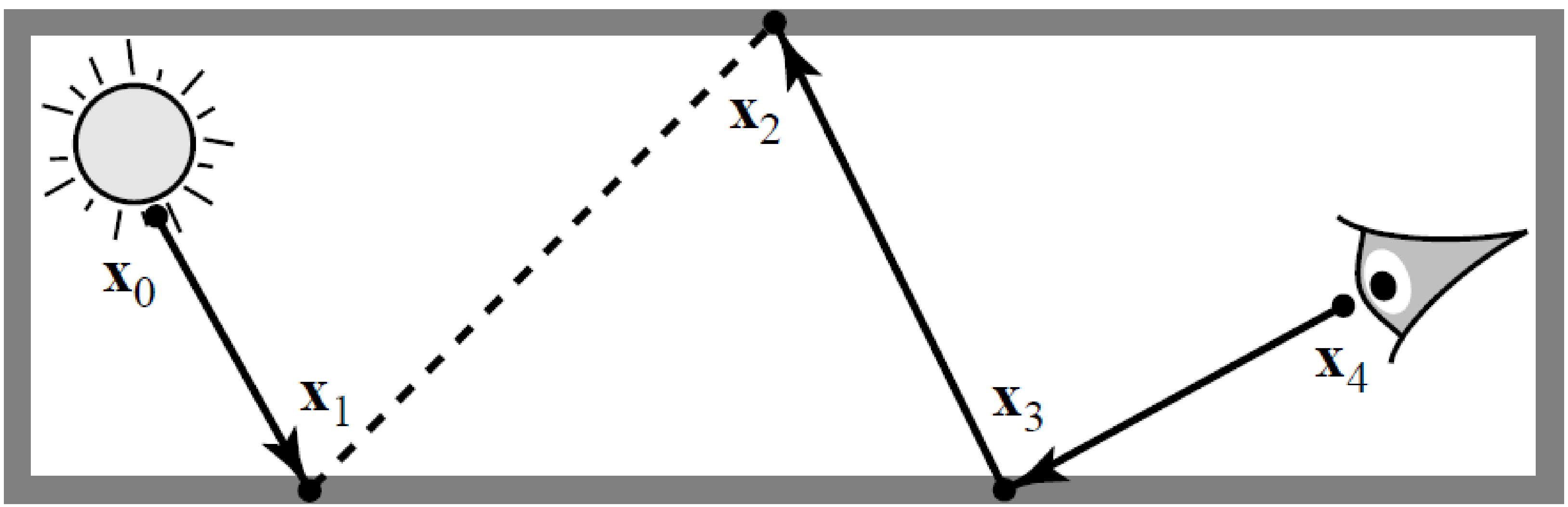
$$p(\mathbf{x}') \quad = \quad p(\omega_o) \left(\frac{|\cos(\theta_i')|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2} \right)$$



Obousměrné sledování paprsku

- Kombinace různých vzorkovacích technik pro integrál na prostoru cest

$$I_j = \int_\Omega f_j(\bar{x})\, d\mu(\bar{x})$$



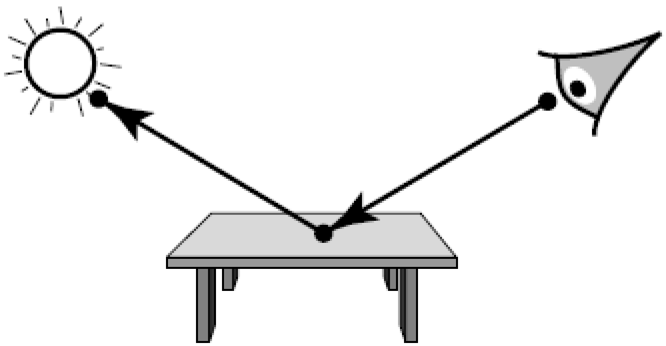
Vzorkovací techniky v BPT

- Podcesta o t vrcholech vzorkovaná z kamery
- Podcesta o s vrcholech vzorkovaná ze světla
- Spojovací segment délky 1
- Celková délka cesty: $k = s + t - 1$ (segmentů)

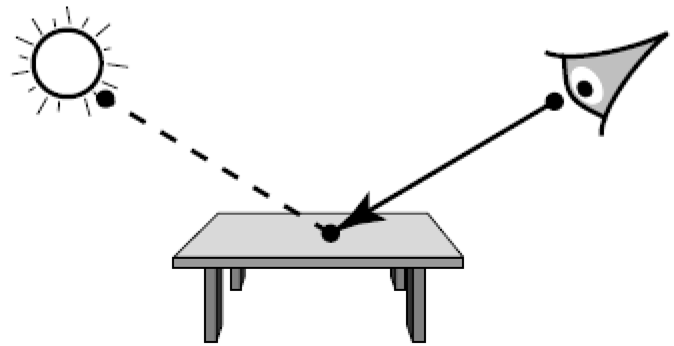
- k+2 možností pro generování cesty délky k

Vzorkovací techniky v BPT

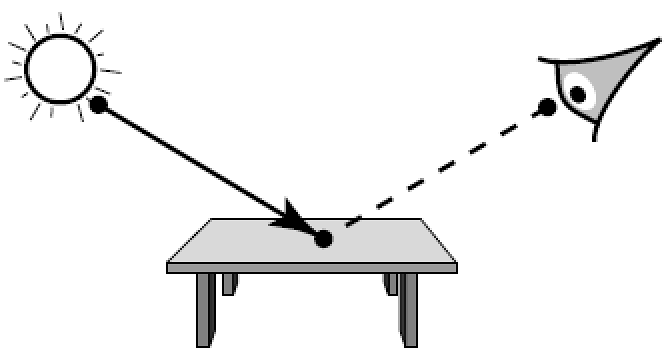
Příklad: Čtyři vzorkovací techniky pro $k = 2$



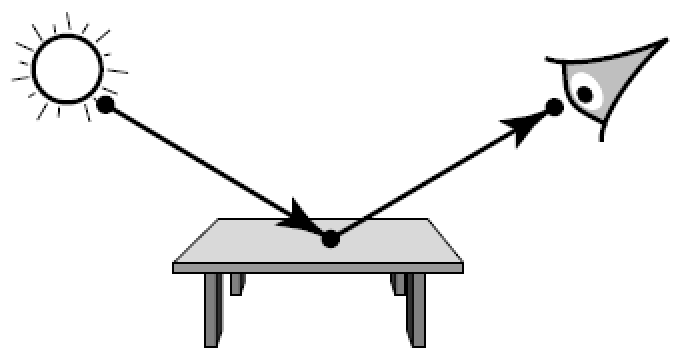
(a) $s = 0, t = 3$



(b) $s = 1, t = 2$



(c) $s = 2, t = 1$



(d) $s = 3, t = 0$

Vzorkovací techniky v BPT

- Každá technika má jinou hustotu $p_{s,t}$
- Káždá je efektivní při vzorkování jiných světelných efektů
- Každá technika odhaduje stejný integrál

Kombinace vzorkovacích technik

- Kombinovaný estimátor (MIS)

$$F = \sum_{s \geq 0} \sum_{t \geq 0} w_{s,t}(\bar{x}_{s,t}) \frac{f_j(\bar{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\bar{x}_{s,t})}$$

kombinační strategie
(např. vyvážená heuristika)

Generování cest po skupinách

- Generuj podcestu náhodné délky od světla

$$\mathbf{y}_0 \dots \mathbf{y}_{n_L-1}$$

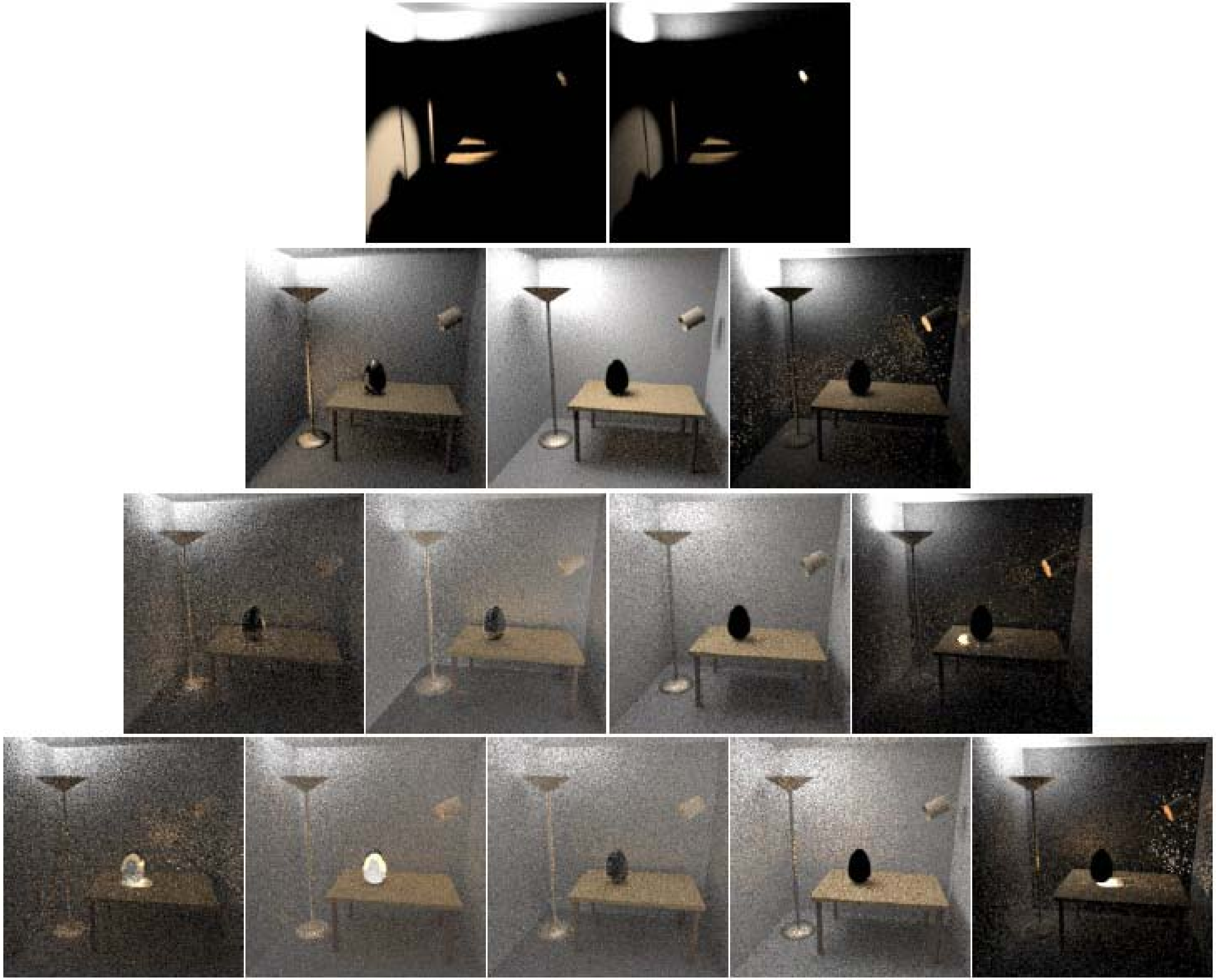
- Generuj podcestu náhodné délky od kamery

$$\mathbf{z}_{n_E-1} \dots \mathbf{z}_0$$

- Spoj každý prefix $\mathbf{y}_0 \dots \mathbf{y}_{n_L-1}$ s každým sufixem $\mathbf{z}_{n_E-1} \dots \mathbf{z}_0$:

$$\bar{x}_{s,t} = \mathbf{y}_0 \dots \mathbf{y}_{s-1} \mathbf{z}_{t-1} \dots \mathbf{z}_0$$

(cesta = vzorek z hustoty $p_{s,t}$)



$k = 2$ (2x)

$k = 3$ (4x)

$k = 4$ (8x)

$k = 5$ (16x)

$s = 1$ $s = 2$ ... $t = 2$ $t = 1$

s / t = počet vrcholů na podcestě od světla / kamery

Konec

Další informace:

- **E. Veach**: ***Robust Monte Carlo methods for light transport simulation***, PhD thesis, Stanford University, 1997, pp. 219-230, 297-317
  http://www.graphics.stanford.edu/papers/veach_thesis/