

Warping a registrace obrazu pomocí Gaussových funkcí



2004
email: pavel.vacha@matfyz.cz

Pavel Vácha
ÚTIA AV ČR

Warping je deformace zdrojového obrázku



zdrojový obrázek



deformovaný obrázek

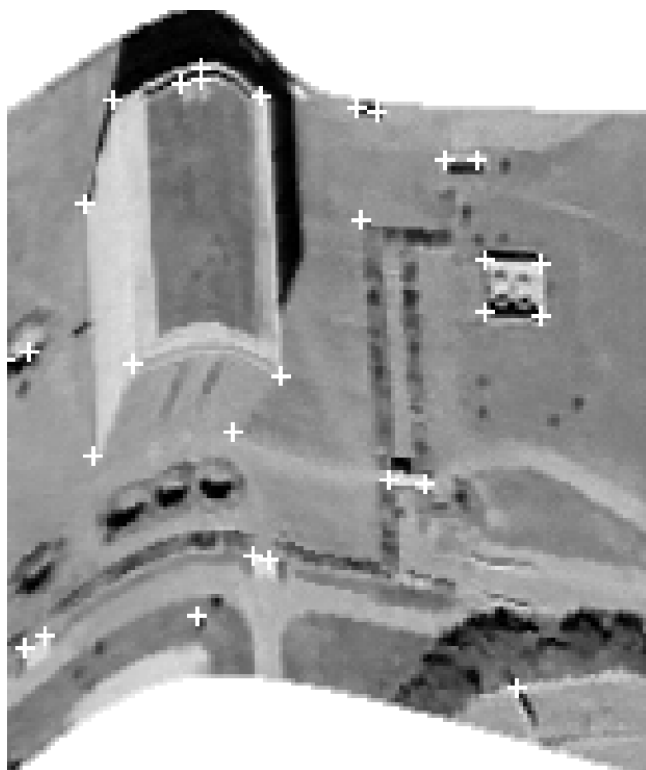
Warping pomocí Gaussových funkcí

- **Vstup: zdrojový obrázek**
dvojice řídicích bodů – definují změnu polohy
parametry – určují oblast vlivu řídicích bodů a elasticitu obrázku
- **Výstup: deformovaný obrázek**

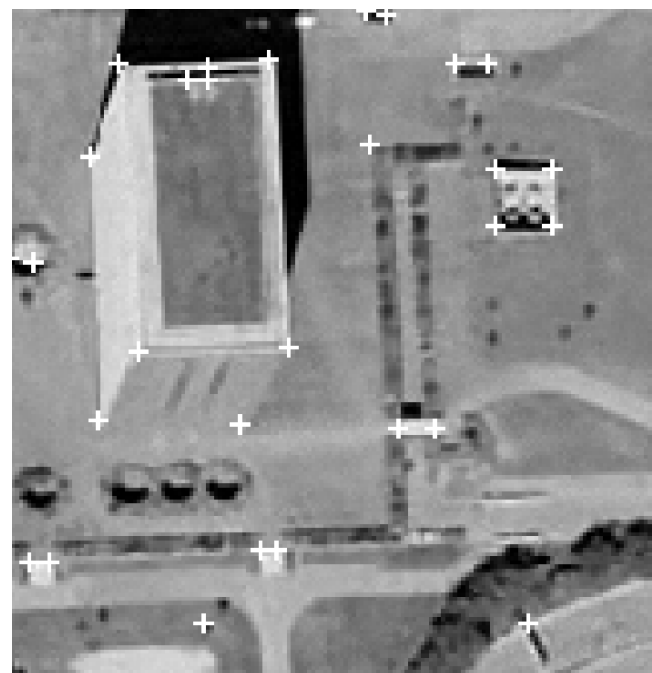
Výhody warpingu pomocí Gaussových funkcí

- **zadaní řídicích bodů je intuitivní**
 - **parametry jednoduše určují jejich oblast vlivu**
 - **malý počet řídicích bodů (>2 neležící v přímce)**
 - **libovolné umístění řídicích bodů**
- **výborné pro lokální deformace**

Registrace je transformace pro sesazení s referenčním snímkem



registrovaný snímek



referenční snímek

Výsledkem registrace je narovnaný snímek



registrovaný snímek



narovnaný snímek

Vstupem registrace je registrovaný a referenční snímek

- **Vstup: registrovaný snímek – typicky deformovaný**
referenční snímek – čas, spektrum, částečný překryv
- **Výstup: narovnaný snímek**

Registrace se skládá z následujících částí

1. výběr řídicích bodů
2. stanovení korespondence bodů
3. konstrukce mapovací funkce
4. převzorkování a transformace snímku

3., 4. téměř odpovídají warpingu, jen parametry nejsou známé

Struktura prezentace

1. úvod

2. warping

a. interpolační případ

b. aproximační případ

3. registrace

4. závěr

Literatura

- **N. Arad, N. Dyn, D. Reisfeld, and Y. Yeshurun:**
Image Warping by Radial Basis Functions:
Application to Facial Expressions, CVCIP:
Graphical Models and Image Processing, vol. 56,
pp. 161-172, 1994
- **Pavel Vácha:** ***Registrace obrazu pomocí***
radiálních bázových funkcí, diplomová práce
MFF UK v Praze, 2003

Warping pomocí Gaussových funkcí



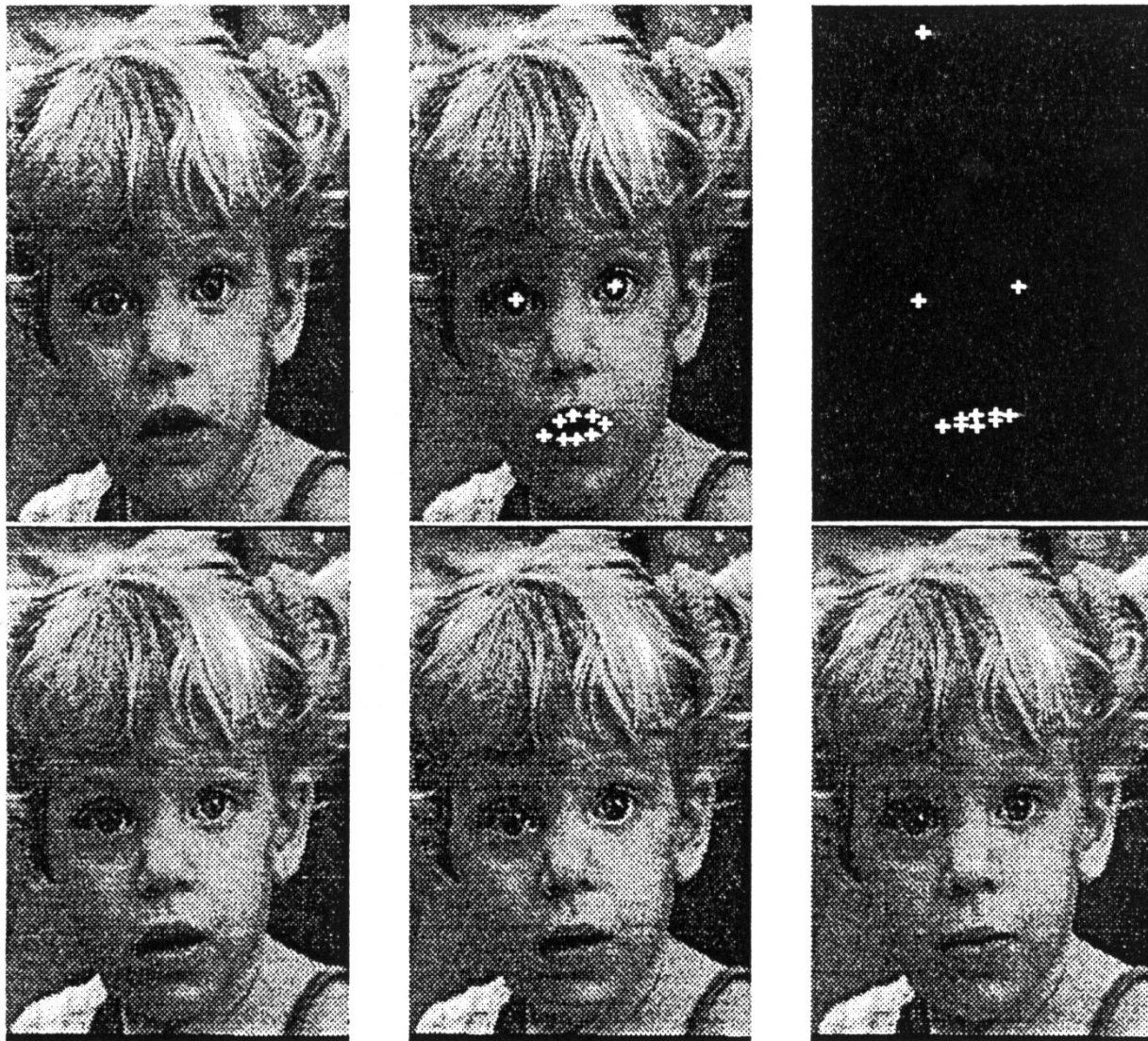
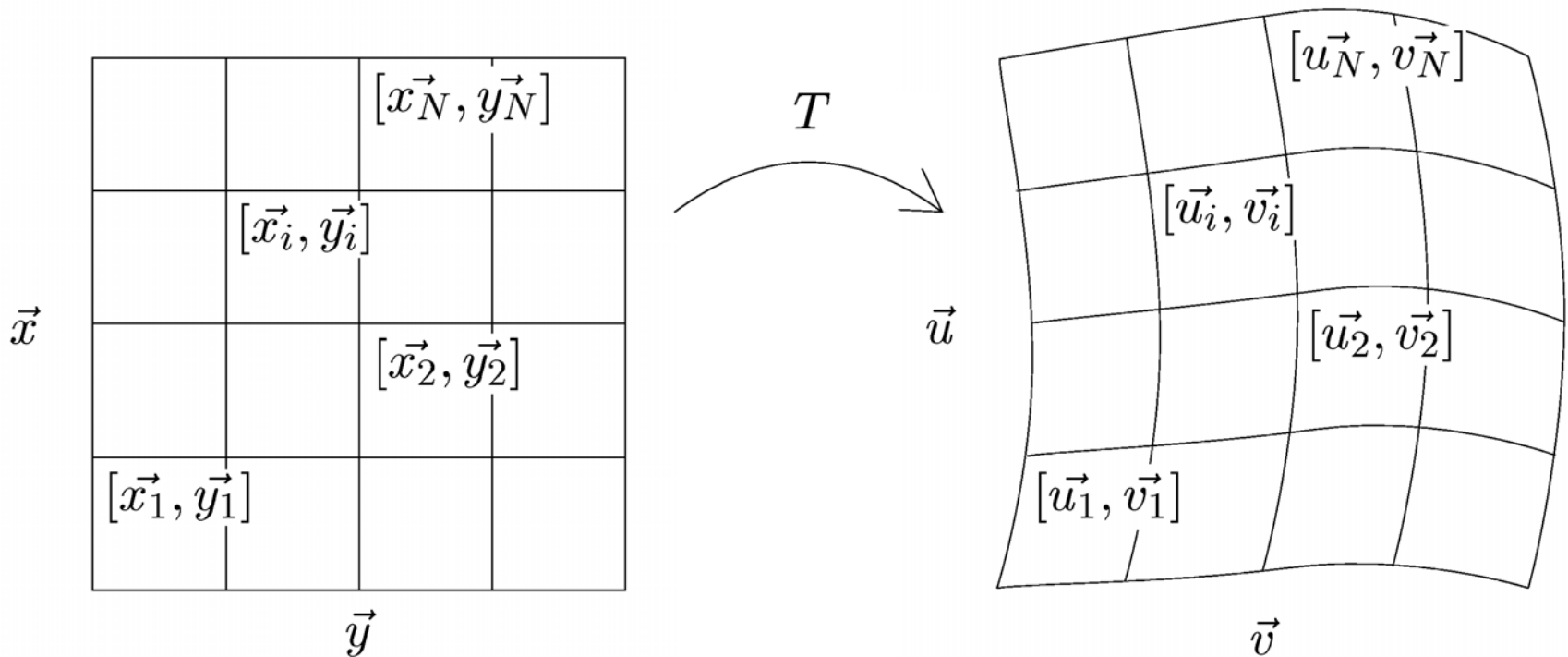


FIG. 6. Animation using *only one* snapshot. *Top*: Original image, source location of the anchor points marked on the image and destination of the anchor points. *Bottom* (left to right): Transformations using Gaussian radials with $\sigma = 0.25$ and the trade-off parameter $\lambda = 10^{-3}$, 10^{-4} , and 0, respectively.

Hledáme mapovací funkci zadanou dvojicemi řídicích bodů



zdrojový obrázek

deformovaný obrázek

Mapovací funkci hledáme po částech – interpolační případ

Požadovanou $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ **splňující**

$T(x_i, y_i) = (u_i, v_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$ **hledáme jako**

dvojici funkcí $T_U, T_V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ **takových, že**

$$T(x, y) = \left(T_U(x, y), T_V(x, y) \right)$$

$$T_U(x_i, y_i) = u_i \quad \& \quad T_V(x_i, y_i) = v_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

Thin plate spline (TPS) minimalizuje nerovnosti mapování - potenciální energii

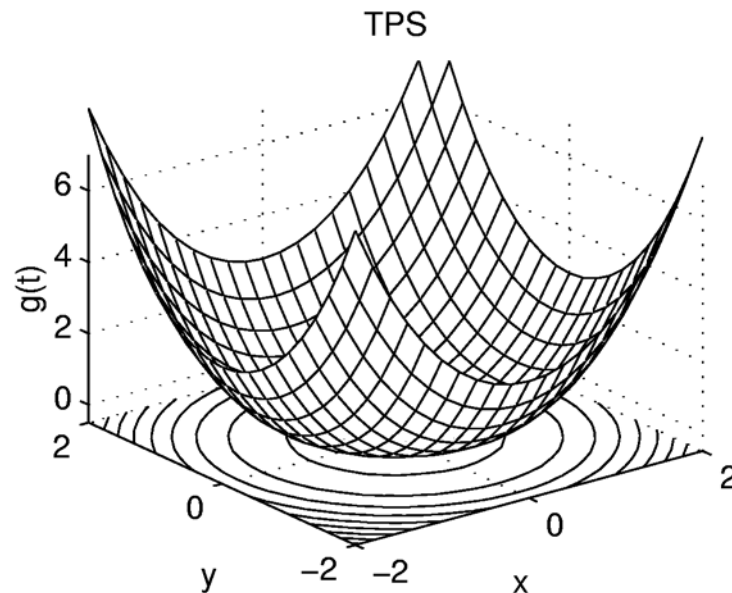
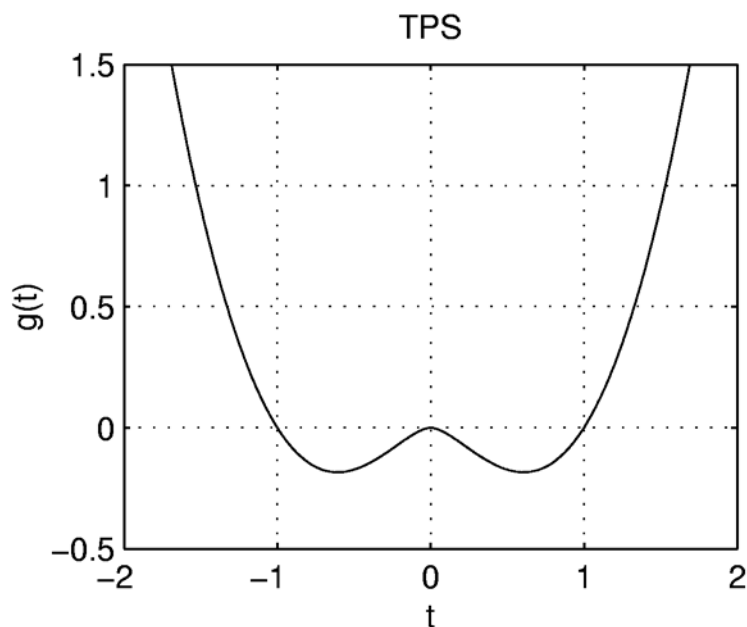
$$\Theta_2(f) = \left[\iint \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \right]^{\frac{1}{2}}$$

**penalizace 2. derivací – křivosti,
chová se jako tenký ocelový plát**

Výsledkem minimalizace je funkce s bází TPS

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N a_i g_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|), \text{ kde } \mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$$

$$g_i(t) = t^2 \log t, \quad g_i(0) = 0$$



Nalezení koeficientů k bázi - interpolace

$$\begin{bmatrix} g_1(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & g_1(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N\|) \\ g_2(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & g_2(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_N\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & g_N(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_N\|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

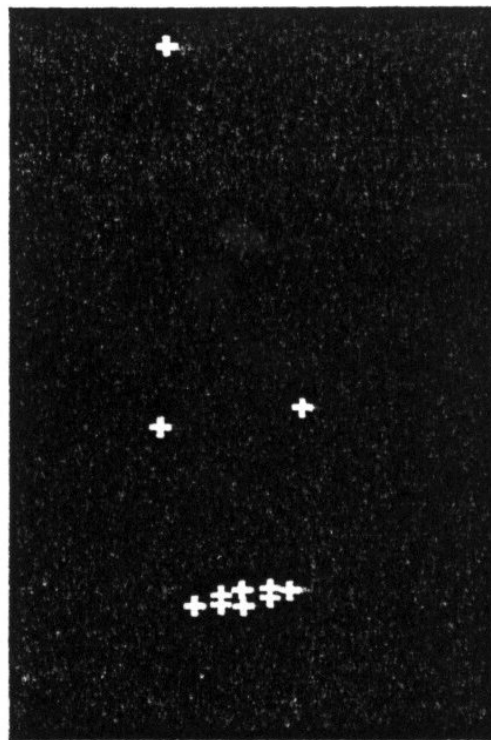
maticově:

$$\mathbf{G}\mathbf{a} = \mathbf{u}$$

Ne vždy je použití TPS vhodné



originál



řídící body

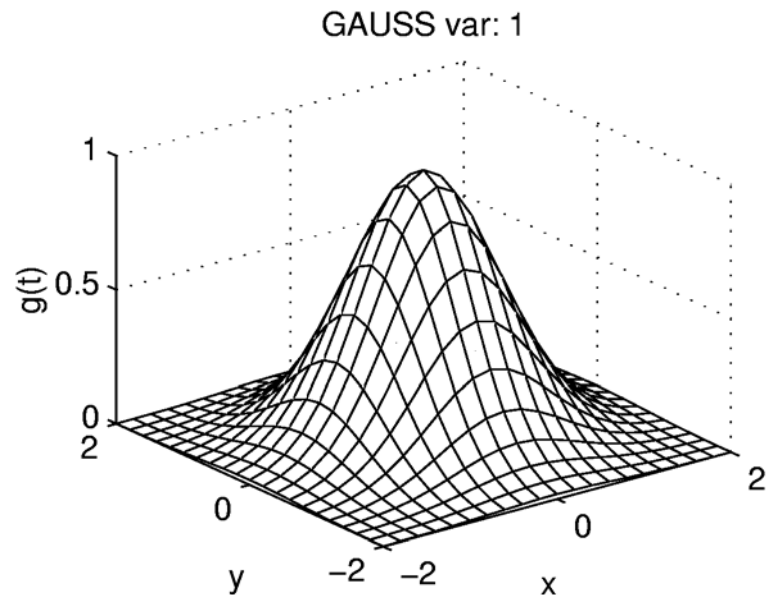
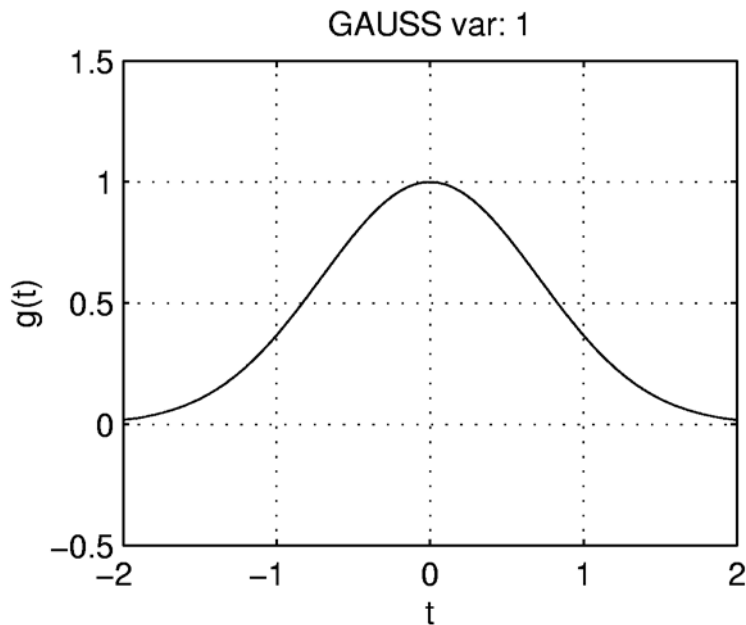


výsledek

Lokální báze mohou být vhodnější - báze Gaussových funkcí (GRBF)

$$g_i(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0$$

parametr σ^2 řídí lokalitu



Funkce nemusí procházet řídicími body - aproximace pro TPS

$$\tilde{J}_\lambda(f) = \sum_{i=1}^N [f(x_i, y_i) - u_i]^2 + \lambda \iint \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \right)^2 dx dy$$

**parametr λ určuje zda klademe důraz na
přesnost nebo malou křivost**

$\lambda = 0$ **interpolace**

$\lambda = \infty$ **maximální vyhlazení**

Nalezení koeficientů k bázi - aproximace

$$\begin{bmatrix} g_1(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|) + \lambda & \cdots & g_1(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_N\|) \\ g_2(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & g_2(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_N\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_N(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1\|) & \cdots & g_N(\|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_N\|) + \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

maticově:

$$(\mathbf{G} + \lambda\mathbf{I}) \mathbf{a} = \mathbf{u}$$

Pro schopnost reprodukce a affiniho zobrazení upravíme tvar hledané funkce

$$s(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N a_i g_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$$

kde $p_1(\mathbf{x}) = p_1(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$

přidáním neznámých $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ **musíme přidat tzv. okrajové podmínky:**

$$\mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ y_1 & y_2 & \dots & y_N \end{bmatrix}$$

Řešení s přidaným affním zobrazením

- **interpolace**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- **aproximace**

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}) & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

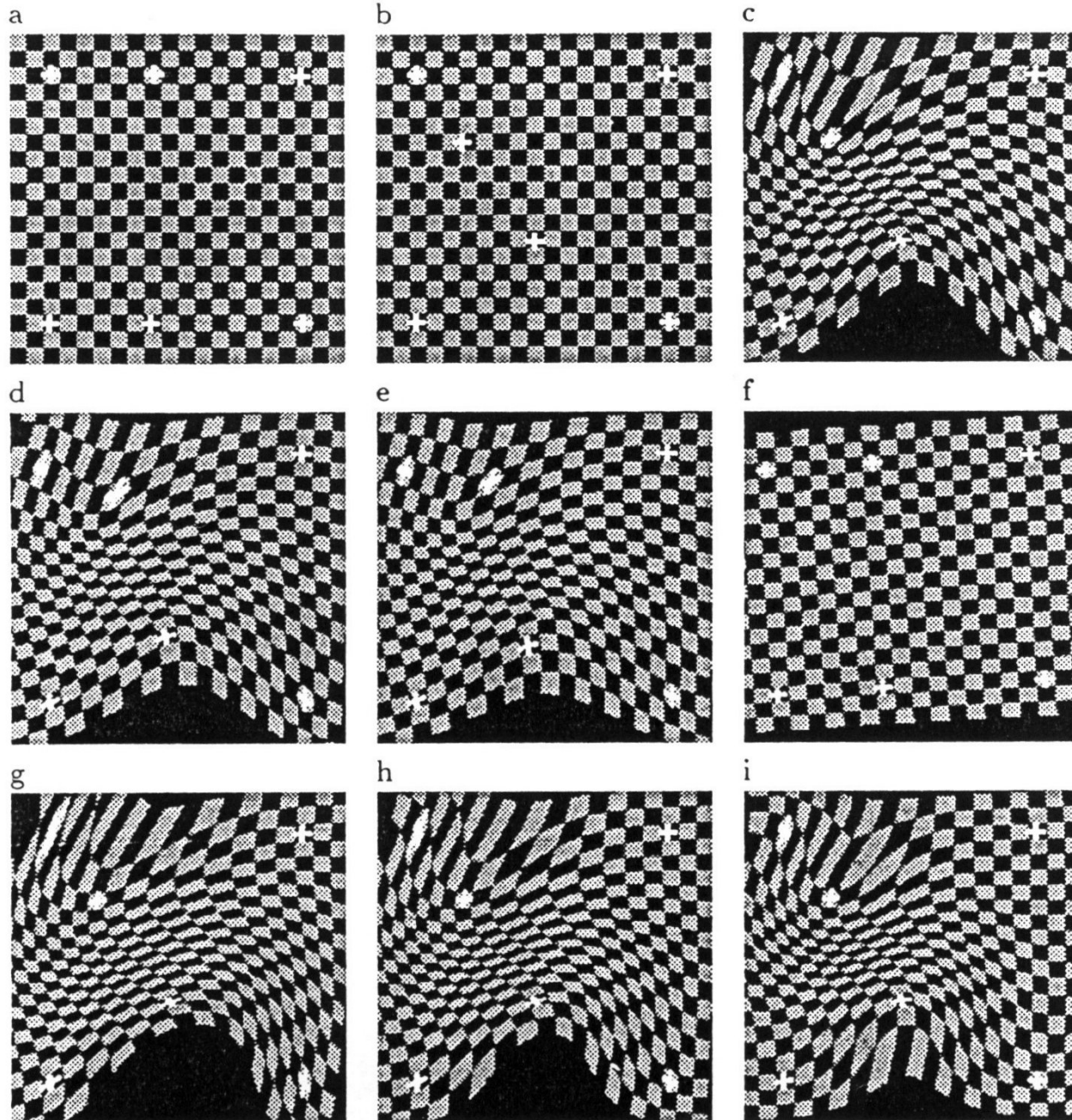


FIG. 1. Warping using various radials and other control parameters: (a) source; (b) destination. (c)–(f) thin plate spline radial basis with $\lambda = 0, 0.1, 10,$ and $100,$ respectively; (g)–(i) Gaussian radial basis with $\lambda = 0$ and $\sigma = 2.5, 2,$ and $1.5,$ respectively.

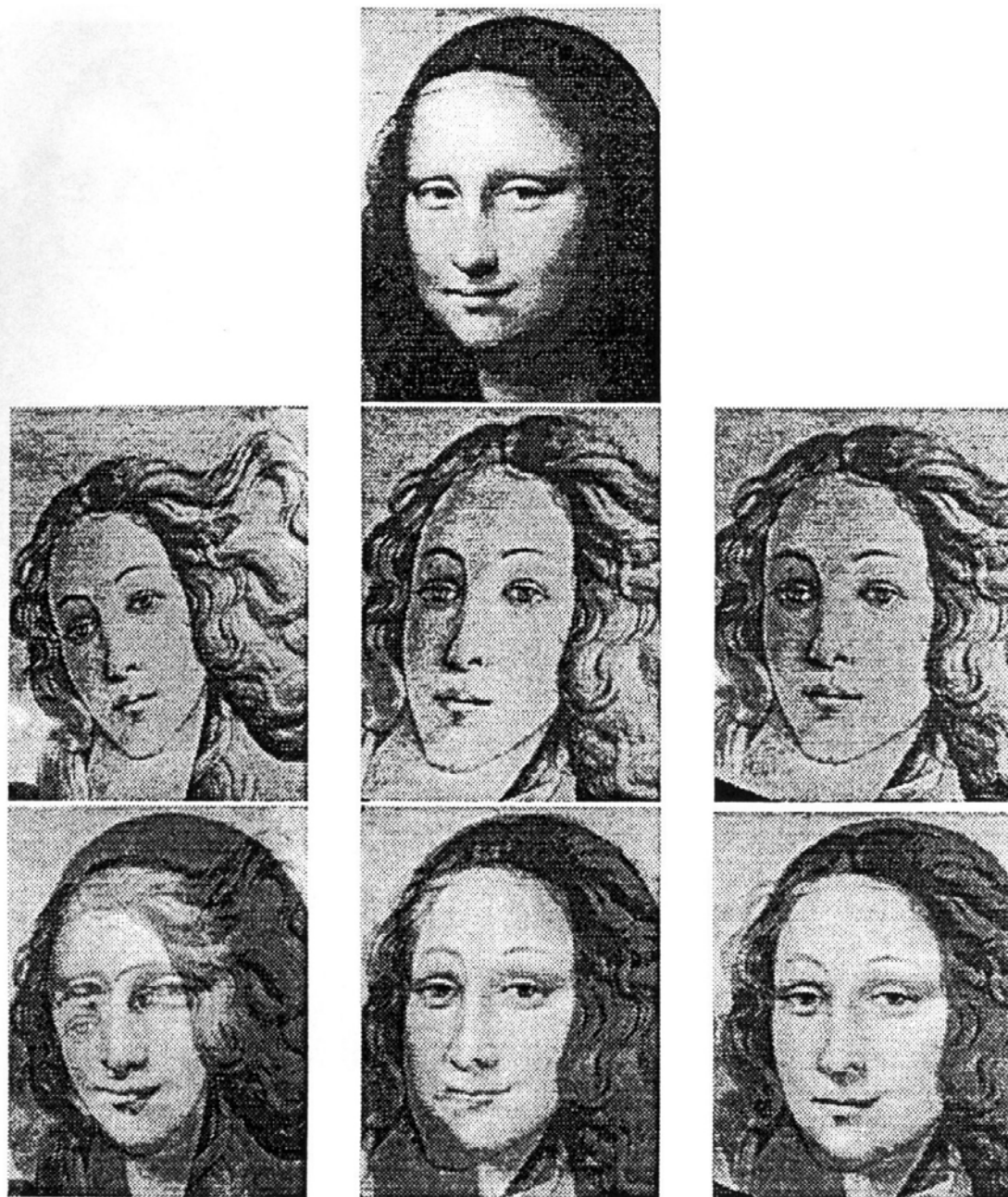


FIG. 2. Alignment by eyes and mouth. *Top*: Original Mono Lisa. *Middle* (left to right): Original Venus, Venus aligned to Mona Lisa by the similarity transformation determined by the eye's location, and Venus aligned to Mona Lisa by the affine transformation determined by the eyes and mouth. *Bottom*: Superposition of Mona Lisa with each of the Venus images above.



FIG. 3. *Left:* Warping of Venus using four points and the thin-plate spline. *Right:* Superposition of the left image with the Mona Lisa.



FIG. 4. The smile lost using only six points and the thin plate radial. *Top*: Original image; source of the anchor points marked by crosses. *Bottom*: Destination of the anchor points and warped image.

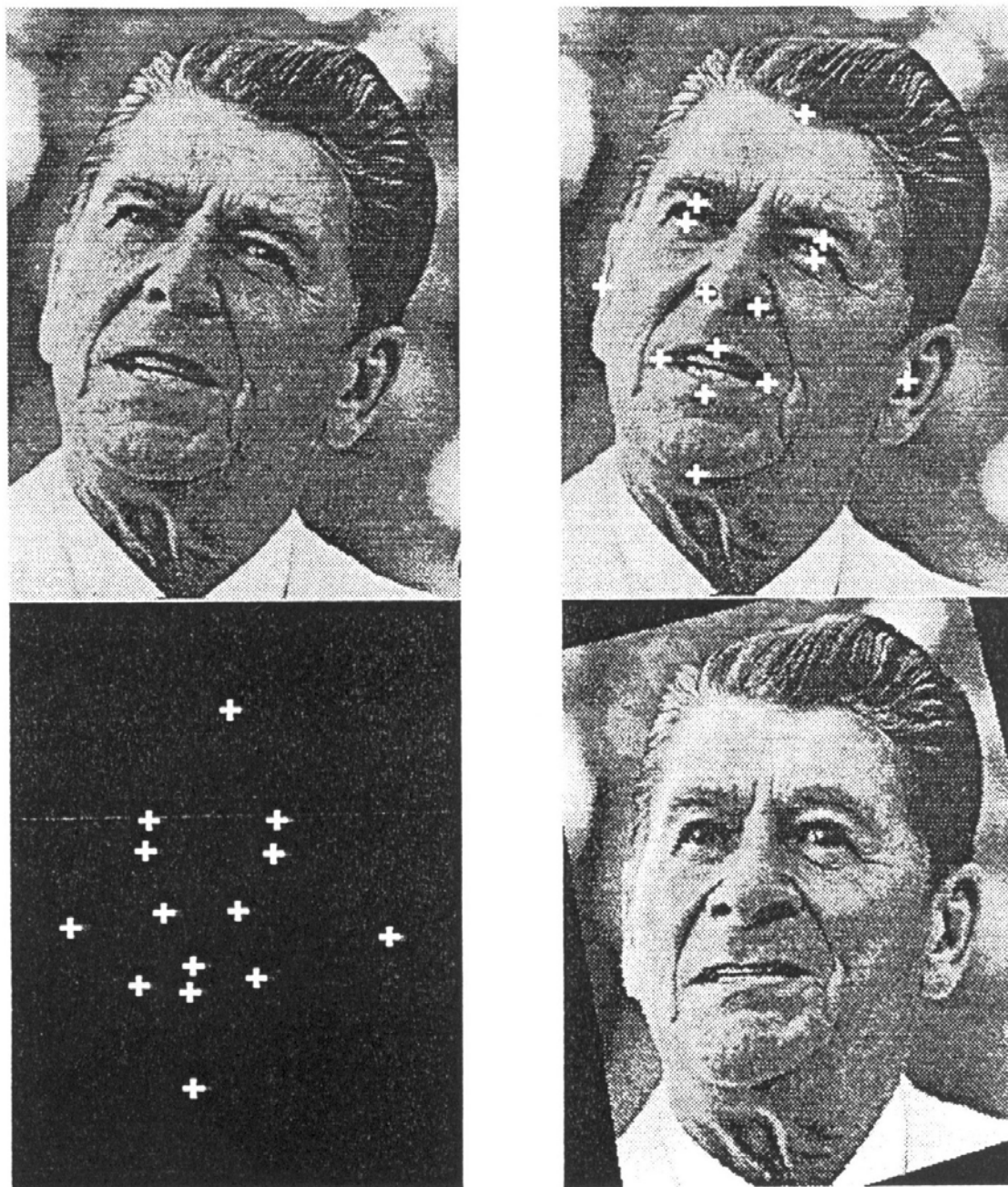


FIG. 5. Change in expression using 14 points. *Top*: Original image and anchor point locations. *Bottom*: Anchor point destinations and warped image. Thin plate radials were used. Note the cumulative effect of the minor changes in the positions of the anchor points in the eyes, right nostril, and mouth.

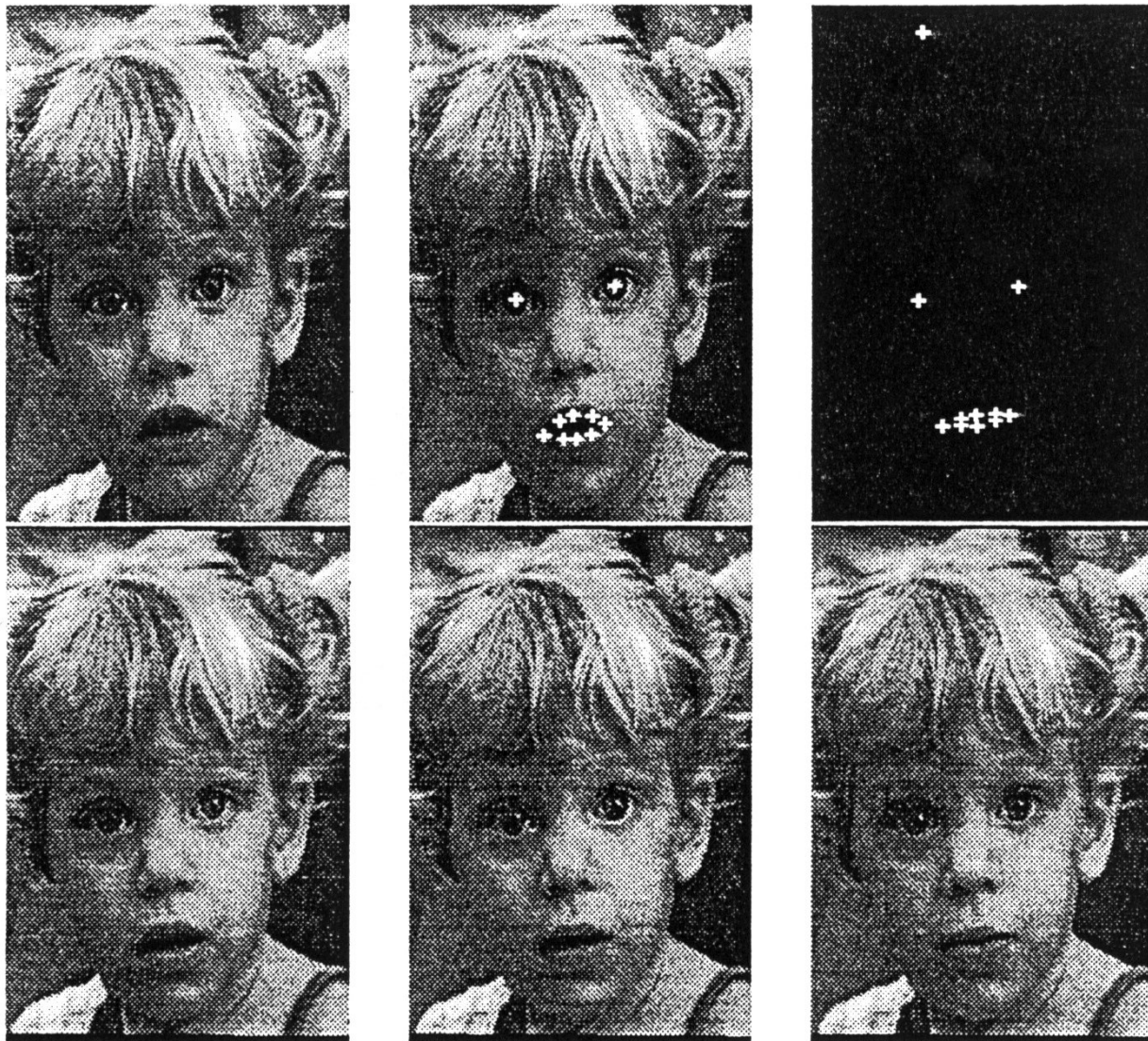


FIG. 6. Animation using *only one* snapshot. *Top*: Original image, source location of the anchor points marked on the image and destination of the anchor points. *Bottom* (left to right): Transformations using Gaussian radials with $\sigma = 0.25$ and the trade-off parameter $\lambda = 10^{-3}$, 10^{-4} , and 0, respectively.

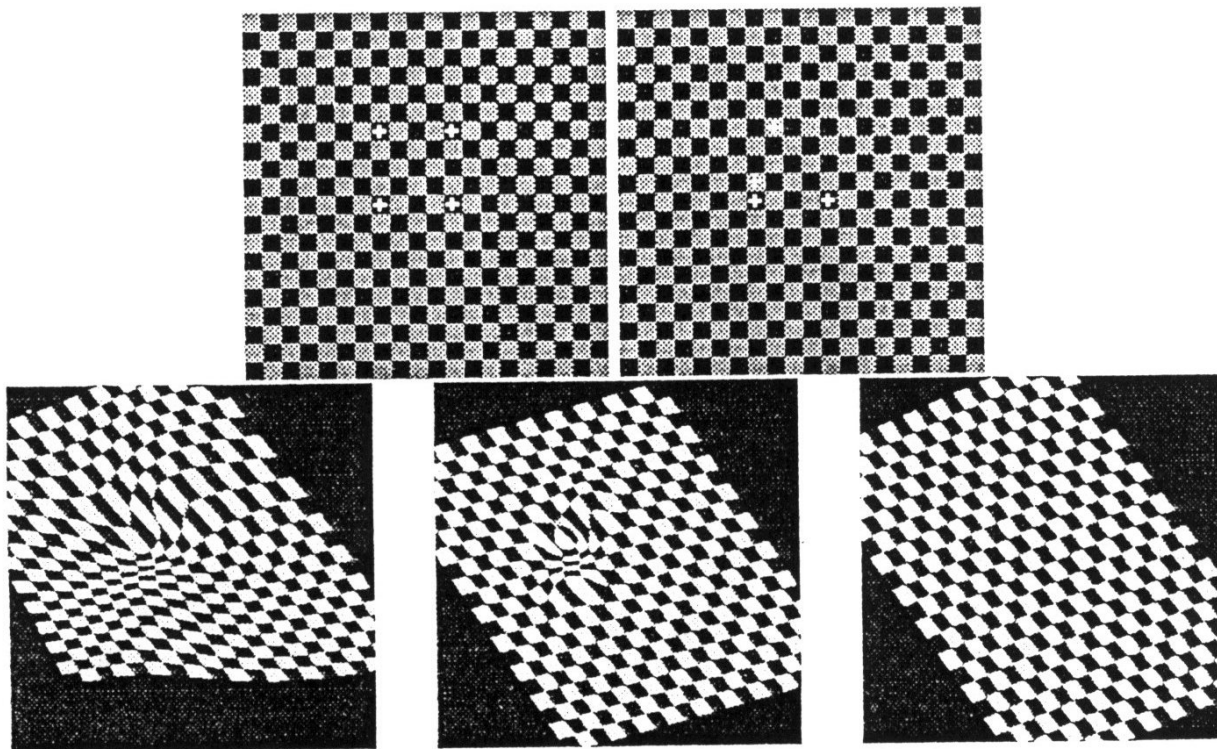


FIG. 8. Generalizing affine mappings in different ways. *Top*: Position of source and target anchor points. *Bottom* (left to right): thin-plate warp, Gaussian warp, and affine least-squares warp ($\lambda = \infty$). In all cases the mapping can be well approximated by an affine mapping far away from the anchors. In the thin-plate case this affine map is different at different regions, unlike the Gaussian case in which the same affine component appearing in the definition of the mapping dominates the transformation in all areas away from the anchors.

Mapovací funkce má tvar

$$T(x, y) = \left(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \sum_{i=1}^N a_i g_i(\|x - x_i, y - y_i\|), \right. \\ \left. \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \sum_{i=1}^N b_i g_i(\|x - x_i, y - y_i\|) \right)$$

kde

$$g_i(t) = t^2 \log t, \quad g_i(0) = 0$$

nebo

$$g_i(t) = \exp\left(\frac{-t^2}{\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0$$

Řešení

získáme řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}) & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

vstupní parametr λ případně σ^2

Implementace

**zpětné mapování – záměna (x, y) a (u, v)
bi-lineární interpolace**

Proč používat warping pomocí TPS a GRBF

- zadání pomocí řídicích bodů je intuitivní
- malý počet a libovolné umístění řídicích bodů (alespoň 3 neležící v přímce)
- parametry jednoduše určují elasticitu obrázku, případně oblast vlivu řídicích bodů
- reprodukuje afinní mapování
- GRBF vhodné pro lokální deformace

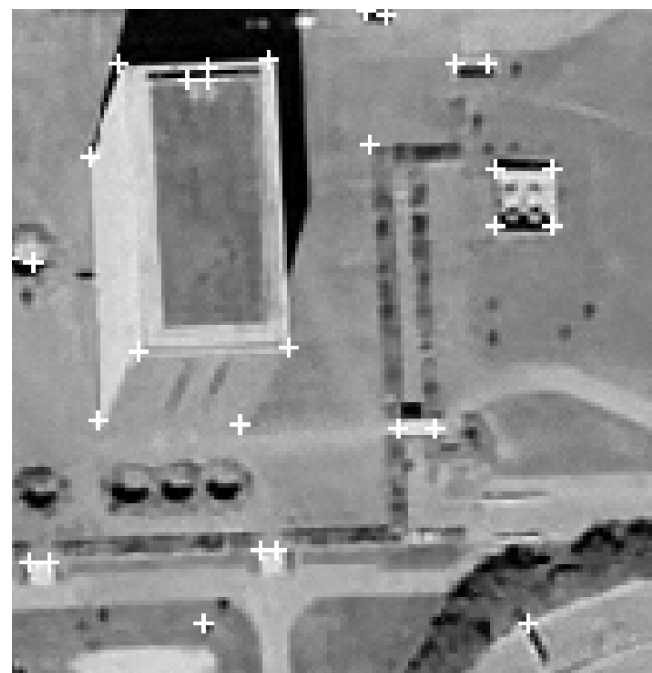
Registrace obrazu pomocí Gaussových funkcí



Registrace je transformace pro sesazení s referenčním snímkem



registrovaný snímek

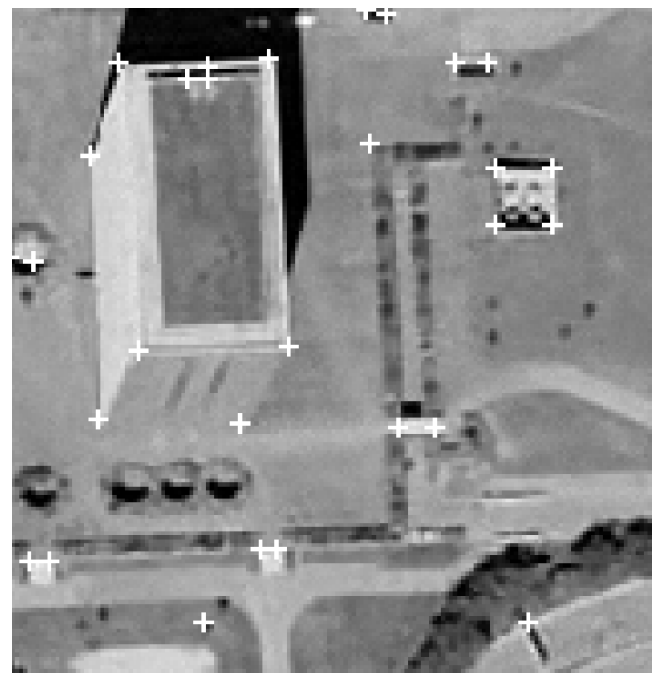


referenční snímek

Výsledkem registrace je narovnaný snímek



výsledek transformace



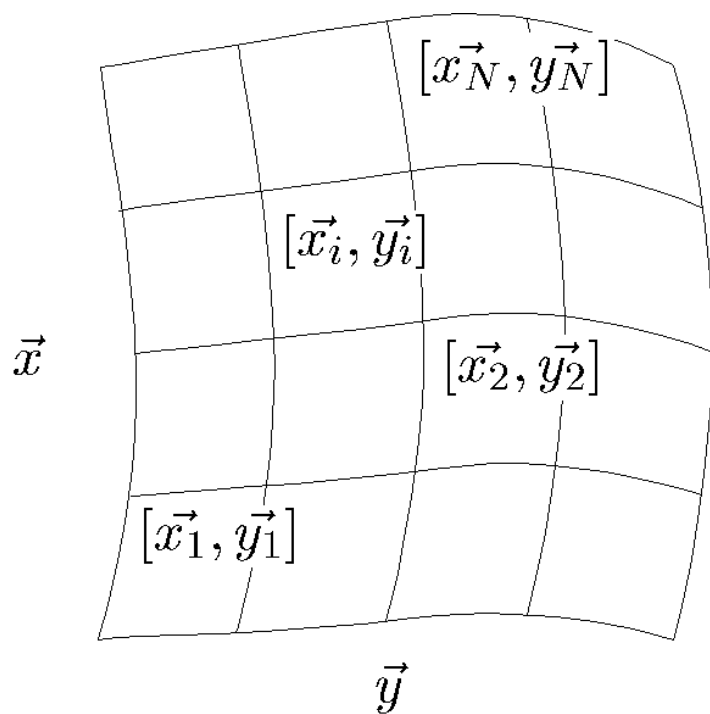
referenční snímek

Registrace se skládá z následujících částí

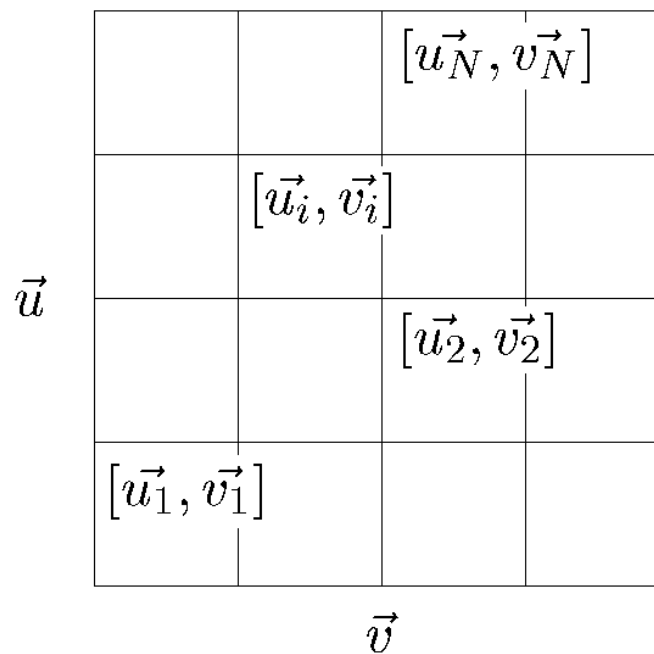
1. **výběr řídicích bodů**
2. **stanovení korespondence bodů**
3. **konstrukce mapovací funkce**
4. **převzorkování a transformace snímku**

3., 4. téměř odpovídají warpingu, jen parametry nejsou známé

Vstupem pro konstrukci mapovací funkce jsou dvojice řídících bodů



registrovaný snímek



referenční snímek

Konstrukce mapovací funkce je podobná jako u warpingu

**báze: - TPS
- GRBF (vhodné pro lokální deformace)**

! Rozdíl !: hodnoty parametrů nejsou typicky součástí vstupu

Vstupní data jsou zkreslena šumem

uvažujme aditivní normální šum

$$u_i = T_U(\mathbf{x}_i) + \epsilon_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

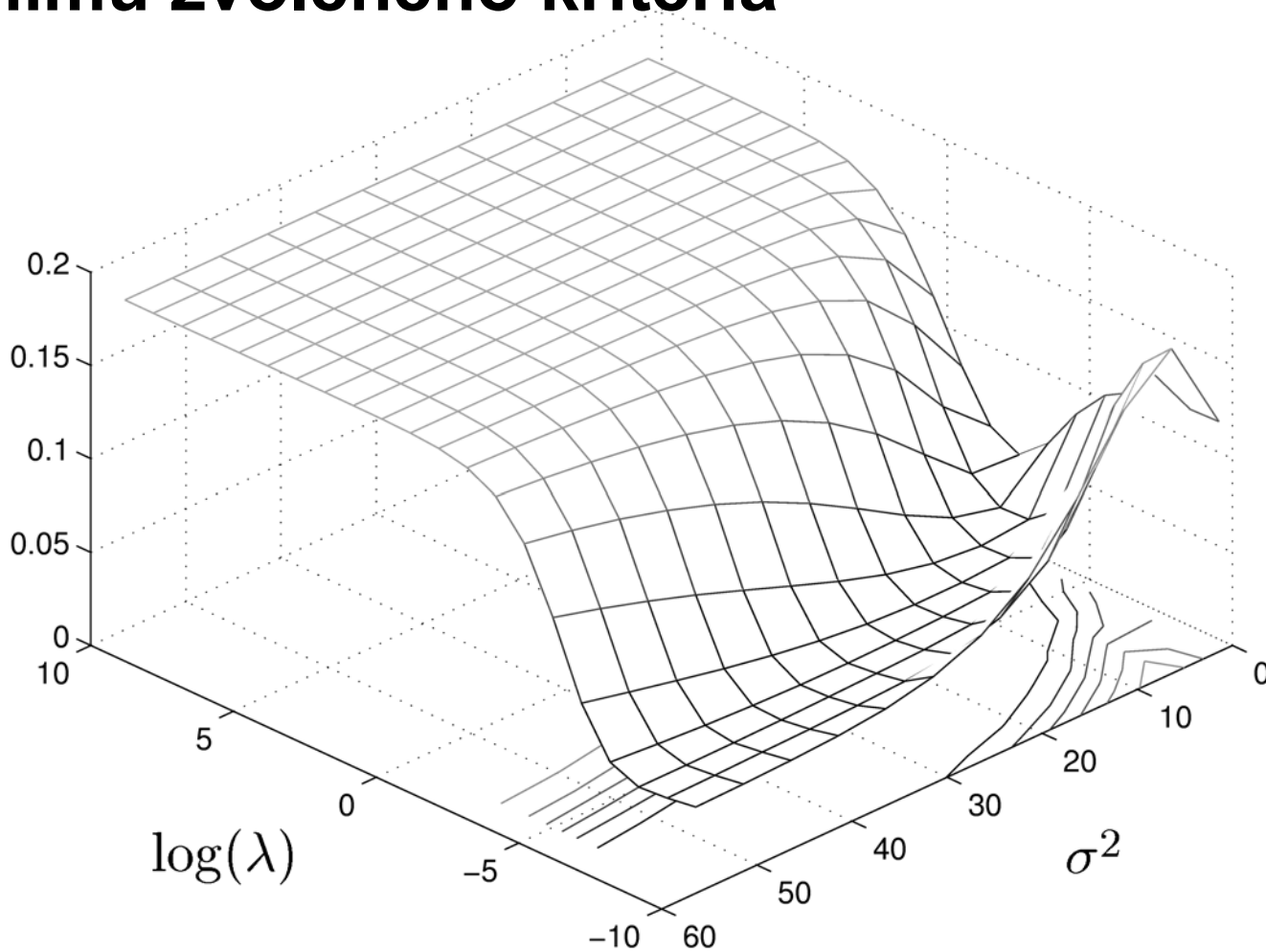
$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

„správná“ hodnota parametrů λ , případně σ^2 určujících míru vyhlazení odstraní šum v datech, přitom nezničí detaily

Možnosti volby parametrů

- ručně – odhadem zkoušíme měnit sledujeme výsledek
- ze znalosti distribuce šumu nebo alespoň jeho rozptylu – většinou není známo
- pouze z dat – na základě zvoleného kritéria

**„Optimální“ hodnoty parametru odpovídají
minimu zvoleného kritéria**



Příklady kriterií

- **střední kvadratická chyba (MSE) – nelze**

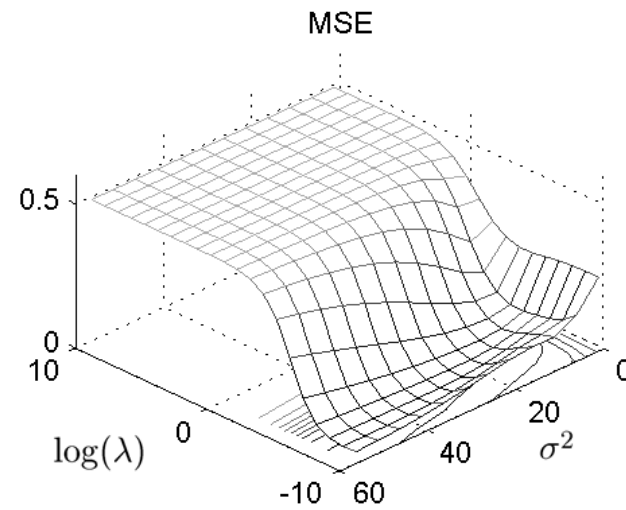
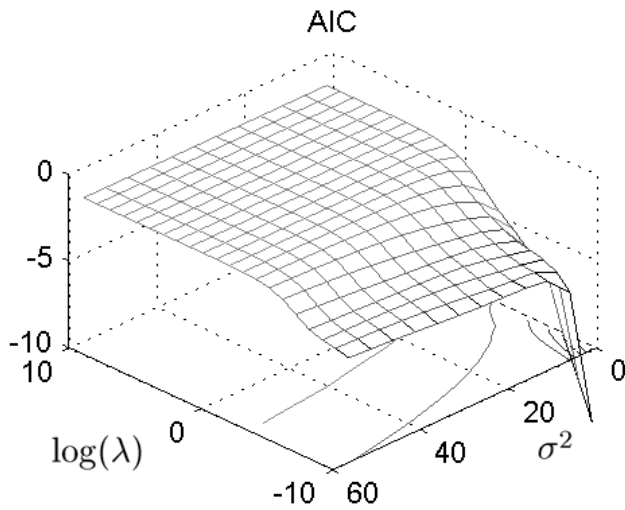
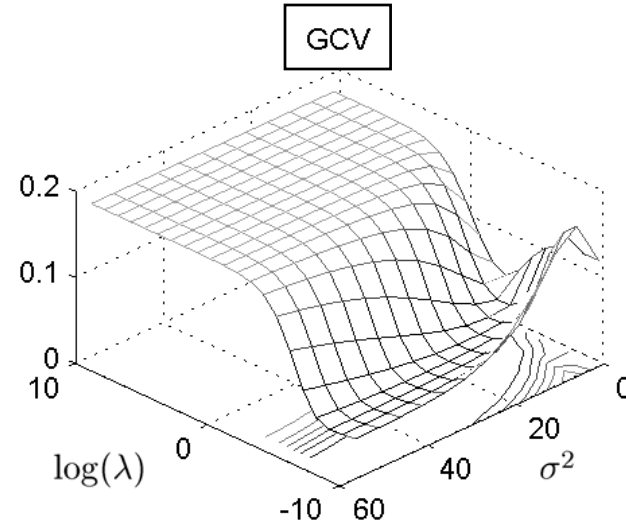
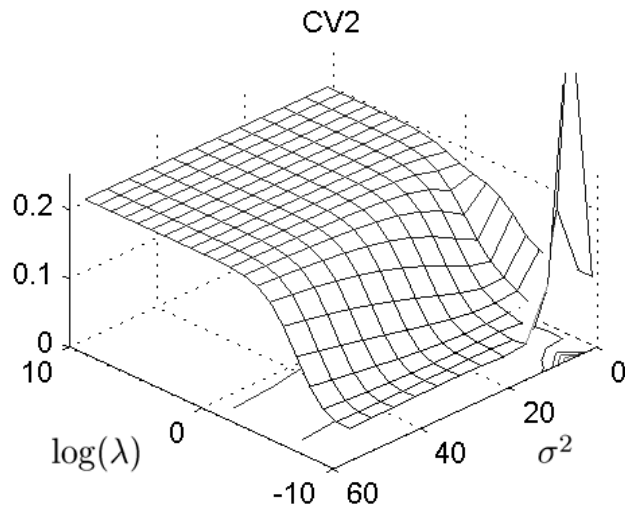
$$MSE(\lambda) = \sum_{i=1}^N \left(s_{\lambda}(\mathbf{x}_i) - T_U(\mathbf{x}_i) \right)^2$$

- **cross validation (CV)**

$$CV(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(s_{\lambda}^{[k]}(\mathbf{x}_k) - u_k \right)^2$$

- **generalized cross validation (GCV) – skutečně se používá, vychází z CV**

Různá kritéria se liší definicí „optimálnosti“



Implementace

- **numerická minimalizace – gradient**
- **pro λ použití logaritmické stupnice**
- **u GRBF nemusí globální minimum existovat**
– zastavení při malém spádu

Ukázka registrace pomocí GRBF



registrovaný snímek



referenční snímek

GRBF jsou vhodnější pro lokální deformace



TPS

MSE: 0.0111



GRBF

MSE: 0.0049