
Počítačová grafika III – Monte Carlo rendering 2

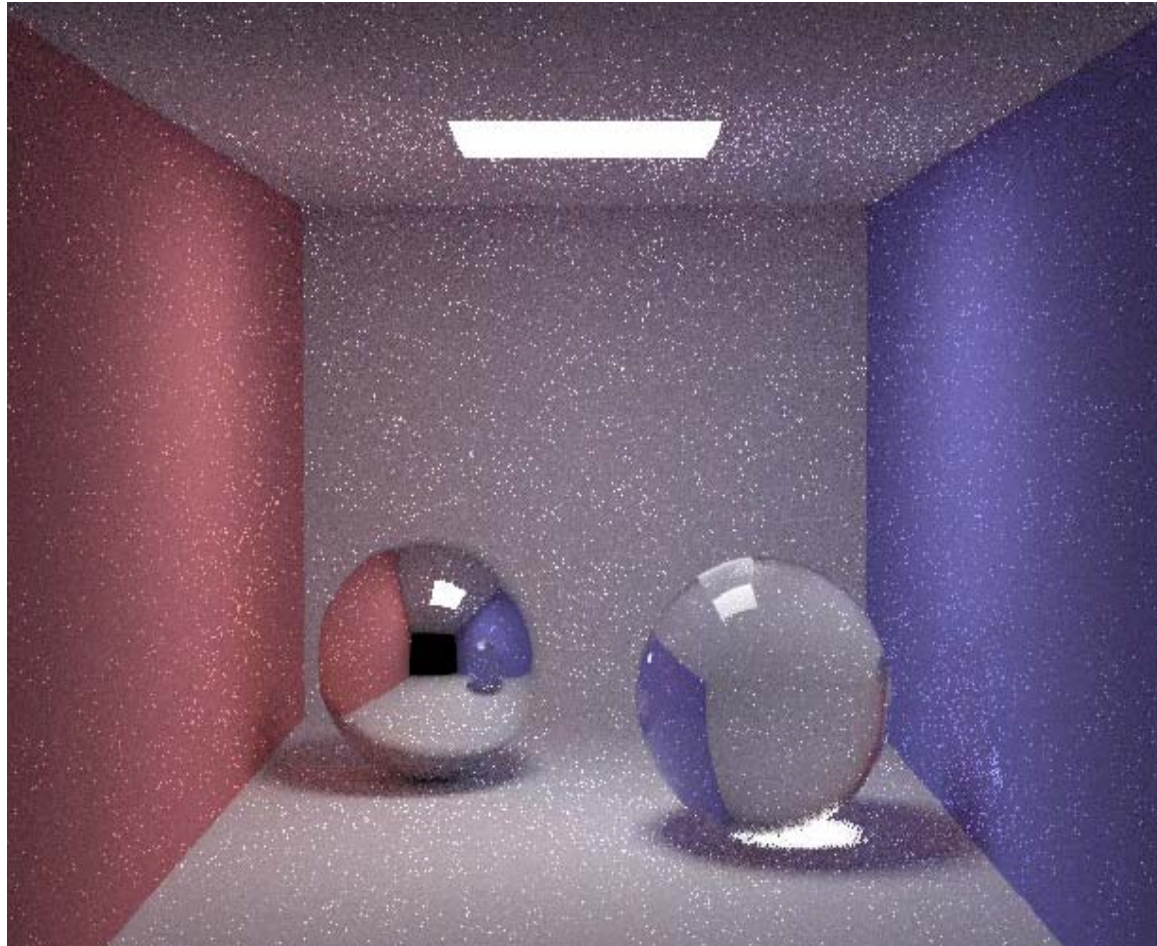
Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

Path Tracing – Implicitní osvětlení

```
getLi(x, w)
{
    Color thrput = (1,1,1)
    Color accum = (0,0,0)
    while(1)
    {
        hit = NearestIntersect(x, w)
        if no intersection
            return accum + thrput * bgRadiance(x, w)
        if isOnLightSource(hit)
            accum += thrput * Le(hit.pos, -w)
        ρ = reflectance(hit.pos, -w)
        if rand() < ρ // russian roulette - survive (reflect)
            wi := SampleDir(hit)
            thrput *= fr(hit.pos, wi, -w) * dot(hit.n, wi) / (ρ*p(wi))
            x := hit.pos
            w := wi
        else // absorb
            break;
    }
    return accum;
}
```

Náhodné vzorkování (nezávislé vzorky pro každý pixel)



Henrik Wann Jensen

10 cest na pixel

Fixní náhodná sekvence



10 cest na pixel

Henrik Wann Jensen

2006: „Monster house“ – Sledování cest (Path tracing)



Image courtesy of Columbia Pictures. © 2006 Columbia Pictures Industries, Inc. All rights reserved.

Sledování cest (Path tracing)



Image courtesy of Sony Pictures Animation. © 2009 Sony Pictures Animation, Inc. All rights reserved.

Sledování cest (Path tracing)



Image courtesy of Columbia Pictures. © 2009 Columbia Pictures Industries, Inc. All rights reserved.

Sledování cest (Path tracing)

Alice in the Wonderland, 2010



Images courtesy of Walt Disney Pictures

SOLIDANG

Výběr náhodného směru – BRDF IS

```
getLi(x, w)
{
    Color thrput = (1,1,1)
    Color accum = (0,0,0)
    while(1)
    {
        hit = NearestIntersect(x, w)
        if no intersection
            return accum + thrput * bgRadiance(x, w)
        if isOnLightSource(hit)
            accum += thrput * Le(hit.pos, -w)
        ρ = reflectance(hit.pos, -w)
        if rand() < ρ // russian roulette - survive (reflect)
            wi := SampleDir(hit)
            thrput *= fr(hit.pos, wi, -w) * dot(hit.n, wi) / (ρ * p(wi))
            x := hit.pos
            w := wi
        else // absorb
            break;
    }
    return accum;
}
```

Výběr náhodného směru – BRDF IS

- Obyčejně vzorkujeme s hustotou „co nejpodobnější“ součinu

$$f_r(\omega_i, \omega_o) \cos \theta_i$$

- Ideálně bychom chtěli vzorkovat podle

$$L_i(\omega_i) f_r(\omega_i, \omega_o) \cos \theta_i,$$

ale to neumíme, protože neznáme L_i

- Co když bude hustota přesně úměrná $f_r(\omega_i, \omega_o) \cos \theta_i$?

„Ideální“ BRDF Importance Sampling

$$p(\omega_i) \propto f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i$$

$$p(\omega_i) = \frac{f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i}{\int_{H(\mathbf{x})} f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i}$$

odrazivost ρ

„Ideální“ BRDF IS v Path Traceru

- Obecná hustota (pdf)

```
...  
thruput *= fr(.) * dot(.) / ( rho * p(wi) )
```

- „Ideální“ BRDF importance sampling

$$p(\omega_i) = f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i / \rho$$

```
...  
thruput *= 1
```

Pravděpodobnost přežití cesty

```
getLi(x, w)
{
    Color thrput = (1,1,1)
    Color accum = (0,0,0)
    while(1)
    {
        hit = NearestIntersect(x, w)
        if no intersection
            return accum + thrput * bgRadiance(x, w)
        if isOnLightSource(hit)
            accum += thrput * Le(hit.pos, -w)
         $\rho = \text{reflectance}(\text{hit.pos}, -w)$ 
        if  $\text{rand}() < \rho$  // russian roulette - survive (reflect)
            wi := SampleDir(hit)
            thrput *= fr(hit.pos, wi, -w) * dot(hit.n, wi) / ( $\rho$  * p(wi))
            x := hit.pos
            w := wi
        else // absorb
            break;
    }
    return accum;
}
```

Pravděpodobnost přežití cesty

- Použití odrazivosti ρ jako p-nosti přežití dává smysl
 - Pokud plocha odráží jen 30% energie, pokračujeme pouze s 30% pravděpodobností.

- Co když neumím spočítat ρ ?

- Alternativa

1. Nejdříve vygeneruj náhodný směr podle $p(\omega_i)$

2.
$$q_{\text{survival}} = \min \left\{ 1, \frac{f_r(\omega_i \rightarrow \omega_o) \cos \theta_i}{p(\omega_i)} \right\}$$

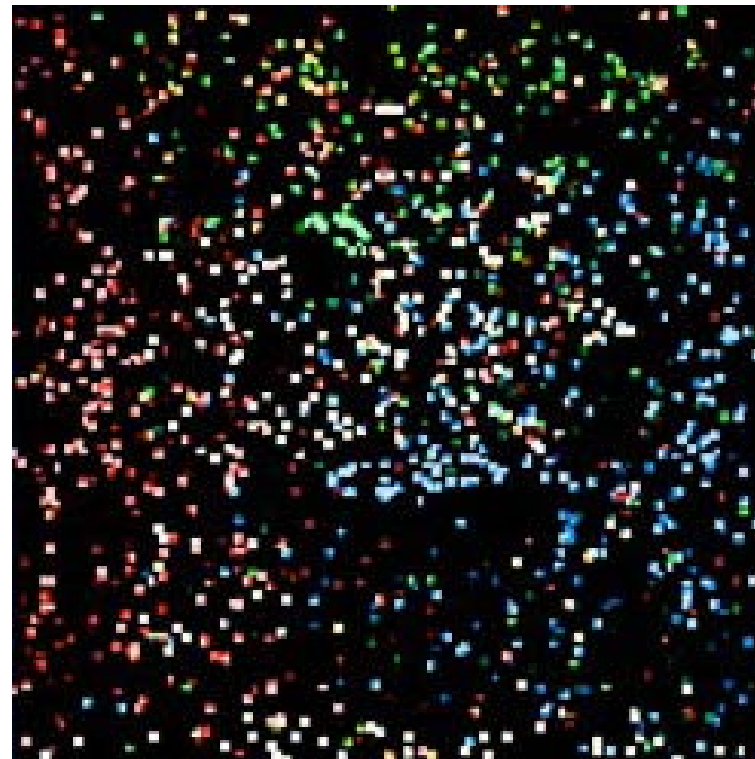
- Pro „ideální“ BRDF IS stejné jako původní metoda

Výpočet přímého osvětlení

Problém: Najde path tracer světlo?



reference



simple path tracer
(150 cest na pixel)

Images: Alexander Wilkie

Přímé osvětlení

- Zapomeňme na chvíli na path tracing
- Řešíme jednodušší problém:

přímé osvětlení z daného zdroje světla

tj. odražená radiance z bodu \mathbf{x} způsobená osvětlením ze zdroje světla

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

- **Vzorkování BRDF**

- **Vzorkování plochy světla**

Přímé osvětlení: Vzorkování BRDF

■ Formulace integrálu (integrování přes hemisféru)

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{H(\mathbf{x})} L_e(\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

■ MC estimátor

- Generujeme náhodný směr $\omega_{i,k}$ podle hustoty p
- Vrhne paprsek z \mathbf{x} ve směru $\omega_{i,k}$
- Pokud protne nějaký zdroj světla, přičteme $L_e(\cdot) f_r(\cdot) \cos/\text{pdf}$

$$\hat{L}_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{L_e(\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega_{i,k}), -\omega_{i,k}) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_{i,k} \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_{i,k}}{p(\omega_{i,k})}$$

Přímé osvětlení: Vzorkování světel

- **Formulace integrálu** (integrování přes plochu zdroje)

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_A L_e(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot V(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) dA_y$$

- **MC estimátor**

- Generujeme náhodnou pozici \mathbf{y}_k na zdroji
- Testujeme viditelnost mezi \mathbf{x} a \mathbf{y}
- Pokud $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})=1$, přičteme $|A| L_e(\mathbf{y}) f_r(\cdot) \cos/\text{pdf}$

$$\hat{L}_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{|A|}{N} \sum_{k=1}^N L_e(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot V(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x})$$

Dvě vzorkovací techniky

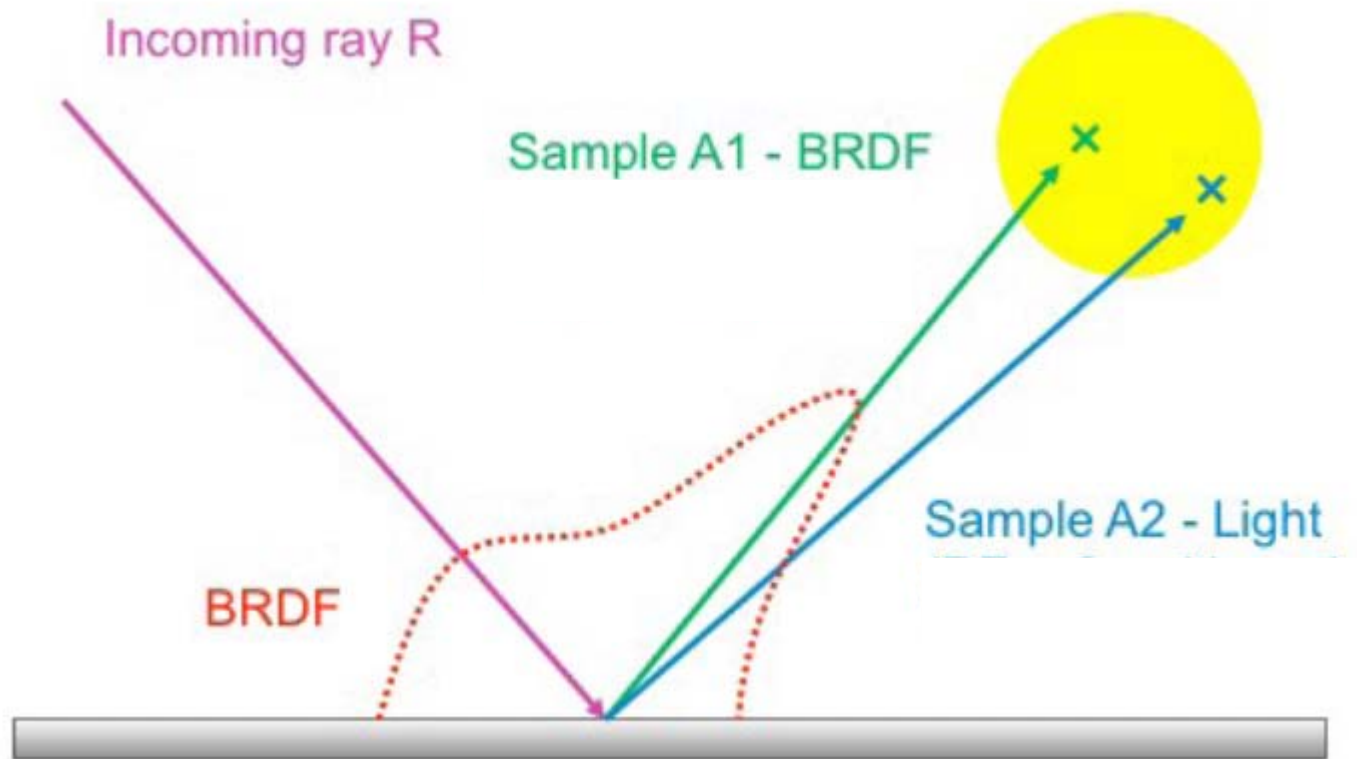


Image: Alexander Wilkie

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

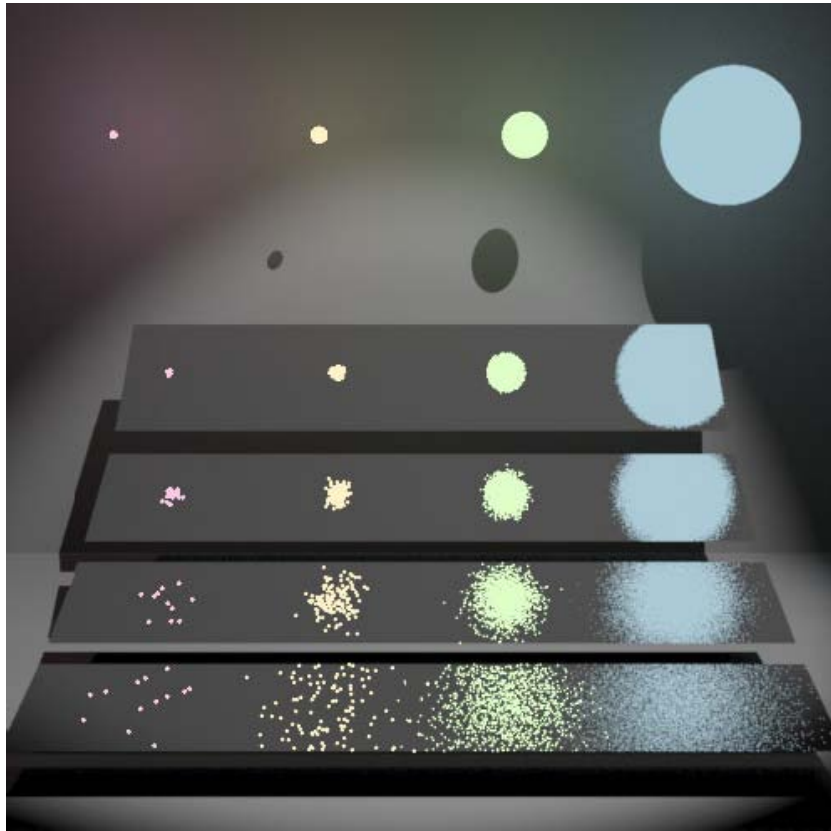
■ Vzorkování BRDF

- Výhodnější pro velké zdroje světla
- Pro malé zdroje světla je pravděpodobnost zásahu zdroje velmi malá -> vysoký rozptyl, šum

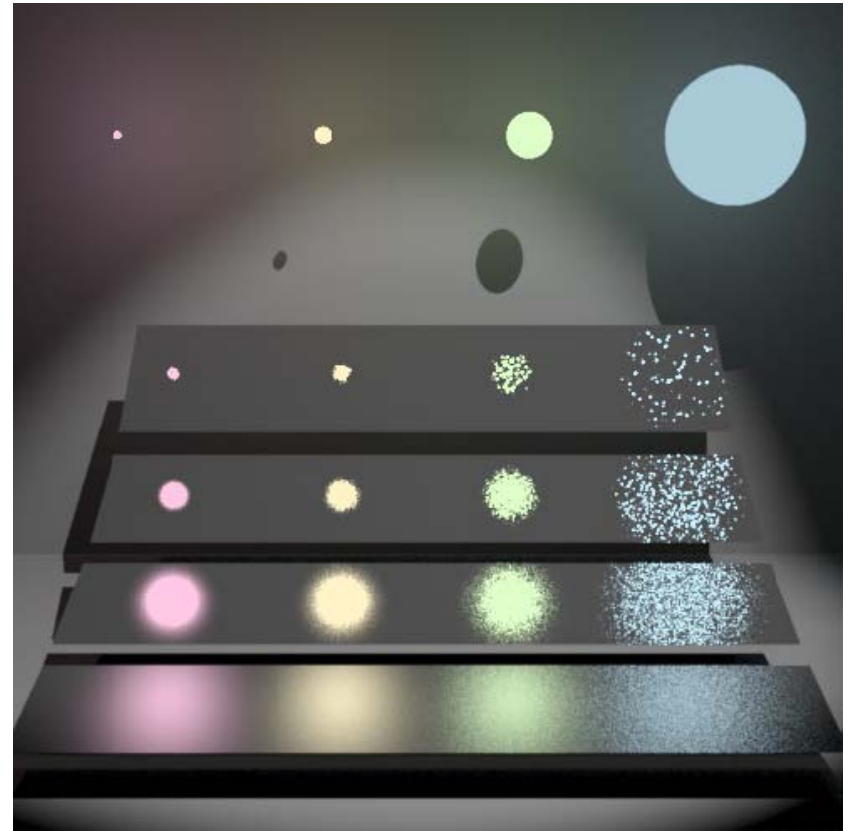
■ Vzorkování světel

- Výhodnější pro malé zdroje
- Jediná možná alternativa pro bodové zdroje
- Pro velké zdroje mnoho vzorků mimo lalok BRDF -> vysoký rozptyl, šum

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy



Vzorkování BRDF



Vzorkování světel

Images: Eric Veach

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

- Kterou techniku zvolit?
 - **OBĚ**
- **Problém**
 - Obě techniky odhadují stejnou veličinu $L_r(\mathbf{x}, \omega_o)$
 - Pouhým sečtením bychom dostali odhad $2 L_r(\mathbf{x}, \omega_o)$ - špatně
 - Potřebuji vážený průměr příspěvků obou technik
 - **Jak zvolit váhy?**

Jak zvolit váhy?

- **Multiple importance sampling** (Veach & Guibas, 95)
- Váhy závislé na pdf vzorků
- Minimalizuje rozptyl kombinovaného estimátoru
- Téměř optimální řešení

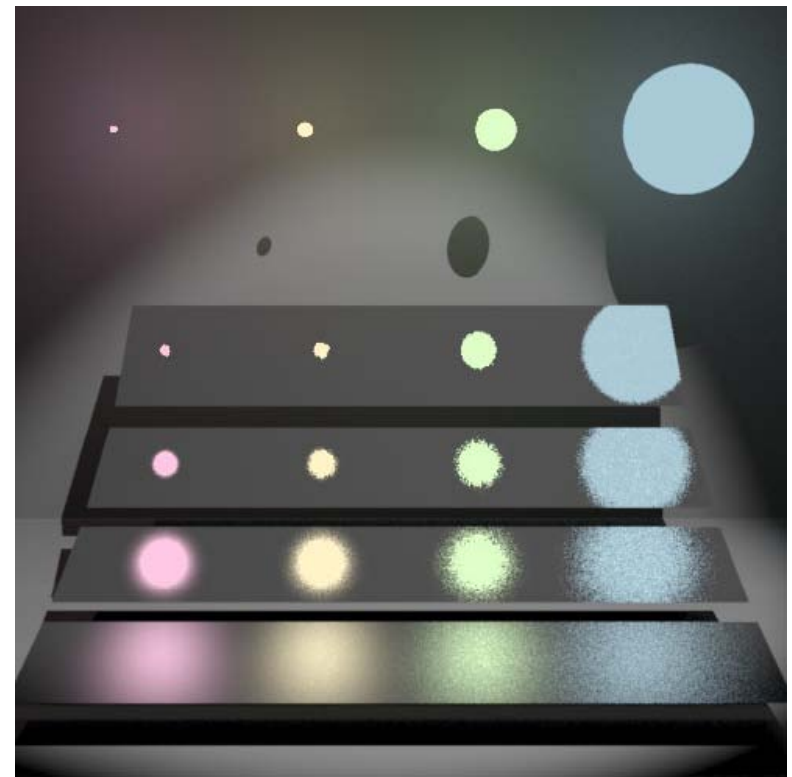
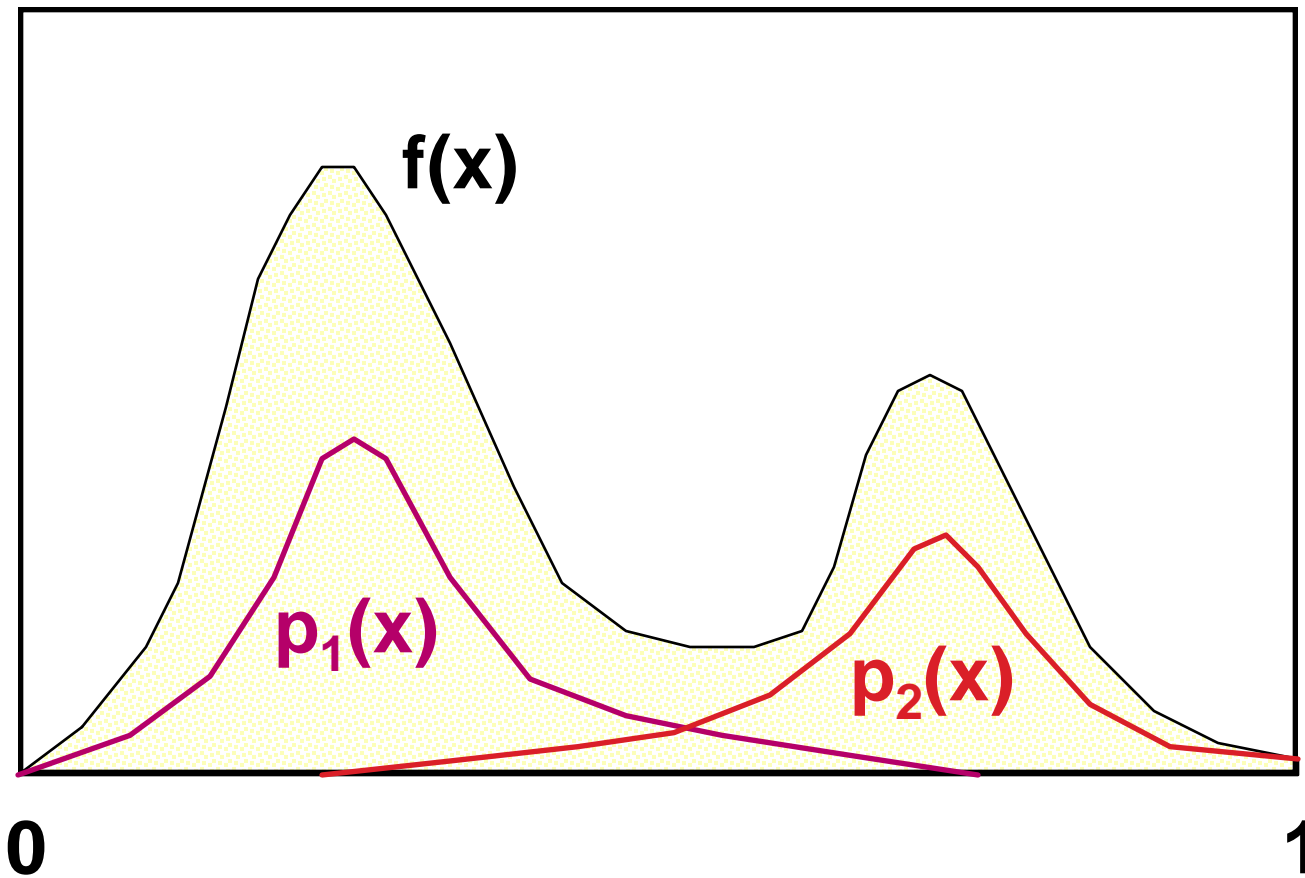


Image: Eric Veach

Multiple Importance Sampling



Multiple importance sampling

- Máme dáno n vzorkovacích technik (hustot pravděpodobnosti) $p_1(\mathbf{x}), \dots, p_n(\mathbf{x})$
- Z každé techniky (hustoty) vybereme n_i vzorků $X_{i,1}, \dots, X_{i,n_i}$
- **Kombinovaný estimátor**
(mohou být různé pro každý vzorek)

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} w_i(X_{i,j}) \frac{f(X_{i,j})}{p_i(X_{i,j})}$$

vzorkovací techniky

vzorky z jednotlivých technik

kombinační váhy
(mohou být různé pro každý vzorek)

Nestrannost kombinovaného odhadu

$$E[F] = \dots = \int \left[\sum_{i=1}^n w_i(x) \right] f(x) dx \equiv \int f(x)$$

- Podmínka pro váhové funkce

$$\forall x: \sum_{i=1}^n w_i(x) = 1$$

Volba váhových funkcí

- **Cíl:** minimalizovat rozptyl kombinovaného estimátoru

1. Aritmetický průměr (velmi špatná kombinace)

$$w_i(x) = \frac{1}{n}$$

2. Vyrovnaná heuristika (velmi dobrá kombinace)

□

Vyrovnaná heuristika (Balance heuristic)

- Kombinační váhy

$$\hat{w}_i(\mathbf{x}) = \frac{n_i p_i(\mathbf{x})}{\sum_k n_k p_k(\mathbf{x})}$$

- Výsledný estimátor (po dosazení vah)

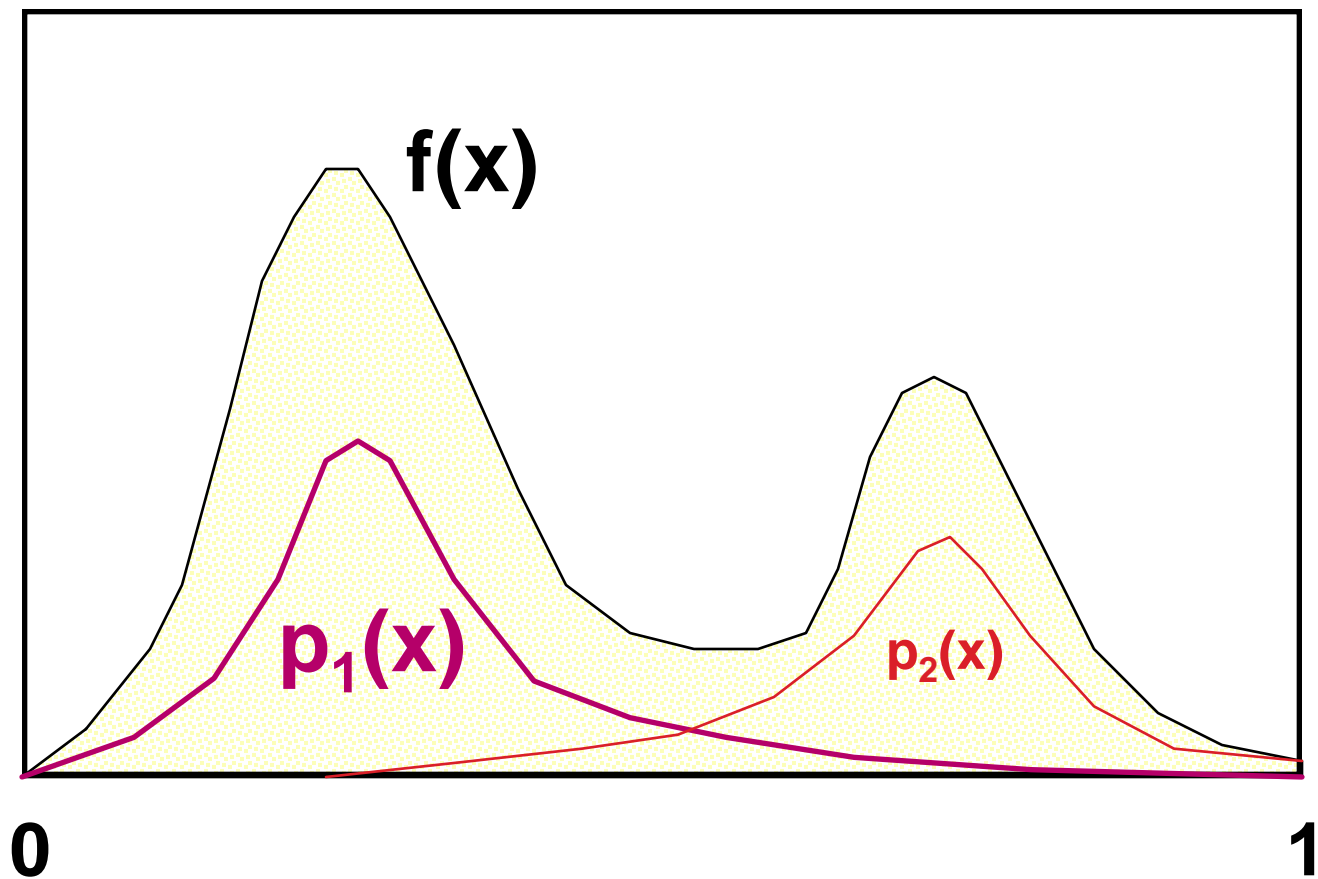
$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \frac{f(X_{i,j})}{\sum_k n_k p_k(X_{i,j})}$$

- příspěvek vzorku nezávisí na tom, ze které byl pořízen techniky (tj. pdf)

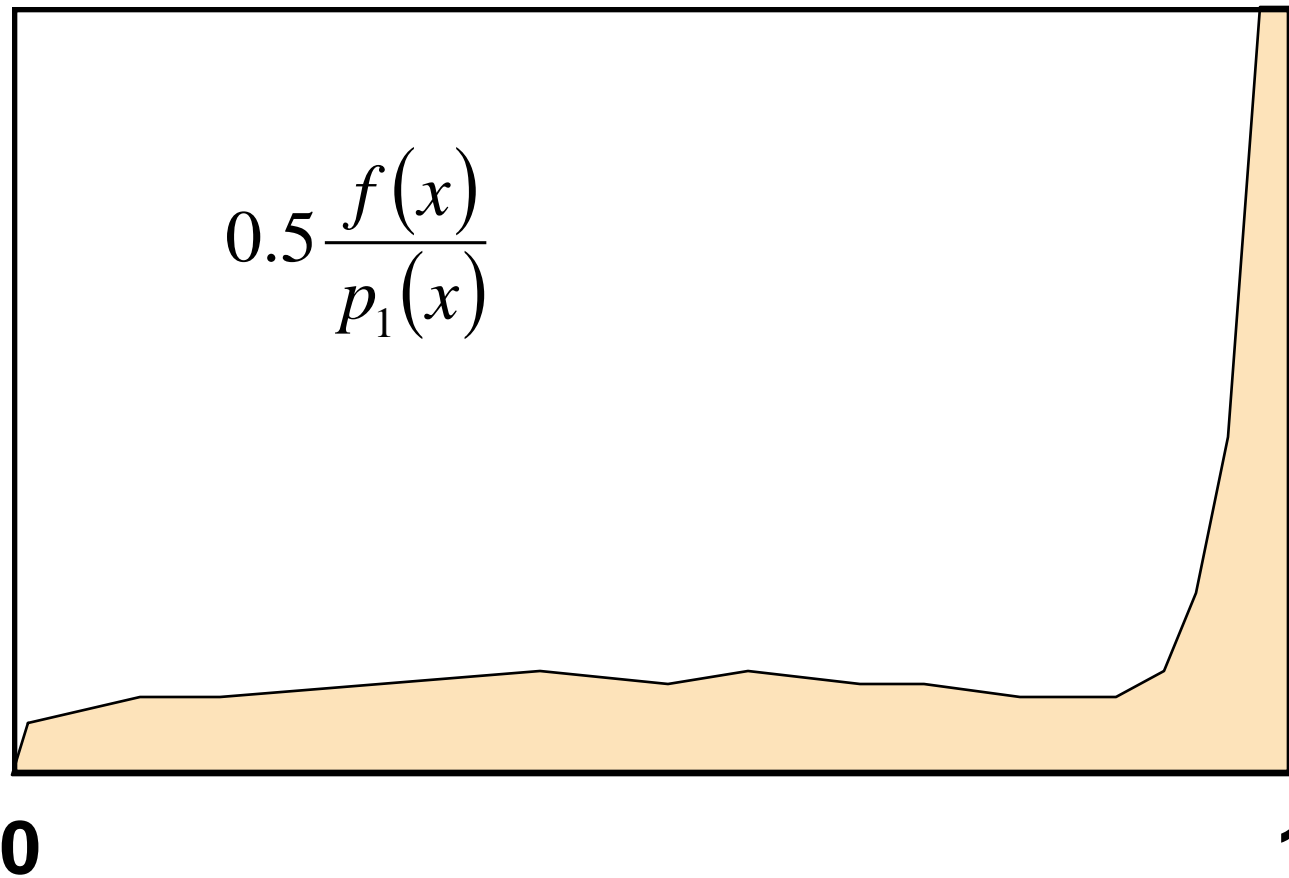
Vyrovnaná heuristika (Balance heuristic)

- Vyrovnaná heuristika je téměř optimální
 - Žádný kombinovaný estimátor nemůže mít rozptyl „o mnoho“ menší než vyrovnaná heuristika
- Další možné kombinační heuristiky
 - Maximální heuristika
 - Mocninná heuristika
 - viz. Veach 1997

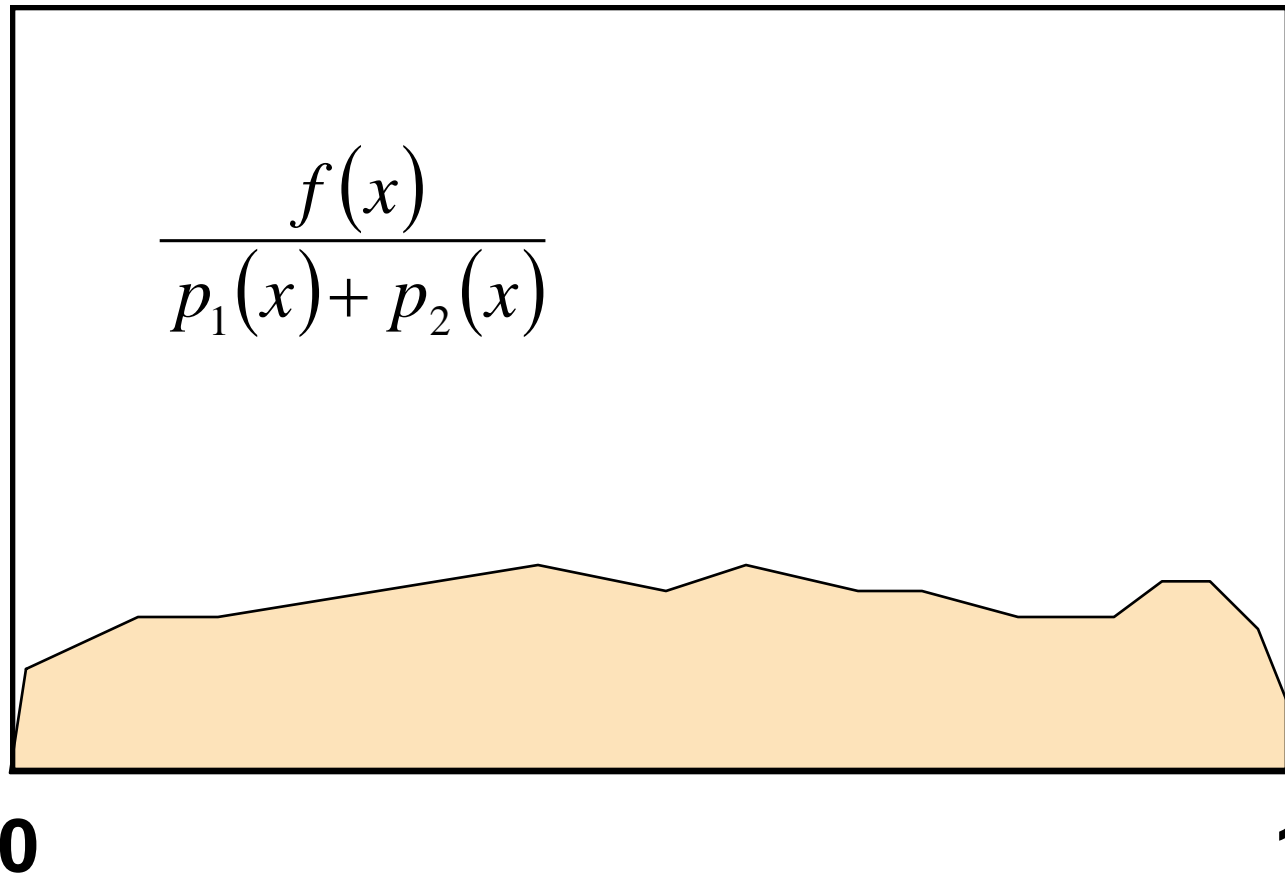
Jeden člen kombin. odhadu



Aritmetický průměr



Vyrovnaná heuristika



Výpočet přímého osvětlení pomocí MIS

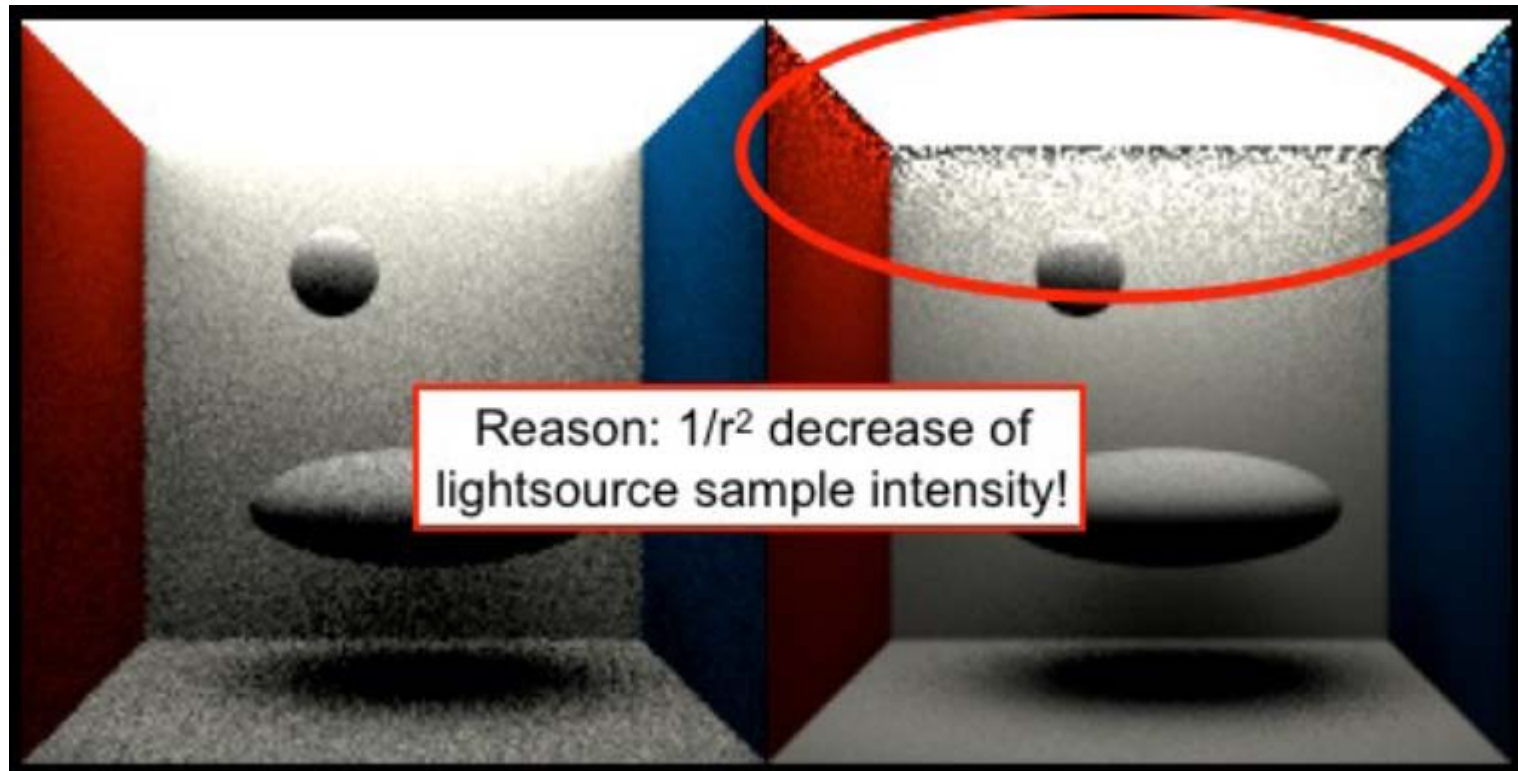
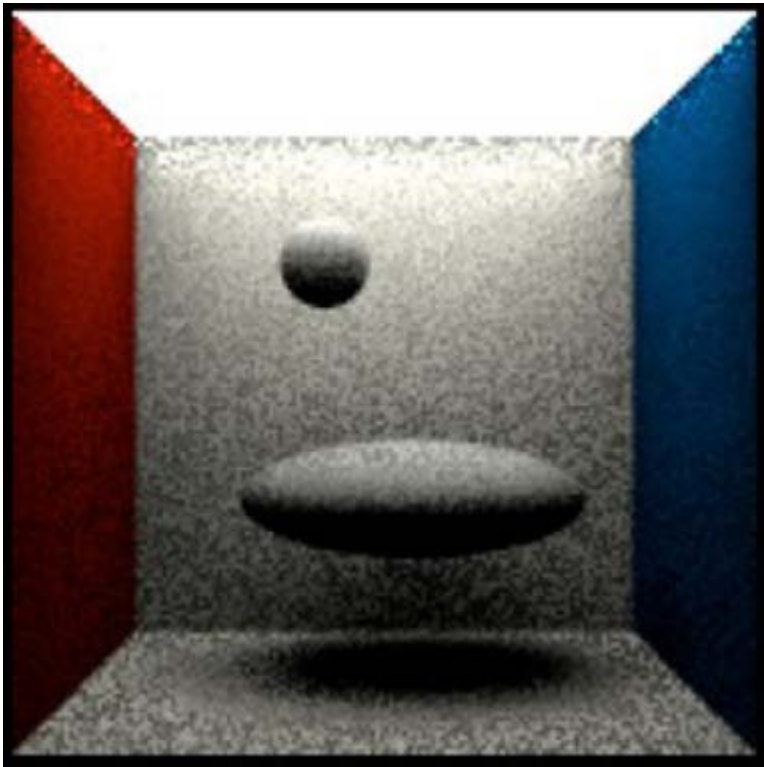


Image: Alexander Wilkie

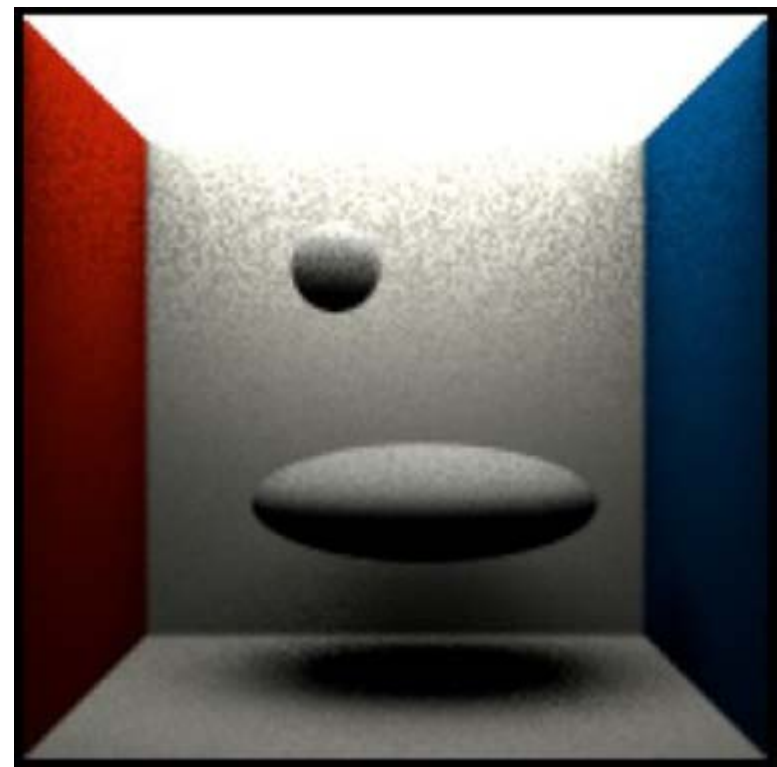
**Vzorkovací technika (pdf) p_1 :
Vzorkování BRDF**

**Vzorkovací technika (pdf) p_2 :
Vzorkování světel**

Kombinace



Aritmetický průměr
Zachovává špatné vlastnosti
obou technik



Vyrovnaná heuristika
Bingo!!!

Image: Alexander Wilkie

Dvě vzorkovací techniky

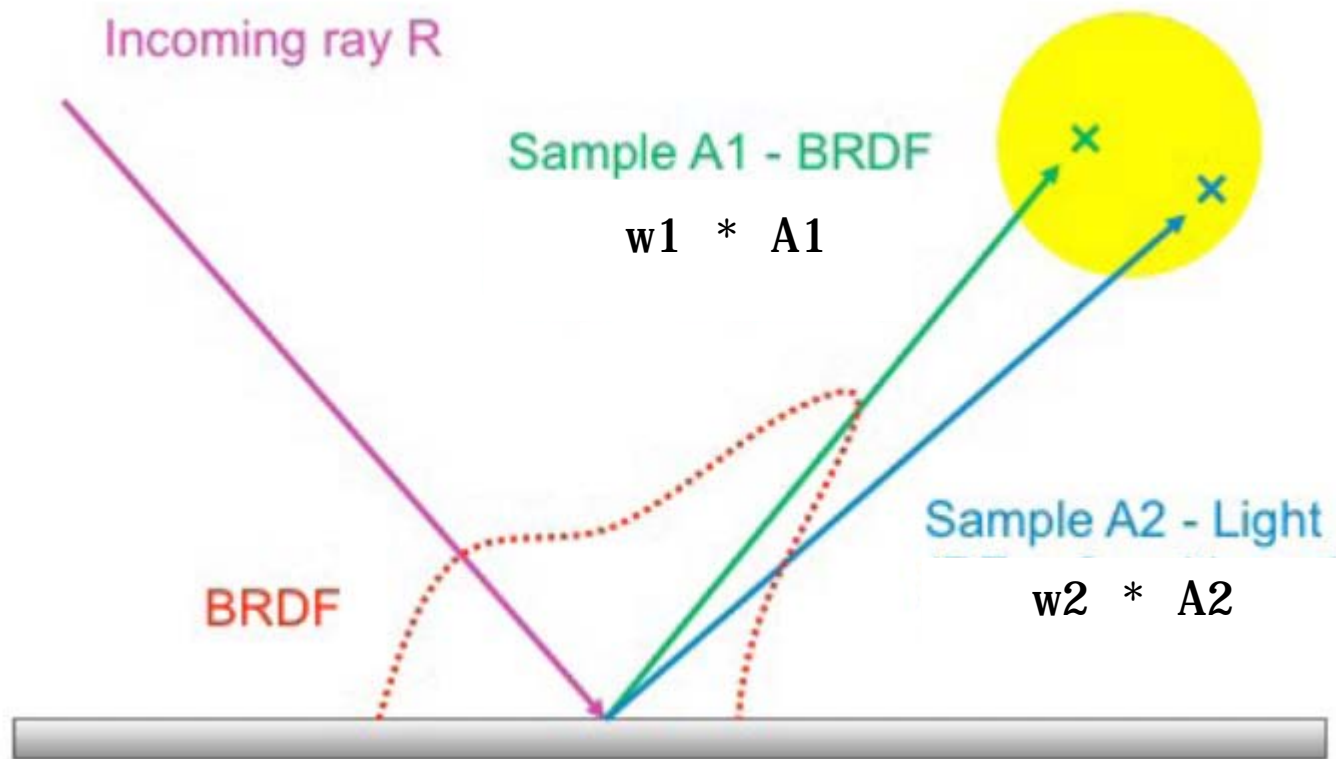


Image: Alexander Wilkie

Výpočet vah

Váha vzorku z
BRDF vzorkování

$$w_1(\omega_j) = \frac{p_1(\omega_j)}{p_1(\omega_j) + p_2(\omega_j)}$$

Hustota pravděpodobnosti
vzorkování z BRDF

**Hustota, s jakou by byl směr ω_j vygenerován,
kdybychom použili vzorkování plochy zdroje**

Hustoty pravděpodobnosti

- **Vzorkování BRDF: $p_1(\omega)$**

- Závisí na BRDF, např. pro Lambertovskou BRDF

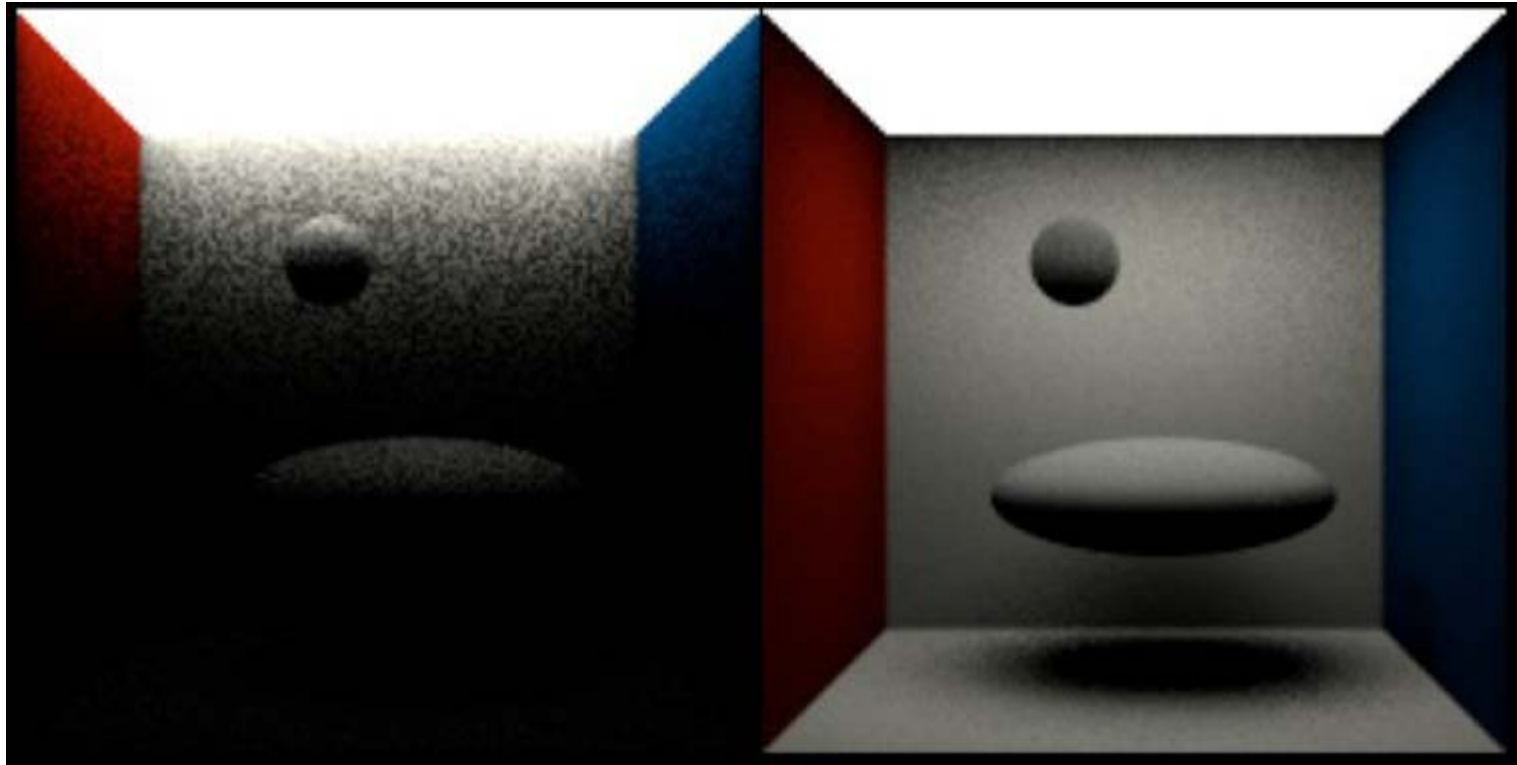
$$p_1(\omega) = \frac{\cos \theta_x}{\pi}$$

- **Vzorkování zdroje: $p_2(\omega)$**

$$p_2(\omega) = \frac{1}{|A|} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{\cos \theta_y}$$

↖ **Převodní hustoty $1/|A|$ z plošné míry (dA) do míry prostorového úhlu (d ω)**

Příspěvky vzorkovacích technik



w1 * vzorkování BRDF

w2 * vzorkování zdroje

Image: Alexander Wilkie

Použití MIS v path traceru

- Generování explicitního stínového paprsku pro techniku p_2 (vzorkování zdroje)
- Sekundární paprsek pro techniku p_1 (vzorkování zdroje)
 - Sdílený pro výpočet **přímého** i **nepřímého** osvětlení
 - Pouze na přímé osvětlení se aplikuje MIS váha (nepřímé osvětlení se připočte celé)
- Při výpočtu MIS vah je potřeba vzít v úvahu pravděpodobnost ukončení cesty (ruská ruleta)

Více zdrojů světla

- **Možnost 1:**
 - Stínový paprsek pro náhodný bod na každém zdroji světla
- **Možnost 2:**
 - Náhodný výběr zdroje (s p-ností podle výkonu)
 - Stínový paprsek k náhodně vybranému bodu na vybraném zdroji
- **Pozor: Pravděpodobnost výběru zdroje ovlivňuje hustoty (a tedy i váhy) v MIS**
- **Dobrá heuristika**
 - Možnost 2 až po prvním nelesklém odrazu

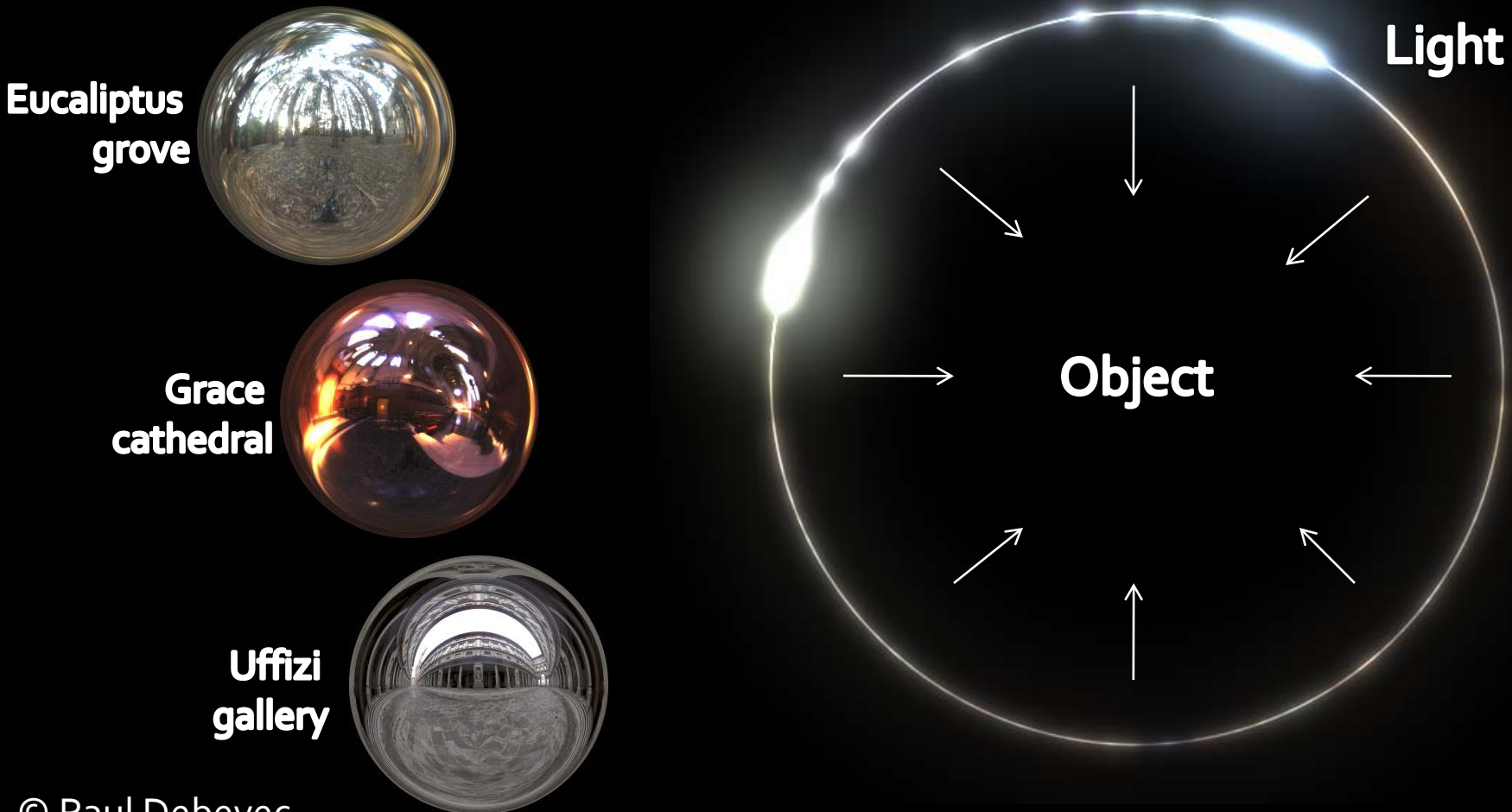
Osvětlení z mapy prostředí

Image-based lighting

- Introduced by Paul Debevec (Siggraph 98)
- Routinely used for special effects in films & games

Image-based lighting

- Illuminating CG objects using measurements of real light (=light probes)



Point lighting

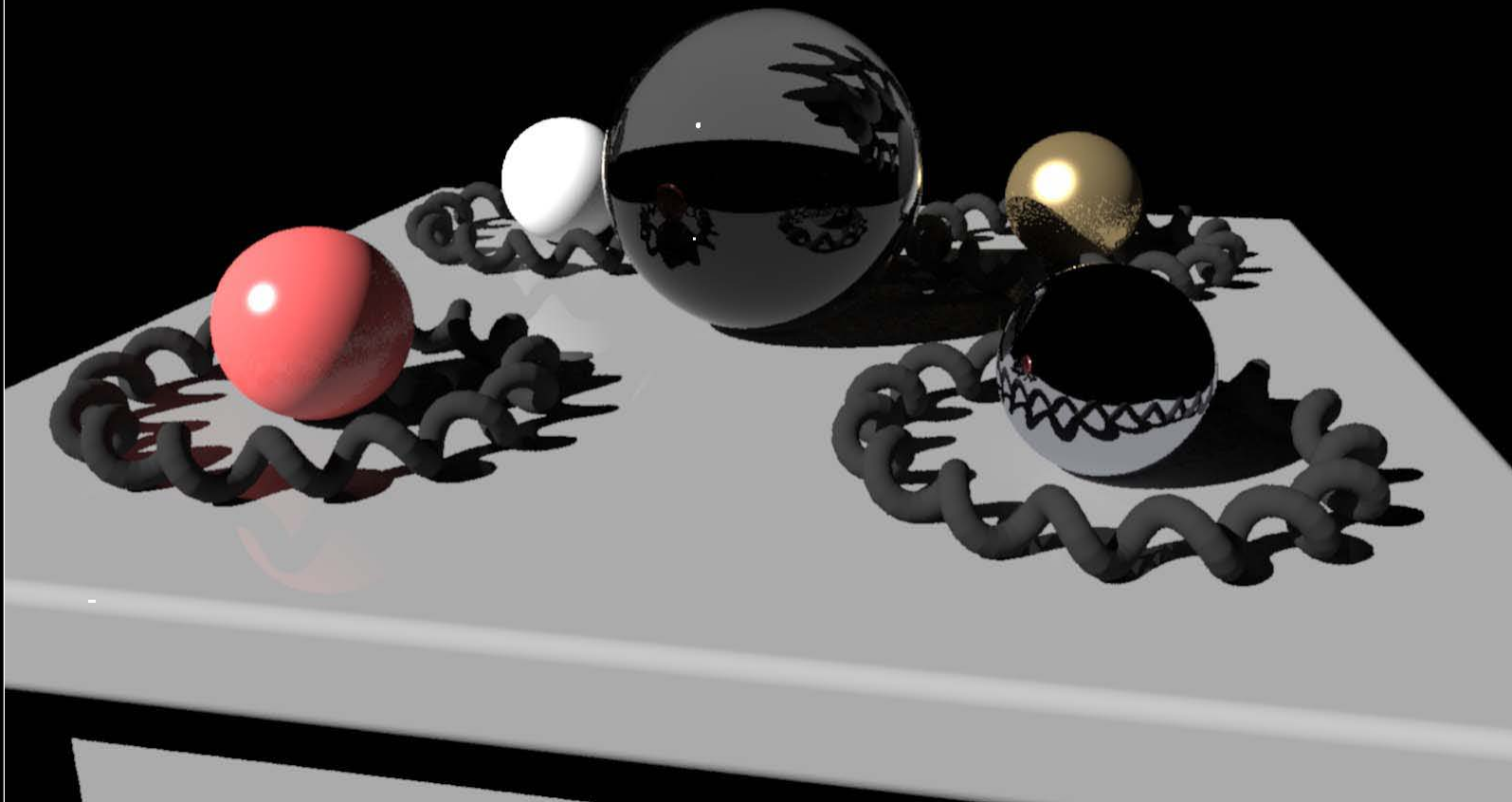


Image-based lighting

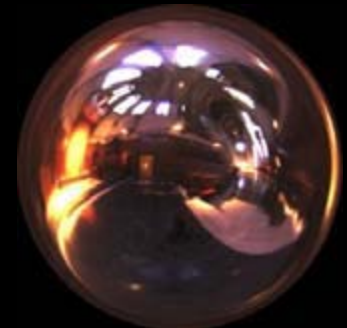
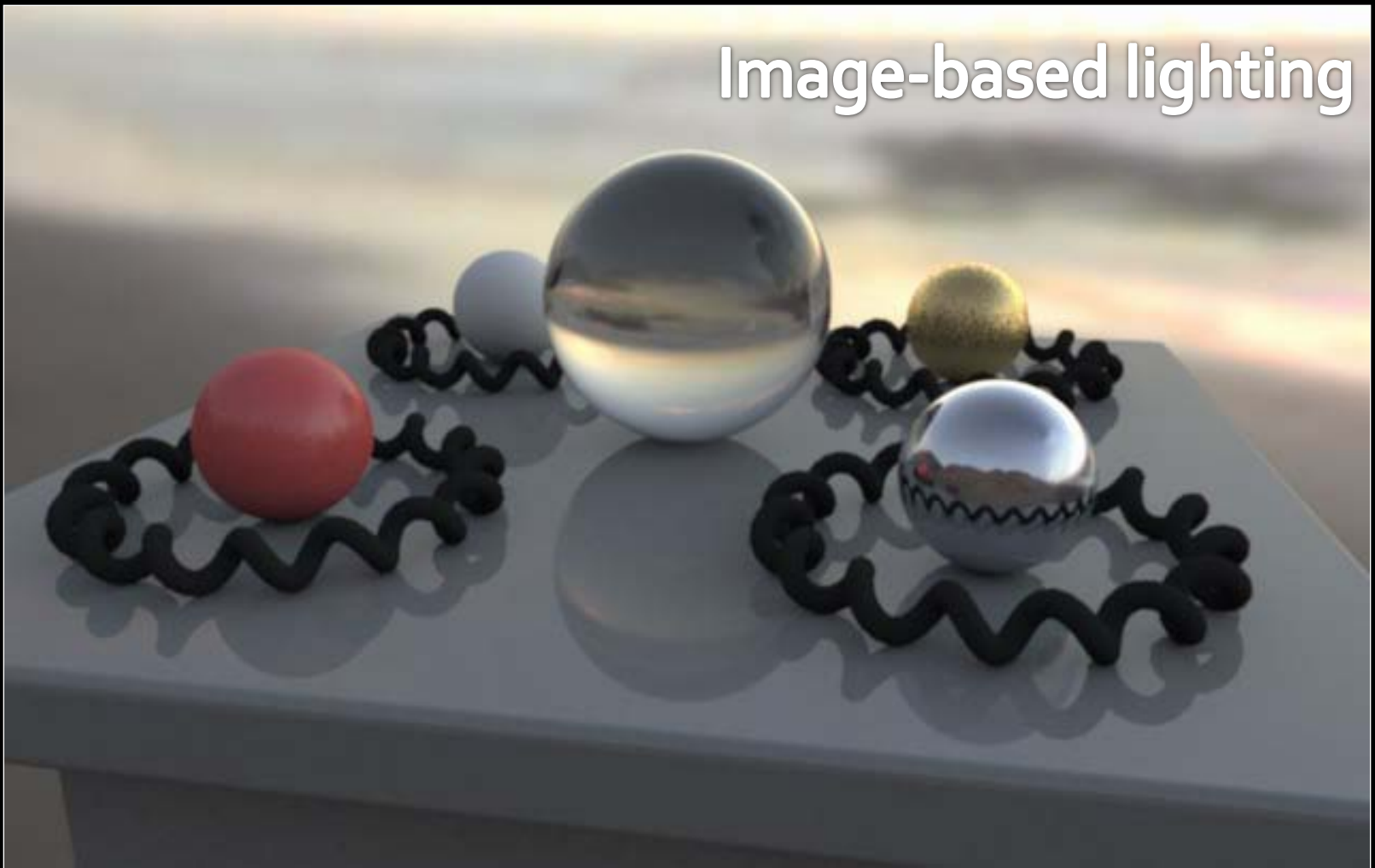


Image-based lighting

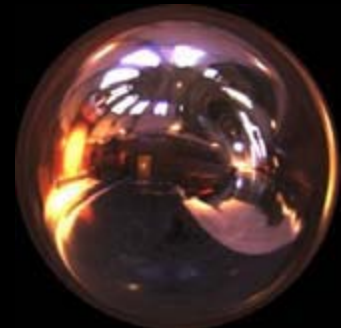
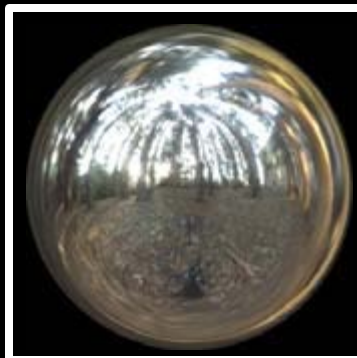


Image-based lighting

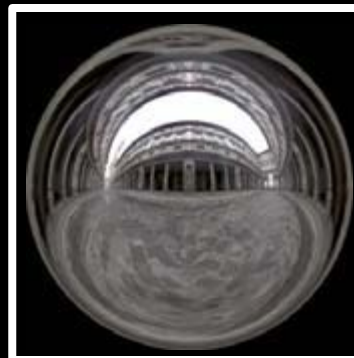
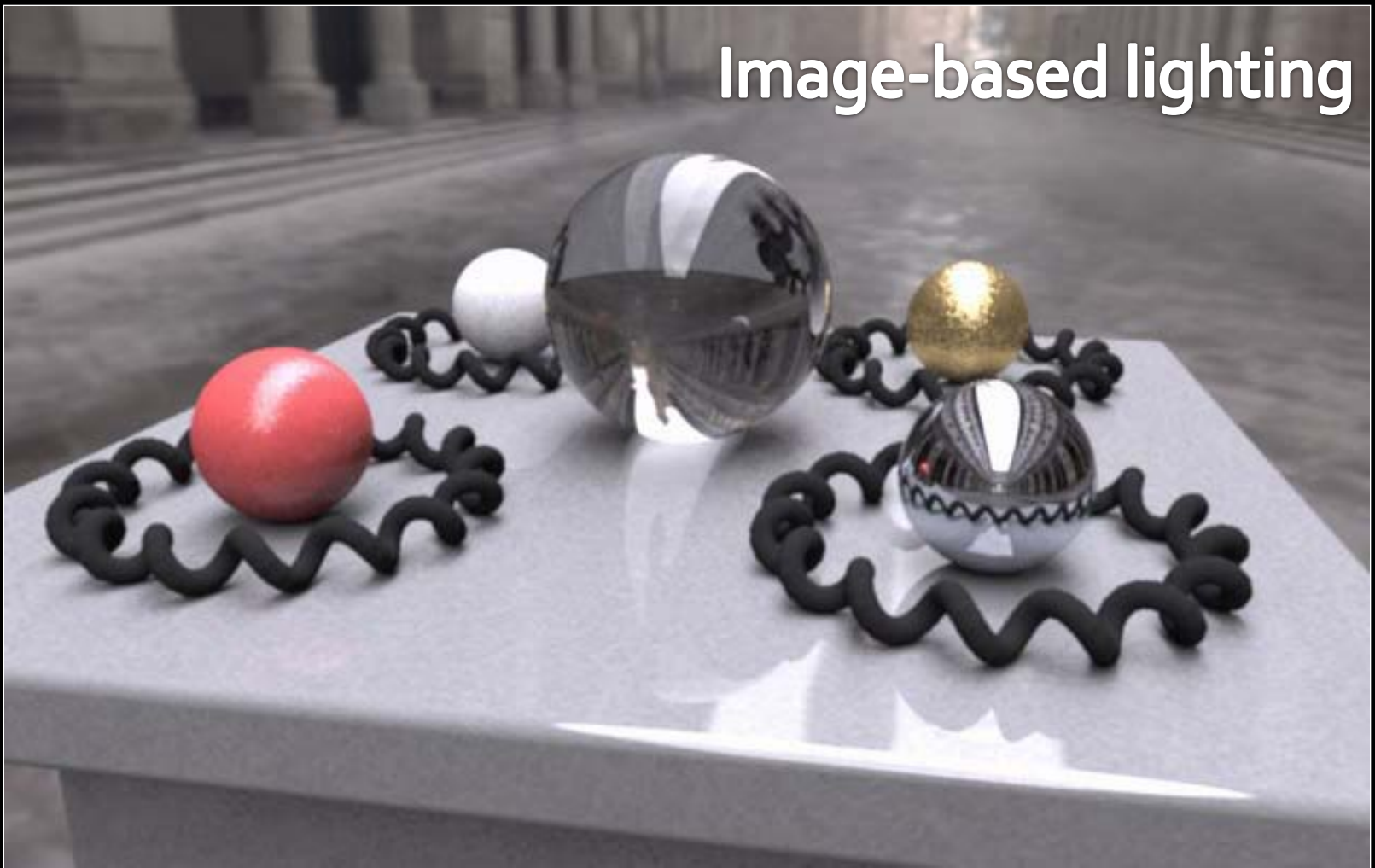
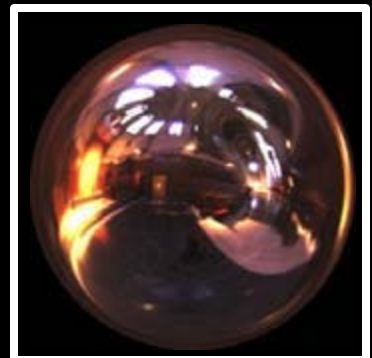
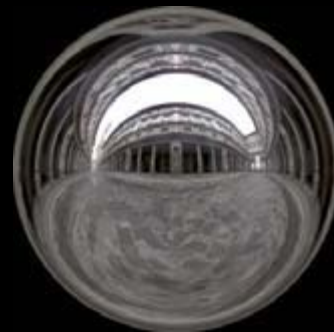
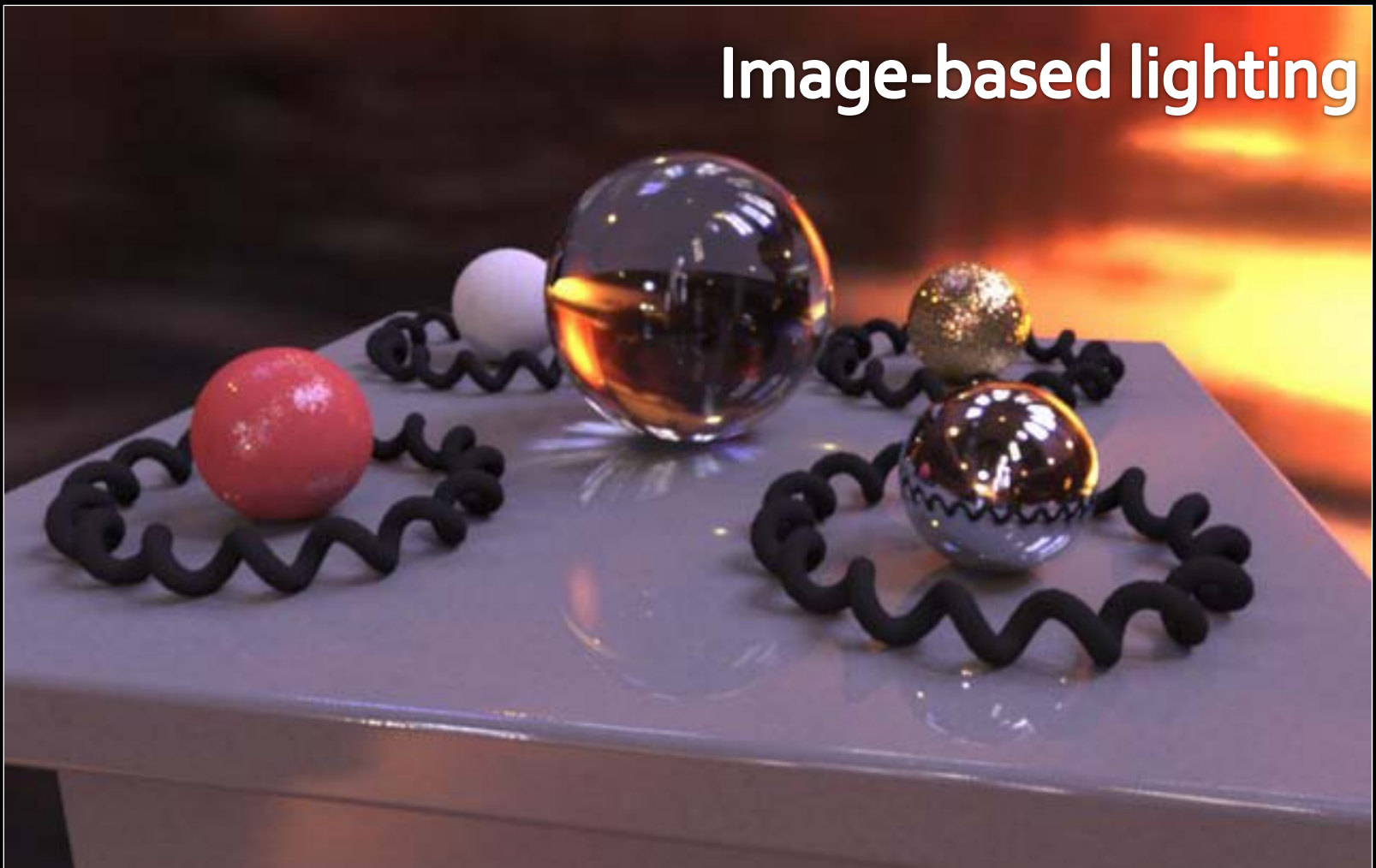


Image-based lighting



Mapping

Eucalyptus grove



Eucalyptus Grove Light Probe
©1999 Paul Debevec
<http://www.debevec.org/Probes>

Grace cathedral



Grace Cathedral Light Probe
©1999 Paul Debevec
<http://www.debevec.org/Probes>

Debevec's spherical

"Latitude – longitude" (spherical coordinates)

Cube map

Mapping

Uffizi gallery



St. Peter's Cathedral



Debevec's spherical

"Latitude – longitude" (spherical coordinates)

Cube map

Mapping

- Mapping from direction in Cartesian coordinates to image UV.

```
float d = sqrt(dir.x*dir.x + dir.y*dir.y);  
float r = d>0 ? 0.159154943*acos(dir.z)/d : 0.0;  
u = 0.5 + dir.x * r;  
v = 0.5 + dir.y * r;
```



Quote from "<http://ict.debevec.org/~debevec/Probes/>"

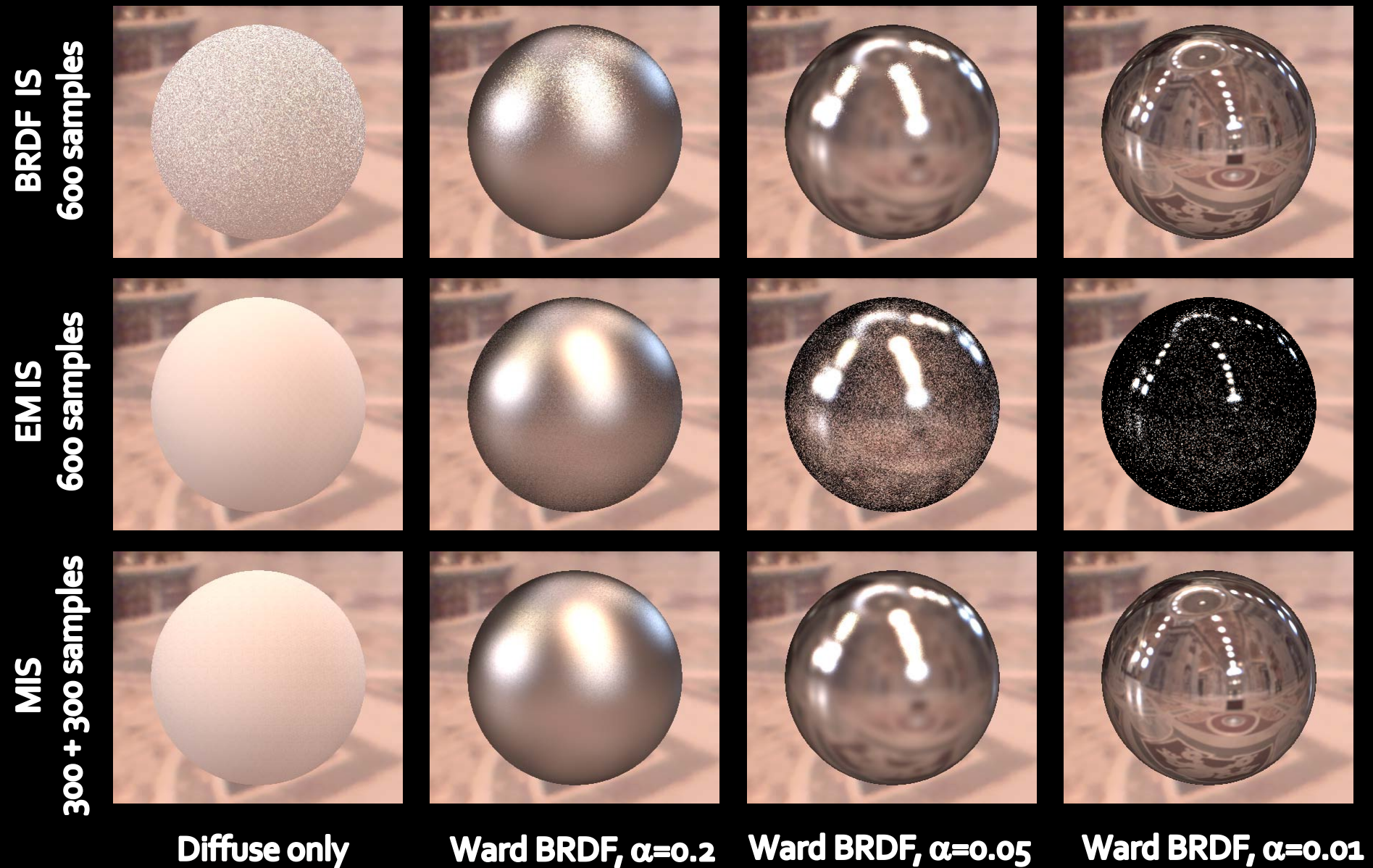
The following light probe images were created by taking two pictures of a mirrored ball at ninety degrees of separation and assembling the two radiance maps into this registered dataset. The coordinate mapping of these images is such that the center of the image is straight forward, the circumference of the image is straight backwards, and the horizontal line through the center linearly maps azimuthal angle to pixel coordinate.

Thus, if we consider the images to be normalized to have coordinates $\mathbf{u}=[-1,1]$, $\mathbf{v}=[-1,1]$, we have $\theta=\text{atan2}(\mathbf{v},\mathbf{u})$, $\phi=\pi\sqrt{\mathbf{u}*\mathbf{u}+\mathbf{v}*\mathbf{v}}$. The unit vector pointing in the corresponding direction is obtained by rotating $(0,0,-1)$ by ϕ degrees around the y (up) axis and then θ degrees around the $-z$ (forward) axis. If for a direction vector in the world (D_x, D_y, D_z) , the corresponding (\mathbf{u},\mathbf{v}) coordinate in the light probe image is (D_x*r, D_y*r) where $r=(1/\pi)*\text{acos}(D_z)/\sqrt{D_x^2 + D_y^2}$.*

Sampling strategies

- Technique (pdf) 1:
BRDF importance sampling
 - Generate directions with a pdf proportional to the BRDF
- Technique (pdf) 2:
Environment map importance sampling
 - Generate directions with a pdf proportional to $L(\omega)$ represented by the EM

Sampling strategies

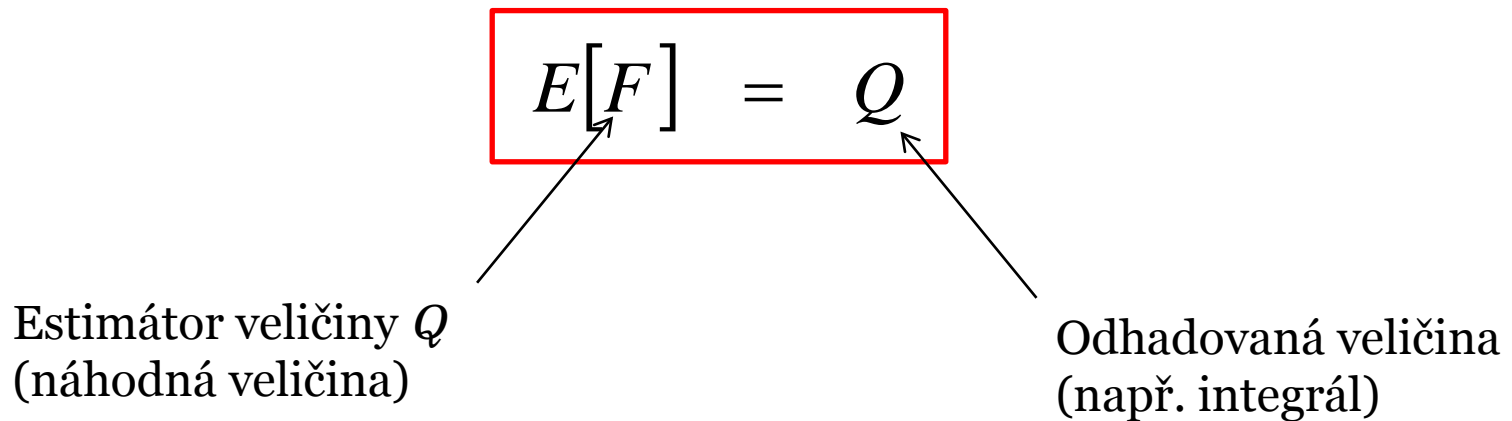


Vlastnosti estimátorů

Nestrannost obecného estimátoru

■ Nestrannost estimátoru (obecně):

- V průměru estimátor dává správnou veličinu (bez systematické chyby)



Výchylka obecného estimátoru (bias)

- Pokud

$$E[F] \neq Q$$

- pak estimátor není nestranný (je vychýlený, „**biased**“).
- Systematická chyba, **bias**

$$\beta = Q - E[F]$$

Konzistentnost (obecného estimátoru)

- Nechť

$$F_N = F_N(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

- Estimátor F_N je **konzistentní** pokud

$$Pr \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} F_N = Q \right\} = 1$$

tj. pokud **chyba** $F_N - Q$ jde k nule s pravděpodobností 1.

Konzistentnost (obecného estimátoru)

- Postačující podmínka pro konzistentnost estimátoru:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \beta[F_N] = \lim_{N \rightarrow \infty} V[F_N] = 0$$

↑
bias

(tj. ne každý nestranný estimátor je konzistentní)

Zobrazovací algoritmy

■ **Nestranné (unbiased)**

- ❑ Sledování cest (path tracing)
- ❑ Obousměrné sledování cest (bidirectional path tracing)
- ❑ Metropolis light transport

■ **Konzistentní (consistent)**

- ❑ Progresivní fotonové mapy (progressive photon mapping)

■ **Nekonzistentní, vychýlené (biased)**

- ❑ Fotonové mapy (photon mapping)
- ❑ Irradiance / radiance caching

Střední kvadratická chyba (Mean Squared Error – MSE)

■ Definice

$$MSE[F] = E[(F - Q)^2]$$

■ Platí

$$MSE[F] = V[F] + \beta[F]^2$$

□ Důkaz

$$\begin{aligned} MSE[F] &= E[(F - Q)^2] \\ &= E[(F - E[F])^2] + 2E[F - E[F]](E[F] - Q) + (E[F] - Q)^2 \\ &= V[F] + \beta[F]^2, \end{aligned}$$

Střední kvadratická chyba (Mean Squared Error – MSE)

- Pokud F je nestranný, pak

$$MSE[F] = V[F]$$

tj. pro nestranný estimátor je snazší odhadnout chybu, protože rozptyl estimátoru lze odhadnout ze vzorků Y_i :

- Nestranný **estimátor rozptylu**

$$\hat{V}[F_N] = \frac{1}{N-1} \left\{ \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i^2 \right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i \right)^2 \right\}$$

Účinnost estimátoru

- Pro nestranný estimátor je **účinnost** (eficience, angl. efficiency) dána vztahem:

$$\epsilon[F] = \frac{1}{V[F] T[F]}$$

rozptyl

čas výpočtu (počet operací, např. počet vržených paprsků)