
Dualita v teorii zobrazování

© 1996-2001 Josef Pelikán
KSVI MFF UK Praha

e-mail: Josef.Pelikan@mff.cuni.cz

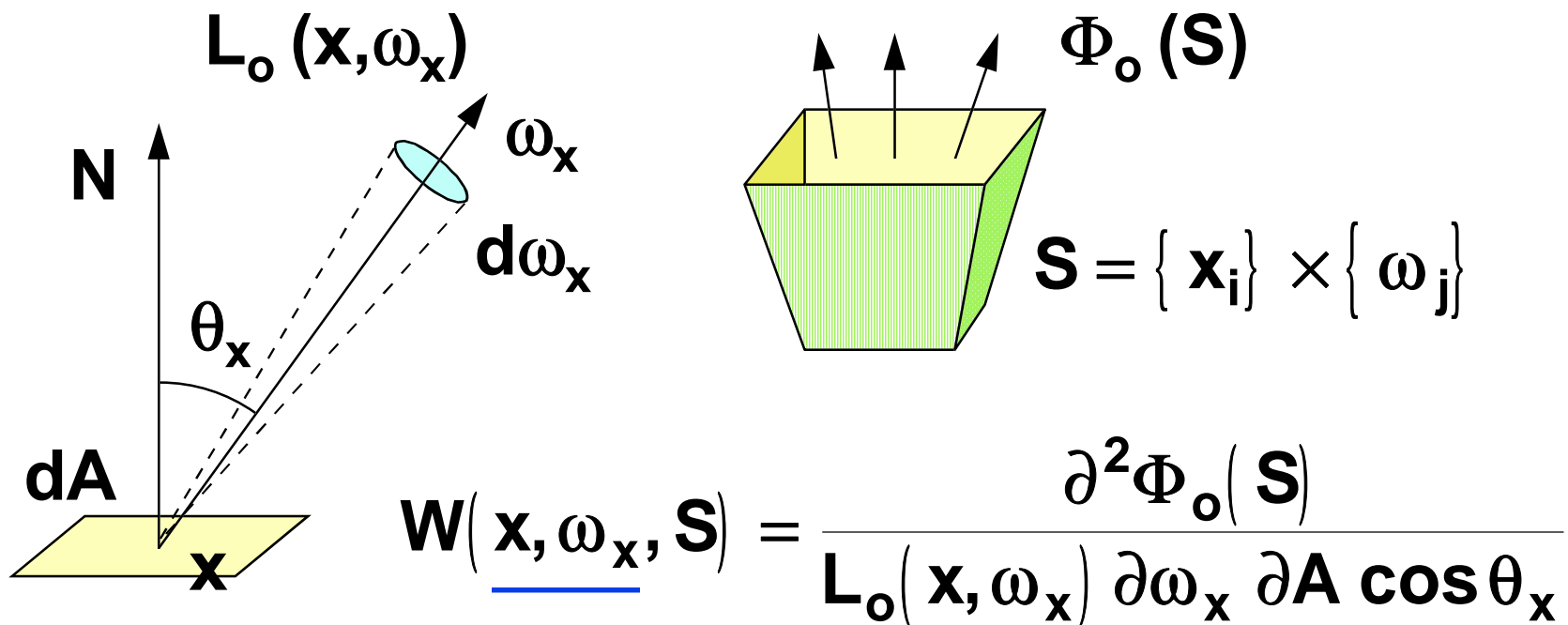
WWW: <http://cgg.ms.mff.cuni.cz/~pepca/>

Dualita v teorii zobrazování

- ➔ **zobrazovací rovnice** (J. Kajiya, '86)
 - teoretická formulace základů realistického zobrazování
- ➔ **důležitost** (“importance” - B. Smits, '92)
 - použití pojmu důležitosti (potenciálu) v radiační metodě
- ➔ **zavedení duality** (S. Pattanaik, '93)
 - duální operátory a rovnice - prostředek k řešení úlohy globálního osvětlení scény

Důležitost (potenciál)

- výkon procházející svazkem \mathbf{S} jako důsledek jednotkové radiance z bodu \mathbf{x} směrem ω_x [1]


$$W(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{S}) = \frac{\partial^2 \Phi_o(\mathbf{S})}{L_o(\mathbf{x}, \omega_x) \partial \omega_x \partial A \cos \theta_x}$$

Výkon procházející svazkem \mathbf{S}

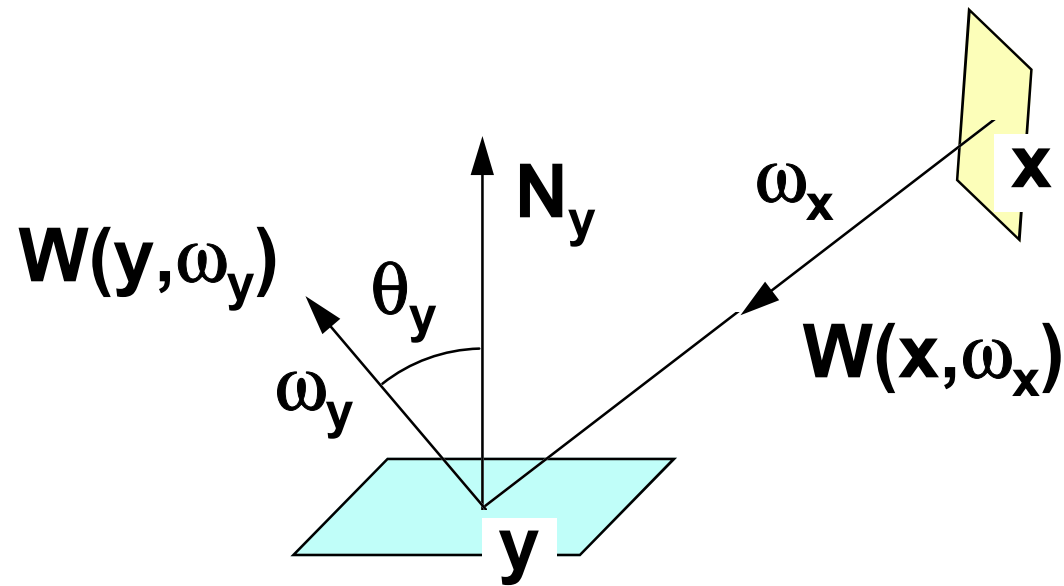
→ vyjádřený pomocí radiance na povrchu ploch
($\mathbf{W}_e(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{S})$ je $\mathbf{1}$ pro $[\mathbf{x}, \omega_x] \in \mathbf{S}$, jinak $\mathbf{0}$):

$$\Phi_o(\mathbf{S}) = \int_A \int_{\Omega_x} \underline{\mathbf{L}(\mathbf{x}, \omega_x)} \cdot \mathbf{W}_e(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{S}) \cdot \cos \theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$

→ vyjádřený pomocí potenciální funkce a
vlastní radiance na povrchu ploch:

$$\Phi_o(\mathbf{S}) = \int_A \int_{\Omega_x} \mathbf{L}_e(\mathbf{x}, \omega_x) \cdot \underline{\mathbf{W}(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{S})} \cdot \cos \theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$

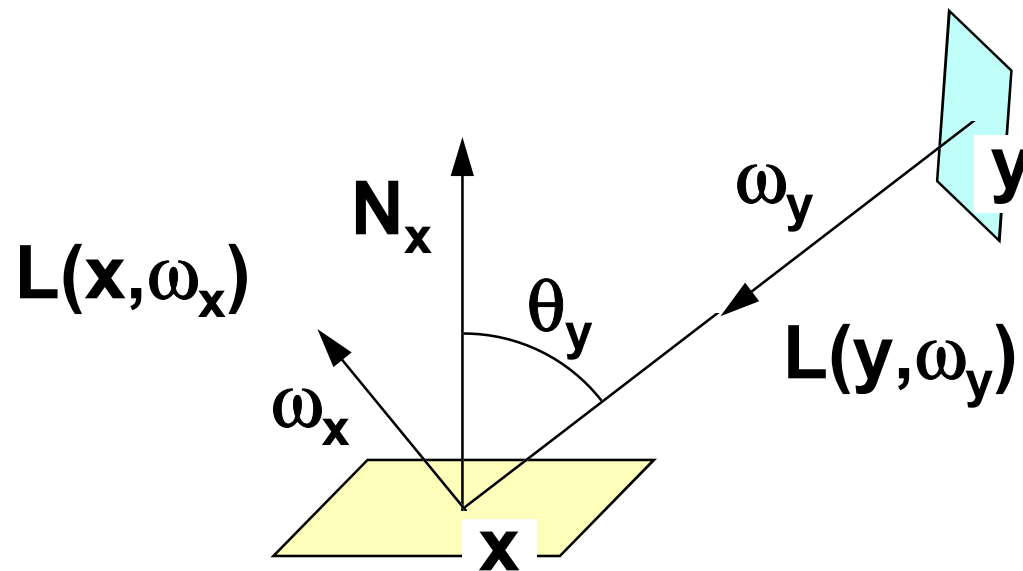
Rovnice pro potenciál



$$W(\mathbf{x}, \omega_x) =$$

$$= W_e(\mathbf{x}, \omega_x) + \int_{\Omega_y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega_x \rightarrow \omega_y) \cdot W(\mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y$$

Radiance přijímaná z plochy

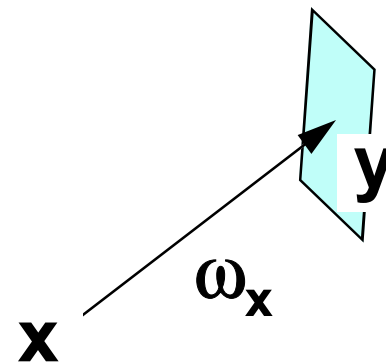


$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \omega_{\mathbf{x}}) &= \\ &= L_e(\mathbf{x}, \omega_{\mathbf{x}}) + \int_{\Omega_{\mathbf{x}}^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_{\mathbf{y}} \rightarrow \omega_{\mathbf{x}}) \cdot L(\mathbf{y}, \omega_{\mathbf{y}}) \cdot \cos \theta_{\mathbf{y}} \, d\omega_{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Funkcionální zápis

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_e + \mathbf{T}\mathbf{L}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_e + \mathbf{T}^*\mathbf{W}$$



$$(\mathbf{T}\mathbf{g})(\mathbf{x}, \omega_x) = \int_{\Omega_x^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_y \rightarrow \omega_x) \cdot \underline{\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega_y)} \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y$$

$$(\mathbf{T}^*\mathbf{g})(\mathbf{x}, \omega_x) = \int_{\Omega_y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega_x \rightarrow \omega_y) \cdot \underline{\mathbf{g}(\mathbf{y}, \omega_y)} \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y$$

Dualita radiance a potenciálu

Zavedení skalárního součinu:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_A \int_{\Omega_x} \underline{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_x)} \cdot \underline{\mathbf{g}(\mathbf{x}, \omega_x)} \cdot \cos \theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$

Operátory \mathbf{T} a \mathbf{T}^* jsou duálně sdružené:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{L}} &= \underline{\mathbf{L}}_e + \mathbf{T}\mathbf{L} & \Phi_o(\mathbf{S}) &= \langle \underline{\mathbf{L}}, \underline{\mathbf{W}}_e \rangle = \langle \underline{\mathbf{L}}_e, \underline{\mathbf{W}} \rangle \\ \underline{\mathbf{W}} &= \underline{\mathbf{W}}_e + \mathbf{T}^*\mathbf{W} \end{aligned}$$

Duální zápis globální rovnice

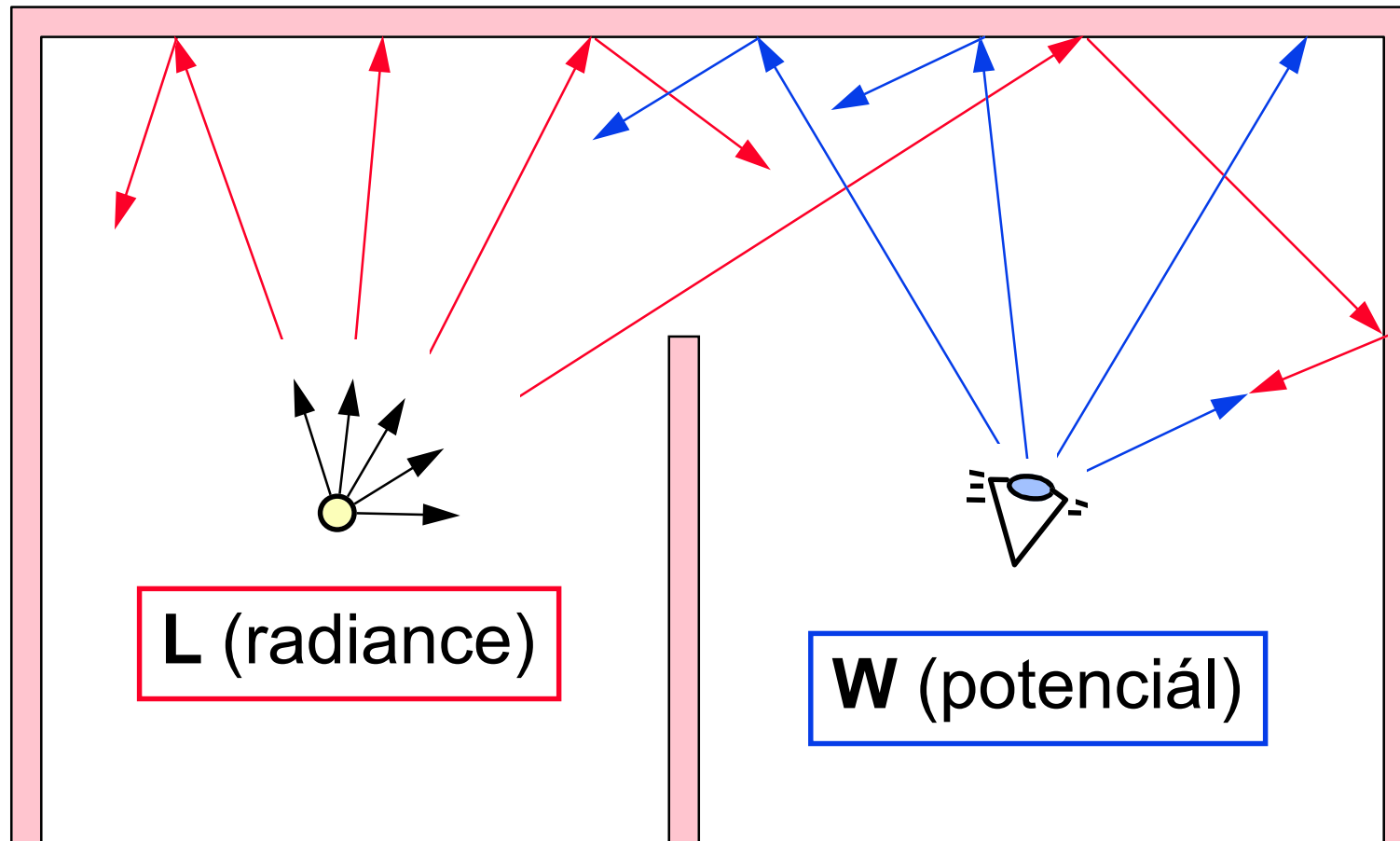
Pro radianci:

$$\begin{aligned} \underline{L(\mathbf{y}, \omega_y)} &= \\ &= \int_A \int_{\Omega_x} \underline{L_e(\mathbf{x}, \omega_x)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_x \, d\omega_x \, dA_x \end{aligned}$$

Pro potenciál (důležitost):

$$\begin{aligned} \underline{W(\mathbf{x}, \omega_x)} &= \\ &= \int_A \int_{\Omega_y} \underline{W_e(\mathbf{y}, \omega_y)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y \, dA_y \end{aligned}$$

Propagace světla a důležitosti



Aplikace na radiační metodu

- ➔ zlepšení **efektivity výpočtu** (B. Smits, '92)
 - současný výpočet radiosit i potenciálů
 - hierarchické zjemňování se provádí tam, kde dochází k velkému přenosu energie a plošky mají velkou důležitost
- ➔ **sbírání** (“gathering”) a **střílení** (“shooting”):
 - sbírání energie ... střílení potenciálu
 - střílení energie ... sbírání potenciálu

Výpočet důležitosti

Předávání **energie** z plošky \mathbf{A}_j na plošku \mathbf{A}_i :

$$\underline{\mathbf{B}_{i \leftarrow j}} = \rho_i \underline{\mathbf{F}_{ij}} \mathbf{B}_j = \rho_i \underline{\mathbf{F}_{ij}} \quad \text{pro } \mathbf{B}_j = 1$$

Předávání **důležitosti** z plošky \mathbf{A}_i na plošku \mathbf{A}_j :

$$\underline{\mathbf{l}_{i \rightarrow j}} = \mathbf{B}_{i \leftarrow j} \mathbf{l}_i = \rho_i \underline{\mathbf{F}_{ij}} \mathbf{l}_i$$

Soustava rovnic
pro důležitost:

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{R}_i + \sum_{j=1}^N \rho_j \mathbf{l}_j \mathbf{F}_{ji} \quad [1]$$

Dualita radiosity a důležitosti

$R_i > 0$, jestliže má poška A_i **přímý vliv** na výsledný obrázek (**faktor příjemce**)

Soustava pro **radiositu** v maticovém tvaru:

$$\underline{\mathbf{MB}} = \mathbf{E} \quad \text{pro} \quad \mathbf{M}_{ij} = \delta_{ij} - \rho_i \mathbf{F}_{ij}$$

Soustava pro **důležitost** v maticovém tvaru:

$$\underline{\mathbf{M}^T \mathbf{I}} = \mathbf{R}$$

Dualita operátorů \mathbf{M} a \mathbf{M}^T : $\langle \mathbf{X}, \mathbf{M}\mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{M}^T \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$

Výpočet osvětlení

Lineární forma $\mathbf{v}(\cdot)$ vyjadřuje požad. **výsledek**:

$$\underline{\mathbf{v}(\mathbf{B})} = \langle \mathbf{R}, \mathbf{B} \rangle = \sum_i \mathbf{R}_i \mathbf{B}_i$$

Použitím **duálních vztahů** dostaneme:

$$\underline{\mathbf{v}(\mathbf{B})} = \langle \mathbf{R}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{M}^T \mathbf{I}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{I}, \mathbf{M} \mathbf{B} \rangle = \underline{\langle \mathbf{I}, \mathbf{E} \rangle}$$

Můžeme tedy řešit jen **původní** nebo
jen **duální** soustavu rovnic!

Vylepšení hierarch. algoritmu

- ◆ duální soustava je **stejně těžká** jako původní
 - pouze řešením duální soustavy nic nezískáme
- ◆ známe-li **přibližná řešení** původní i duální soustavy, můžeme sestavit **přesnější řešení**
 - současně budeme počítat radiosity i důležitosti
- ➔ lepší pravidlo pro **zjemňování spojů**
 - kritériem bude součin **B·I·F** (“BIF-pravidlo”)
 - radiosita · důležitost · odhad konfiguračního faktoru

Konec

Další informace:

- **E. Lafortune: *Mathematical Models and Monte Carlo Algorithms for Physically Based Rendering***, PhD thesis, KU Leuven, 11-28
- **F. Sillion, C. Puech: *Radiosity and Global Illumination***, Morgan Kaufmann, 1994, 85-90