
Počítačová grafika III – Sekvence s nízkou diskrepancí a metody quasi-Monte Carlo

Jaroslav Křivánek, MFF UK

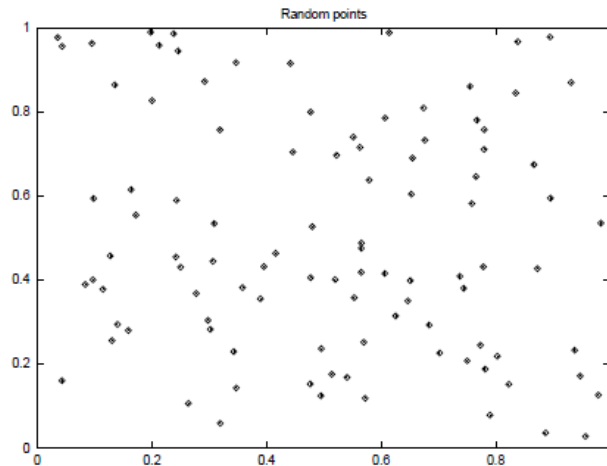
Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

Metody Quasi Monte Carlo (QMC)

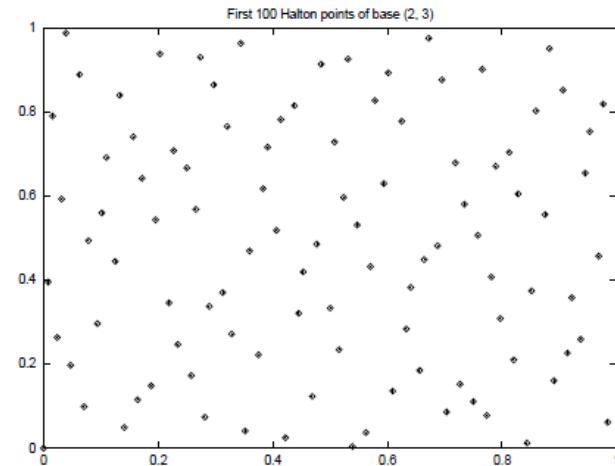
- Použití striktně deterministických sekvencí místo náhodných čísel
- Vše funguje jako v MC, důkazy se ale nemohou opírat o teorii pravděpodobnosti (nic není náhodné)
- Použité sekvence čísel s nízkou dikrepancí (**low-discrepancy sequences**)

Discrepancy

- Cíl: Co nejrovnoměrnější pokrytí integračního oboru vzorky



High Discrepancy
(clusters of points)



Low Discrepancy
(more uniform)

Defining discrepancy

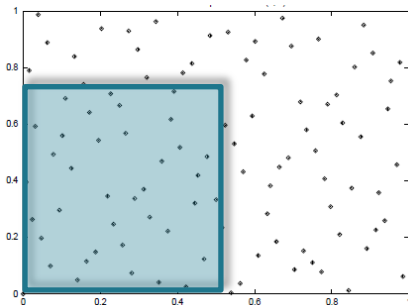
- s -dimensional “brick” function:

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq \mathbf{z}|_1 \leq v_1, 0 \leq \mathbf{z}|_2 \leq v_2, \dots, 0 \leq \mathbf{z}|_s \leq v_s \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- True volume of the “brick” function:

$$V(A) = \prod_{j=1}^s v_j$$

- MC estimate of the volume of the “brick”:



$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{z}_i) = \frac{m(A)}{N}$$

total number of sample points

number of sample points that actually fell inside the “brick”

Discrepancy

- Discrepancy (of a point sequence) is the maximum possible error of the MC quadrature of the “brick” function over all possible brick shapes:

$$\mathcal{D}^*(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N) = \sup_A \left| \frac{m(A)}{N} - V(A) \right|$$

- serves as a measure of the uniformity of a point set
- must converge to zero as $N \rightarrow \infty$
- the lower the better (cf. **Koksma-Hlawka Inequality**)

Koksma-Hlawka inequality

- Koksma-Hlawka inequality

„variation“ of f

$$\left| \int_{\mathbf{z} \in [0,1]^s} f(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{z}_i) \right| \leq \mathcal{V}_{\text{HK}} \cdot \mathcal{D}^*(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N)$$

- ❑ the KH inequality only applies to f with finite variation
- ❑ QMC can still be applied even if the variation of f is infinite

Van der Corput Sequence (base 2)

i	binary form of i	radical inverse	H_i
1	1	0.1	0.5
2	10	0.01	0.25
3	11	0.11	0.75
4	100	0.001	0.125
5	101	0.101	0.625
6	110	0.011	0.375
7	111	0.111	0.875

- point placed in the middle of the interval
- then the interval is divided in half
- has low-discrepancy

Van der Corput Sequence

- **b ... Base**
- radical inverse

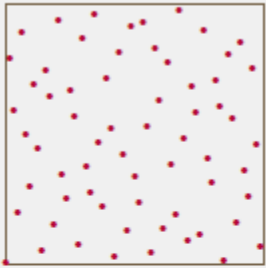
$$\begin{aligned} \Phi_b : \mathbb{N}_0 &\rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1) \\ i = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i) b^j &\mapsto \Phi_b(i) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j(i) b^{-j-1} \end{aligned}$$

Van der Corput Sequence (base b)

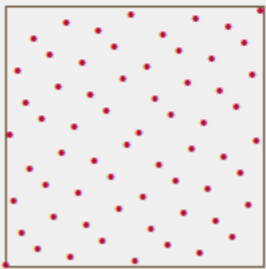
```
double RadicalInverse(const int Base, int i)
{
    double Digit, Radical, Inverse;
    Digit = Radical = 1.0 / (double) Base;
    Inverse = 0.0;
    while(i)
    {
        Inverse += Digit * (double) (i % Base);
        Digit *= Radical;
        i /= Base;
    }
    return Inverse;
}
```

Radical inversion based points in higher dimension

Halton sequence $x_i := (\Phi_{b_1}(i), \dots, \Phi_{b_s}(i))$ where b_i is the i -th prime number



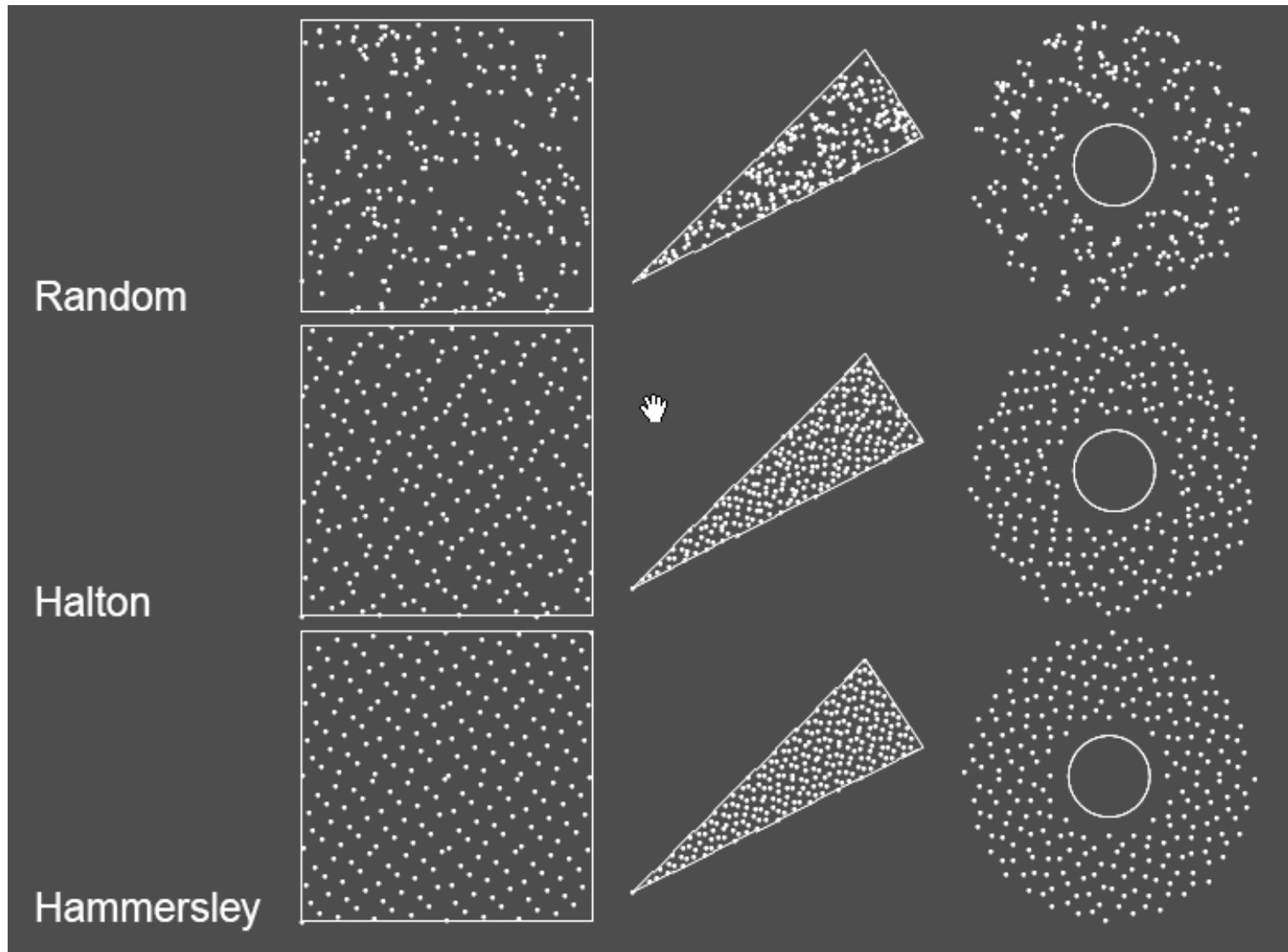
Hammersley point set $x_i := \left(\frac{i}{n}, \Phi_{b_1}(i), \dots, \Phi_{b_{s-1}}(i) \right)$



Použité pro path tracing

- Cesty jsou „body“ ve vysokodimenzionálním prostoru cest
- Veškerá náhodná čísla použitá pro konstrukci jedné cesty jsou různé komponenty jednoho dlouhého „náhodného vektoru“
- Další cesta – další náhodný vektor ve vysokodimenzionálním prostoru.
- Pokud náhodné vektory dobře pokrývají vysokodimenzionální prostor, pak cesty dobře pokrývají celý prostor cest ve scéně

Transformace náhodných čísel



Ukázka výsledků pro MC a QMC

Monte Carlo
(230s)



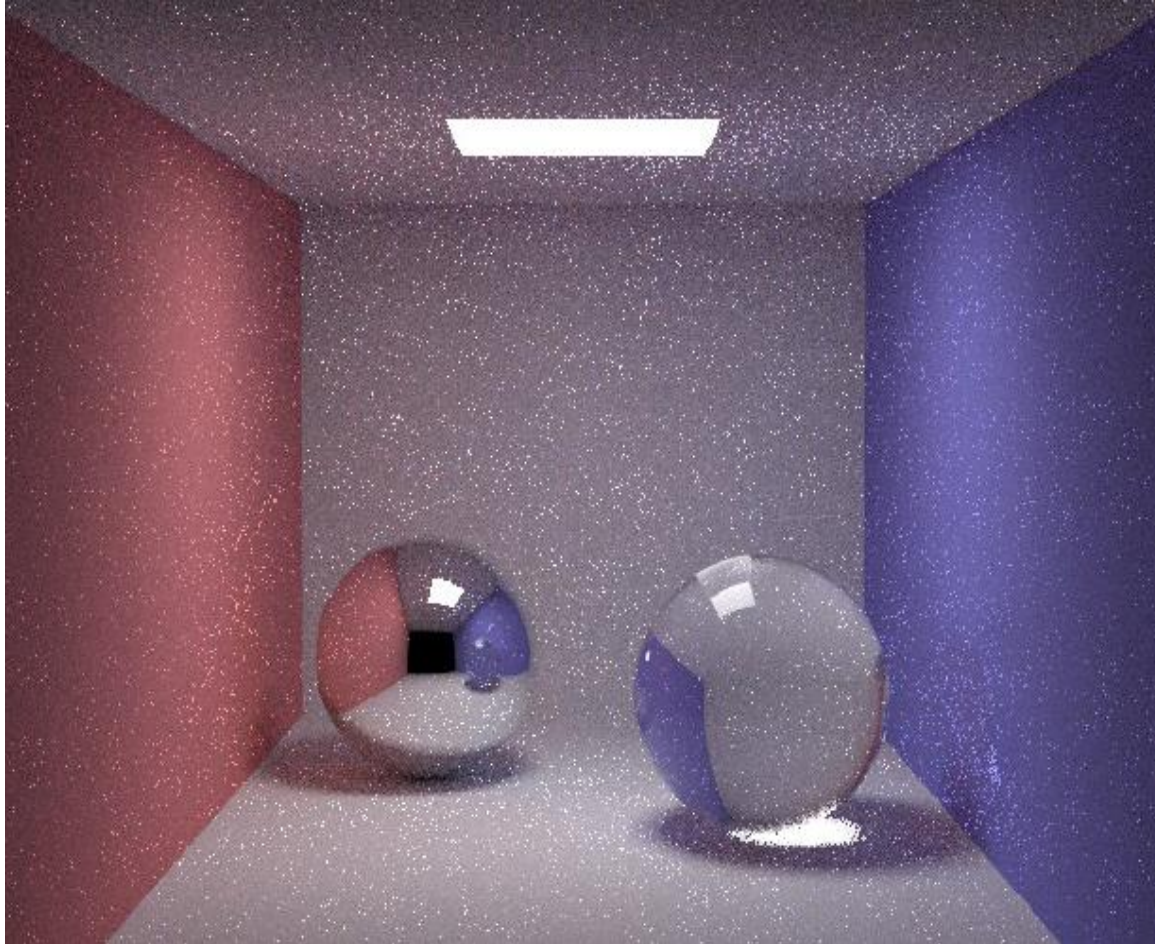
padded
Hammersley
(202s)



Metody Quasi Monte Carlo (QMC)

- Nevýhody QMC:
 - V obrázku mohou vzniknout viditelné „vzory“ (místo šumu v MC)

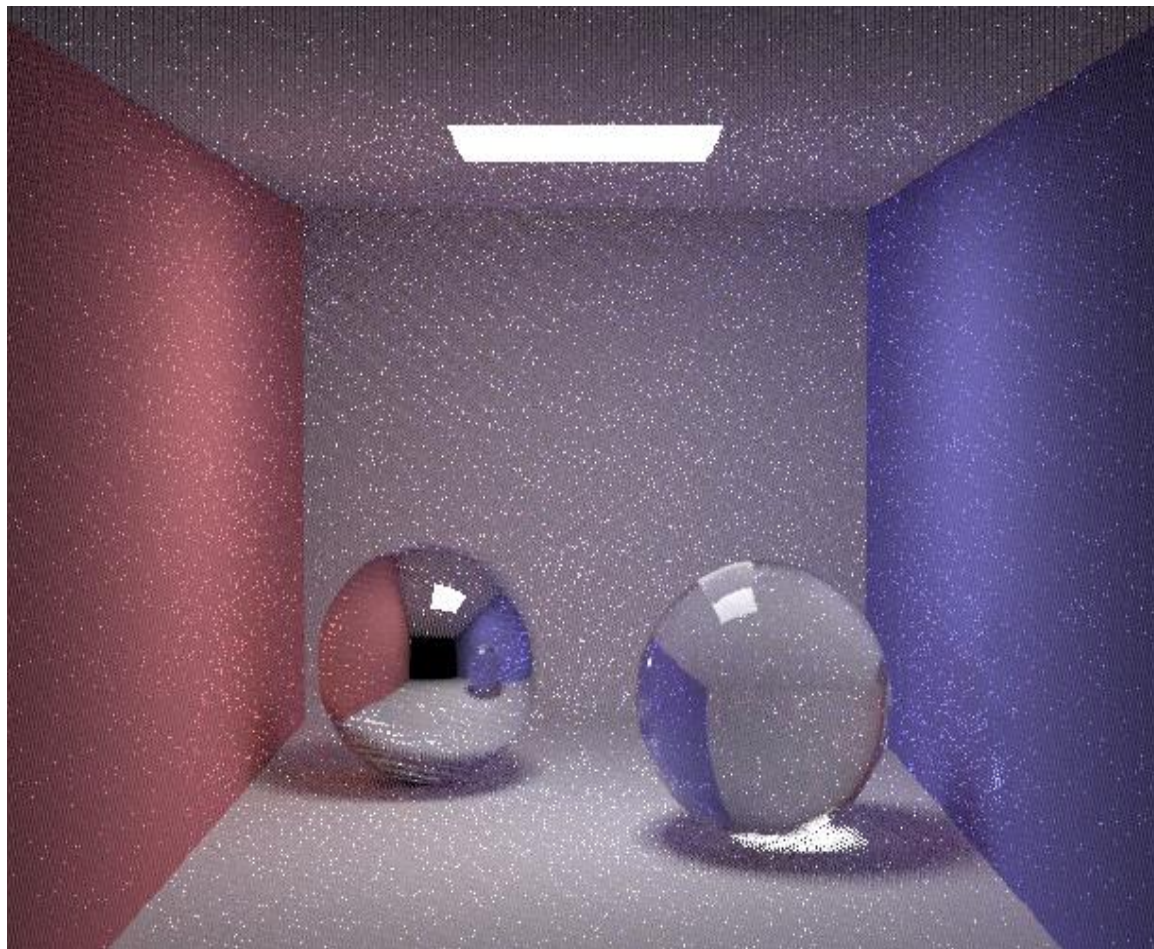
Stratified sampling



Henrik Wann Jensen

10 cest na pixel

Quasi-Monte Carlo



Henrik Wann Jensen

10 cest na pixel

Fixní náhodná sekvence



Henrik Wann Jensen

10 cest na pixel