Lineární transformace

© 1995-2019 Josef Pelikán

CGG MFF UK Praha

pepca@cgg.mff.cuni.cz

https://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/

Požadavky

Běžně používané transformace

- posunutí, otočení, zvětšení/zmenšení, zkosení…
- rovnoběžná i perspektivní projekce

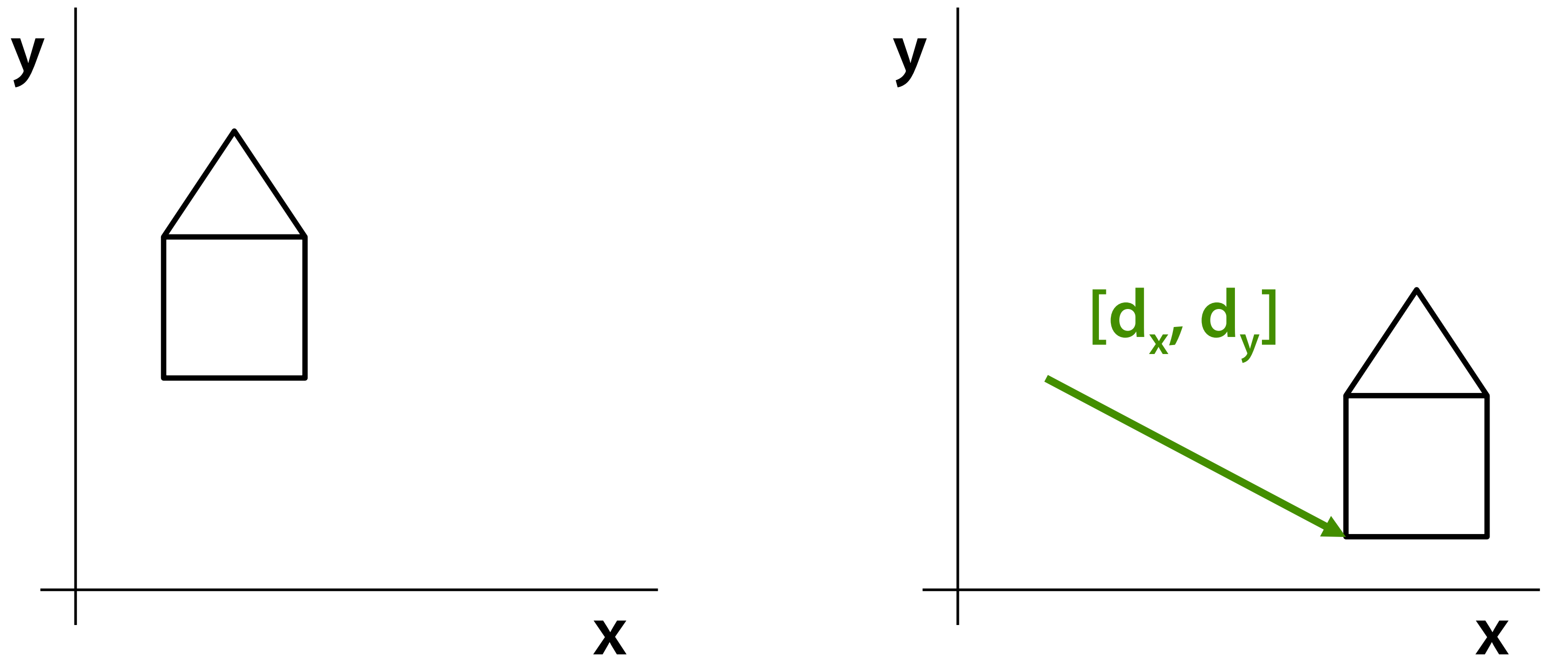
Snadná a **efektivní implementace**

- výpočty se provádějí masově (běžně i 10^8 transformací najednou)

Zvláštní úkony

- zřetězení jednoduchých transformací, výpočet inverzní transformace…

Posunutí v rovině



$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x & d_y \end{bmatrix}$$

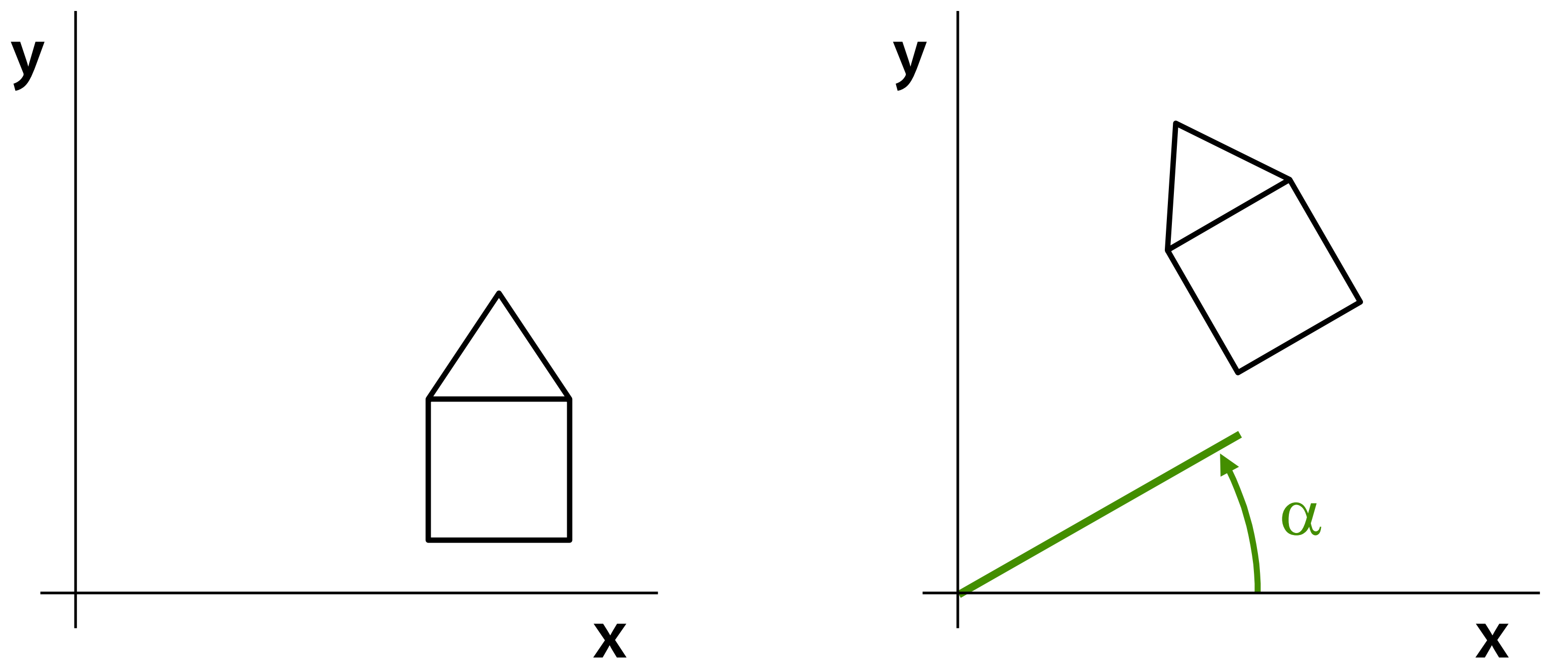
Maticové transformace

Násobení vektoru souřadnic **maticí zprava**

- à la **DirectX** (**OpenGL** to má obráceně)
- kartézské souřadnice bodu **[x, y]** tvoří **řádkový vektor**
- **transformační matice** je čtvercová (v rovině má rozměr 2×2)

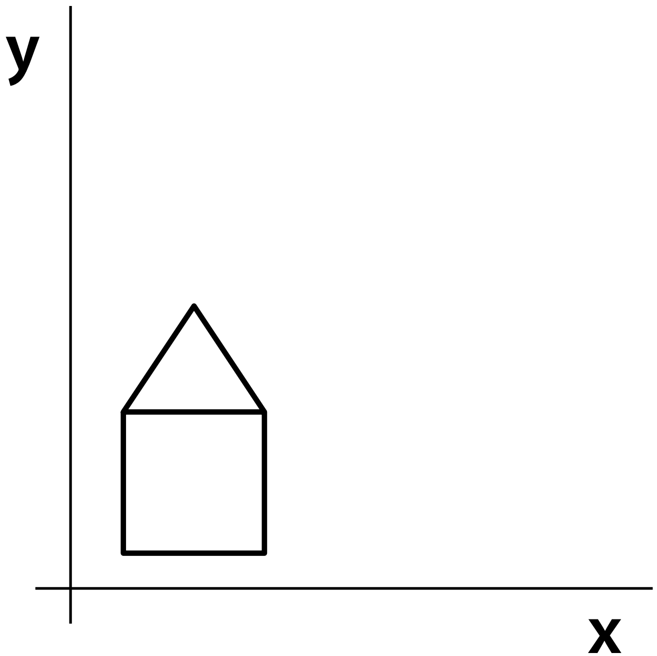
$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'} & \mathbf{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{t_{11}} & \mathbf{t_{12}} \\ \mathbf{t_{21}} & \mathbf{t_{22}} \end{bmatrix}$$

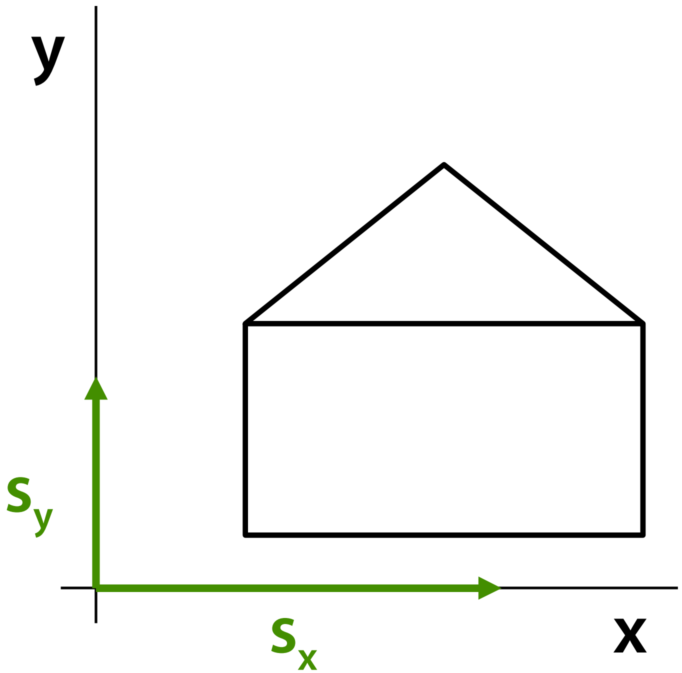
Otočení v rovině kolem počátku



$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

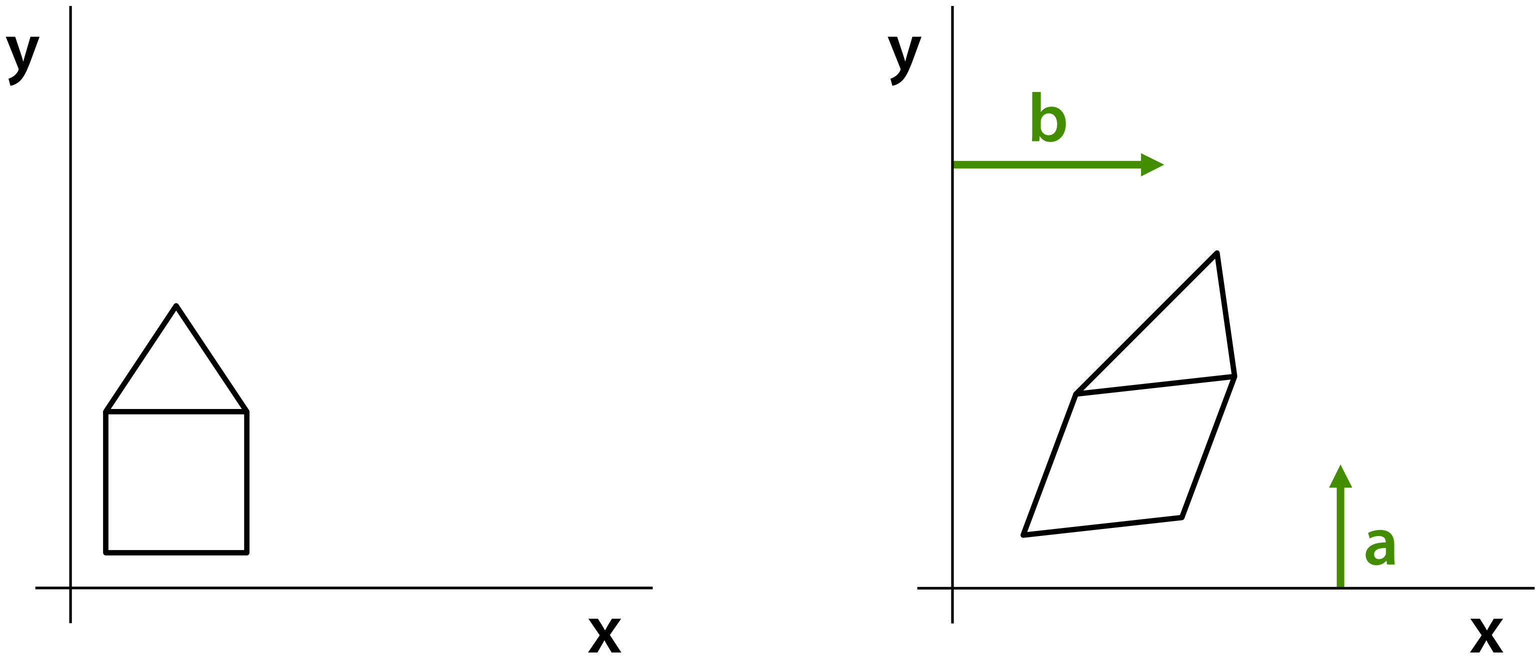
Zmenšení / zvětšení v rovině





$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

Zkosení v rovině



$$Sh(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

Homogenní souřadnice

Jednotná reprezentace **afinních transformací**

- transformace zachovávající rovnoběžnost
- **posunutí** nelze v kartézských souřadnicích reprezentovat maticově

Nejpoužívanější **neafinní transformace**

- **perspektivní transformace** (projekce)

Reprezentace složených transformací

- násobení matic (asociativita)

Algebraická motivace

Přímka v rovině má souřadnice **[a, b, c]** (mnohoznačné)

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

Bod v rovině má souřadnice **[x, y]** (jednoznačné)

Úloha 1: hledání **přímky [a, b, c]** procházející dvěma danými body **[x_1, y_1]** a **[x_2, y_2]**

$$a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c = 0$$
$$a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c = 0$$

soustava **(1)**

Algebraická motivace II

Úloha 2: hledání **bodu [x, y]**, ve kterém se protnou dvě dané přímky [$\mathbf{a_1, b_1, c_1}$] a [$\mathbf{a_2, b_2, c_2}$]

$$\mathbf{a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0}$$
$$\mathbf{a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0}$$

soustava **(2)**

Soustava (1) má vždy (nekonečně mnoho) řešení

Soustava (2) má řešení jen pokud není $\mathbf{a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1}$

Algebraická motivace

Po rozšíření roviny o **nevlastní body** a zavedení **homogenních souřadnic [x, y, w]** budou obě předchozí úlohy symetrické a soustava (**2'**) bude vždy řešitelná

$$\begin{aligned} a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot w_1 &= 0 \\ a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c \cdot w_2 &= 0 \end{aligned}$$

soustava (**1'**)

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot w &= 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot w &= 0 \end{aligned}$$

soustava (**2'**)

Převody souřadnic

Kartézské na homogenní

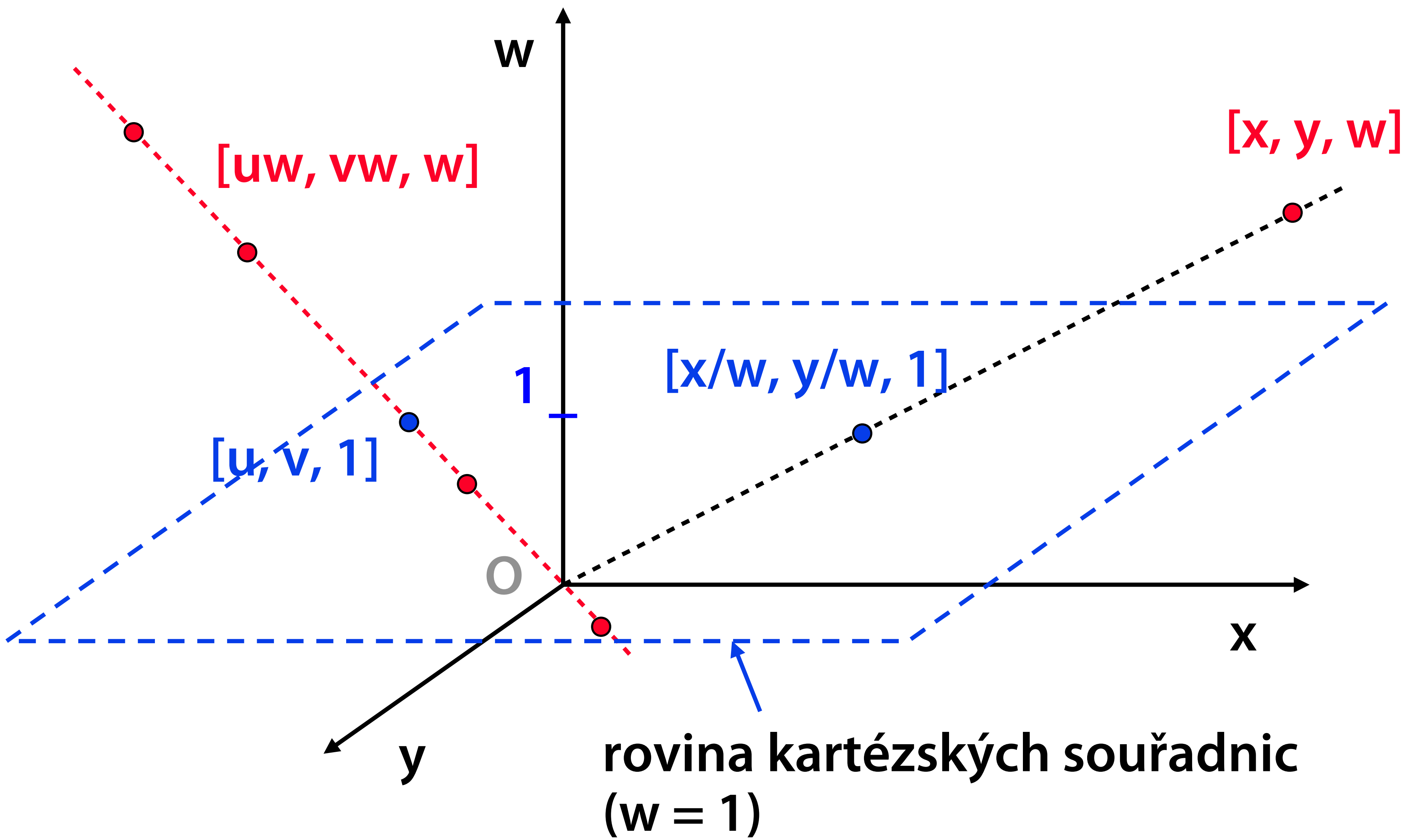
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$$

Homogenní na kartézské (jen vlastní body)

$$\begin{bmatrix} x & y & w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{w} & \frac{y}{w} \end{bmatrix}$$

$$w \neq 0$$

Projektivní prostor



Homogenní transformační matice

Posunutí
(„translation")

$$T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

Otočení („rotation")
kolem počátku

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zmenšení / zvětšení
(„scale")

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

© Josef Pelikán, https://cgg.mff.cuni.cz/~pepca

Homogenní transformační matice II

Zkosení
(„shear")

$$\mathbf{Sh}(a,b)=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ b & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

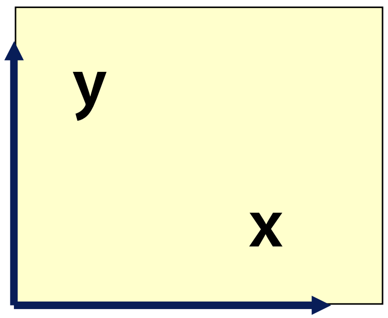
Složené transformace

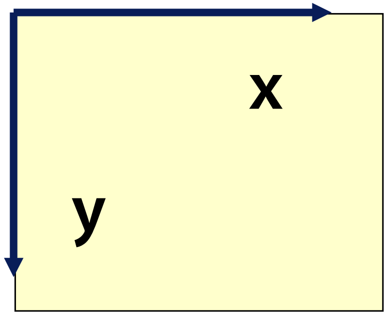
$$\Big(\big(\left([x,y,w]\cdot T_1\right)\cdot T_2\big)\cdot T_3\Big)=[x,y,w]\cdot\left(T_1\cdot T_2\cdot T_3\right)$$

Otočení o úhel α kolem bodu **[x, y]**

$$R(x,y,\alpha)=T(-x,-y)\cdot R(\alpha)\cdot T(x,y)$$

Transformace v průmětně





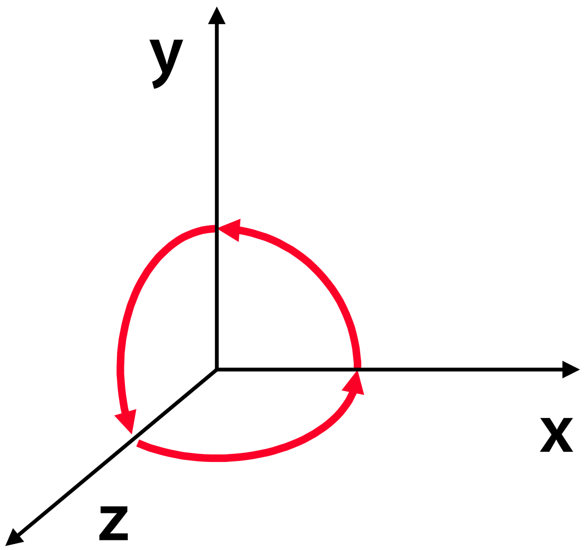
souřadné systémy na výstupu

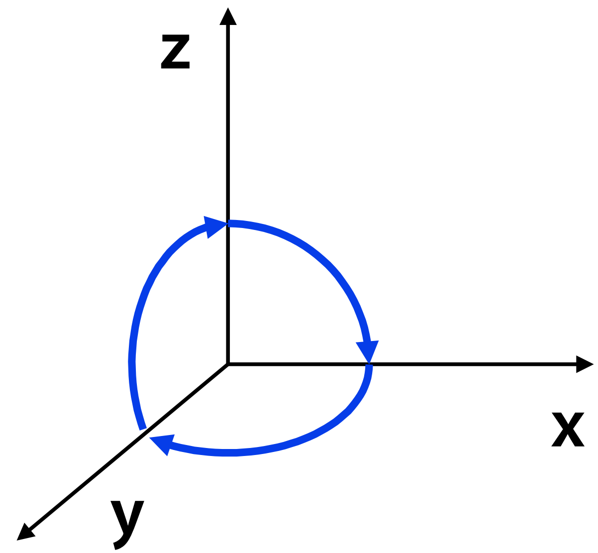
Převod reálných souřadnic do **souřadnic zobrazovaného okna**

$$X_{int} = \mathrm{round}(\, D_x + S_x * X_f \,)$$

$$Y_{int} = \mathrm{round}(\, D_y + S_y * Y_f \,)$$

Prostorové souřadnice





levotočivý systém
(„right-handed")

pravotočivý systém
(„left-handed")

OpenGL (y), Vulkan (-y?), 3ds Max (z), Blender (z), Wavefront=OBJ, HoloLens1 (y)…

Glide, DirectX (y), RenderMan (y), Unity (y), UE 4 (z), C4D (y), POV-ray (y), NDS (clipping)…

Jedinou jistotou je **osa x mířící doprava**

Homogenní souřadnice

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{w} & \frac{y}{w} & \frac{z}{w} \end{bmatrix} \quad (w \neq 0)$$

Maticová transformace

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}$$

© Josef Pelikán, https://cgg.mff.cuni.cz/~pepca

Homogenní transformační matice

Posunutí

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

Zkosení

$$Sh(a, b, c, d, e, f) = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ c & 1 & d & 0 \\ e & f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

© Josef Pelikán, https://cgg.mff.cuni.cz/~pepca

Homogenní transformační matice II

Otočení
kolem osy **y**

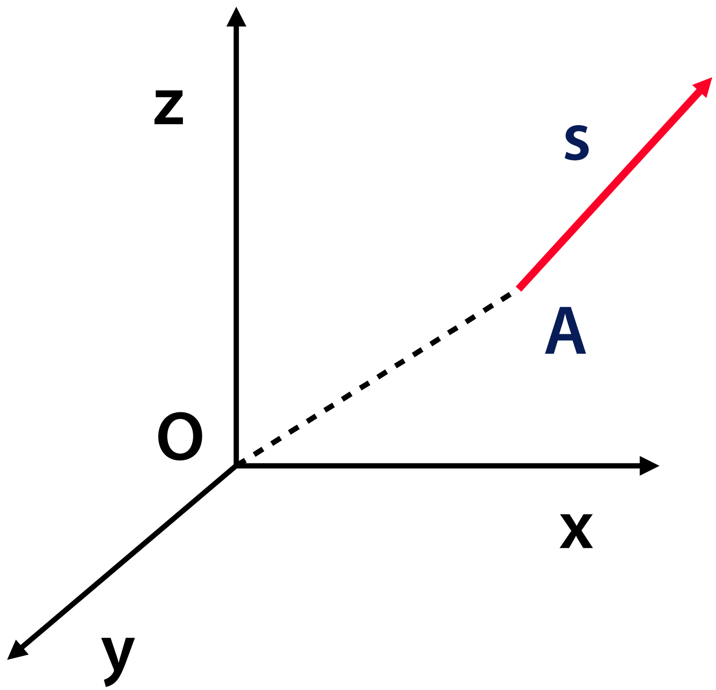
$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Otočení
kolem osy **z**

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

© Josef Pelikán, https://cgg.mff.cuni.cz/~pepca

Přenos polopřímky do osy z



Polopřímka je zadána bodem **A** a směrovým vektorem **s**

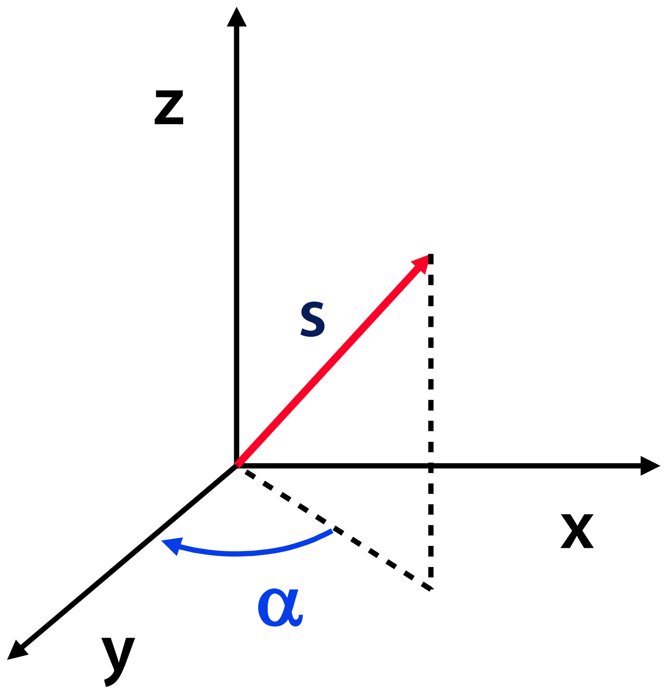
$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(-\mathbf{A})$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{T}(\mathbf{A})$$

1. krok

přenesení bodu **A** do počátku

Přenos polopřímky do osy z



$$M = T(-A) \cdot R_z(\alpha)$$

$$M^{-1} = R_z(-\alpha) \cdot T(A)$$

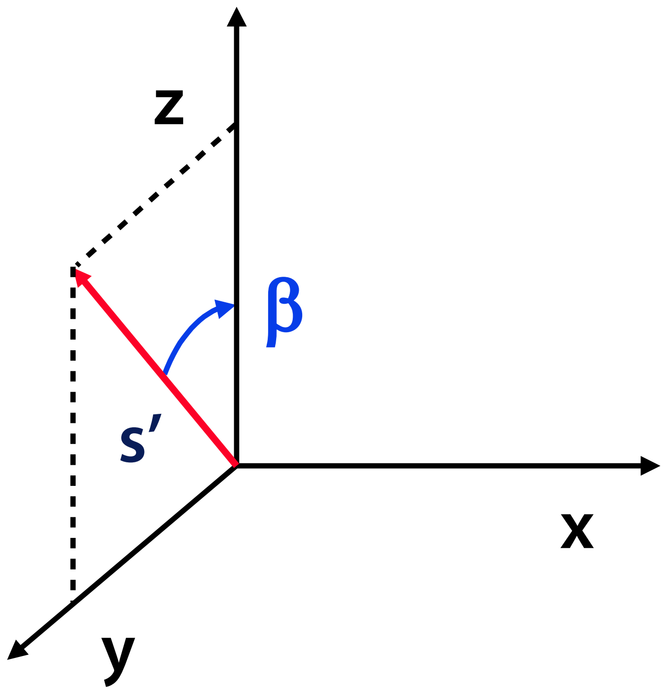
$$\cos\alpha = \frac{s_y}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{s_x}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

2. krok

otočení polopřímky do roviny **yz** (okolo osy **z**)

Přenos polopřímky do osy z



$$M = T(-A) \cdot R_z(\alpha) \cdot R_x(\beta)$$

$$M^{-1} = R_x(-\beta) \cdot R_z(-\alpha) \cdot T(A)$$

$$\cos\beta = \frac{s_z}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}}$$

$$|\sin\beta| = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}}$$

3. krok

otočení polopřímky do osy **z** (okolo osy **x**)

Aplikace transformace M

Shrnutí transformace M

$$M(A,s) = T(-A) \cdot R_z(\alpha) \cdot R_x(\beta)$$

$$M(A,s)^{-1} = R_x(-\beta) \cdot R_z(-\alpha) \cdot T(A)$$

Otočení kolem dané osy

$$R(A,s,\theta) = M(A,s) \cdot R_z(\theta) \cdot M(A,s)^{-1}$$

Zrcadlové převrácení podle dané roviny

$$\mathrm{Mirror}(A,n) = M(A,n) \cdot S(1,1,-1) \cdot M(A,n)^{-1}$$

Výpočet inverzní transformace

1. inverze matice $\mathbf{M}^{-1}$

2. po krocích

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \boxed{\mathbf{C}}$$

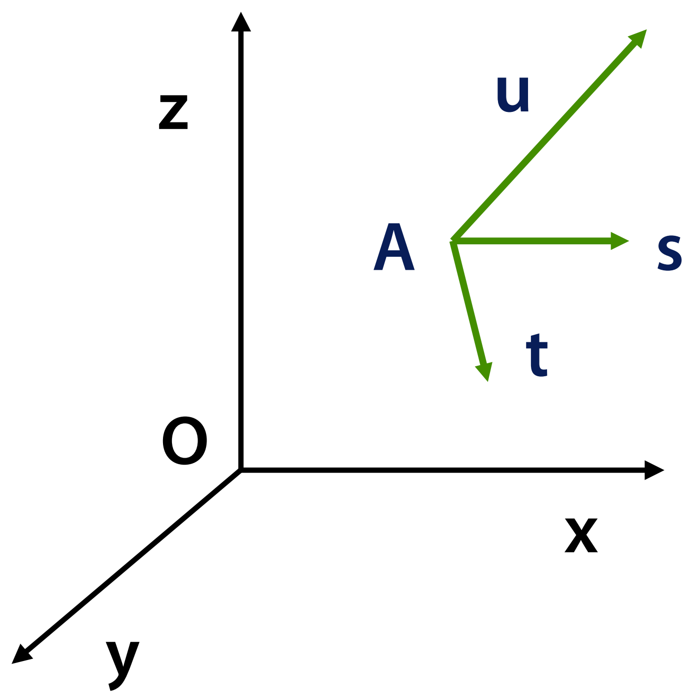
$$\mathbf{M}^{-1} = \boxed{\mathbf{C}^{-1}} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

3. transpozice (ortonormální matice)

$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}$ **pro ortonormální matici R**

(ortonormální jsou všechny **rotační matice**)

Převod mezi souřadnými systémy



Souřadný systém je zadán svým počátkem **A** a trojicí vektorů **s, t, u**

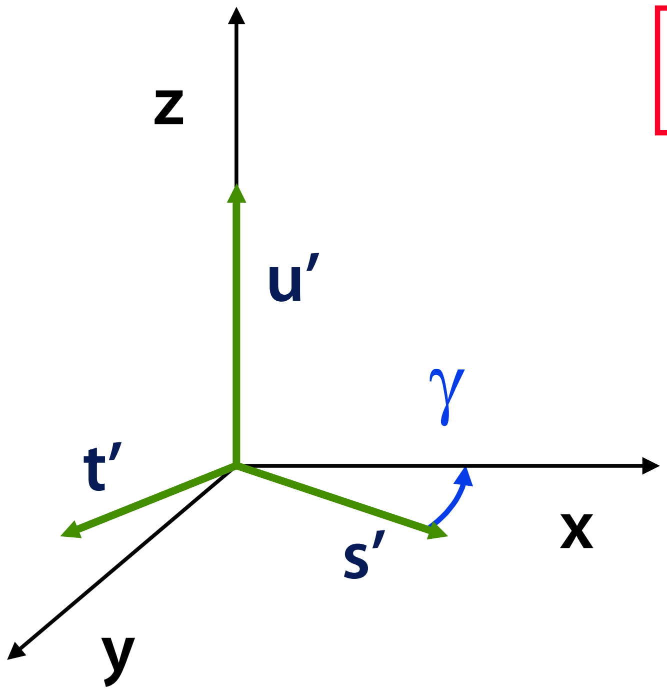
$$\mathbf{Cs} = \mathbf{M(A, u)}$$

$$\mathbf{Cs}^{-1} = \mathbf{M(A, u)}^{-1}$$

1. krok

přenesení polopřímky **(A, u)** do osy **z**

Převod mezi souřadnými systémy



$$\boxed{Cs(A,s,t,u) = M(A,u)\cdot R_z(\gamma)}$$

$$Cs(A,s,t,u)^{-1} = R_z(-\gamma)\cdot M(A,u)^{-1}$$

$$\cos\gamma = \frac{\left|s\cdot M(A,u)\right|_x}{\left|s\cdot M(A,u)\right|}$$

$$\sin\gamma = \frac{\left|s\cdot M(A,u)\right|_y}{\left|s\cdot M(A,u)\right|}$$

2. krok

ztotožnění os **s′**→**x** a **t′**→**y** (otočením kolem **z**=**u′**)

Literatura

J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes: ***Computer Graphics, Principles and Practice***, 201-227

Jiří Žára a kol.: ***Počítačová grafika, principy a algoritmy***, 73-84

© Josef Pelikán, https://cgg.mff.cuni.cz/~pepca