



Metamorfóza obrázků

© 1998-2011 Josef Pelikán
CGG MFF UK Praha

pepca@cgg.mff.cuni.cz

<http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/>

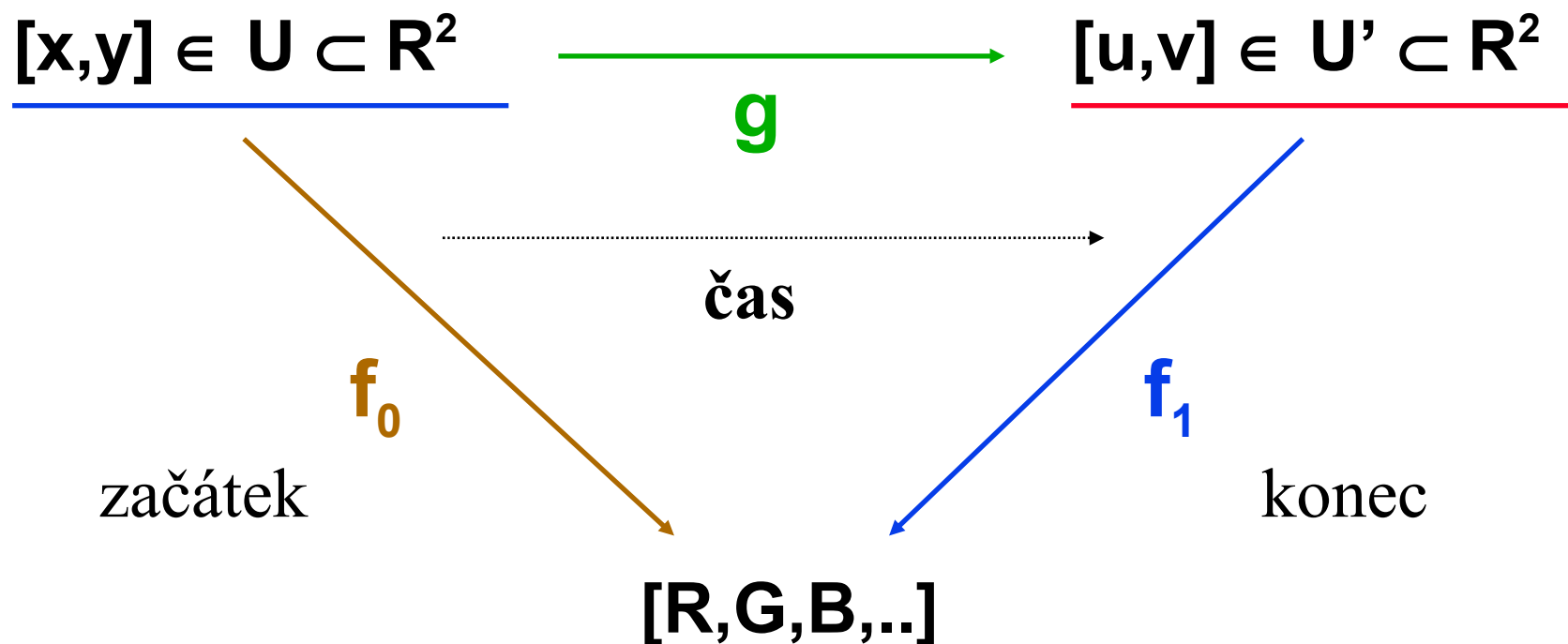
Metamorfóza obrázků - „morphing”

- ♦ **transformace mezi dvěma obrázky**
 - spojitá přechodová funkce
 - generování „mezi-snímků” („in-betweening”)
- ♦ **geometrická deformace (warping)**
 - deformace souřadné soustavy obrázku
- ♦ **změna obrazové (atributové) funkce**
 - barevný přechod jednoho obrázku v druhý



Schéma zobrazení

obrazové souřadnice



prostor atributů (barva)



Interpolace deformační funkce

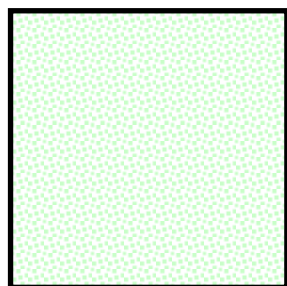
Zavedení časové proměnné do funkce \mathbf{g} :

$$\mathbf{g}_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad 0 \leq t \leq 1, \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in U \subset \mathbb{R}^2$$

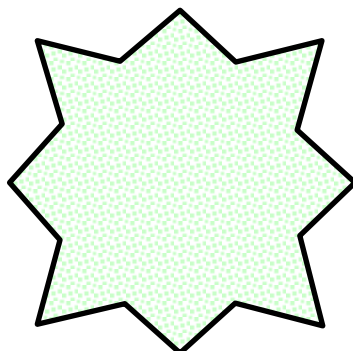
Okrajové podmínky:

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

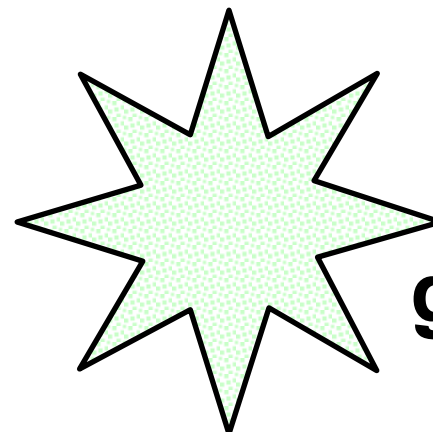
$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$$



\mathbf{g}_0



$\mathbf{g}_{0.5}$



\mathbf{g}_1



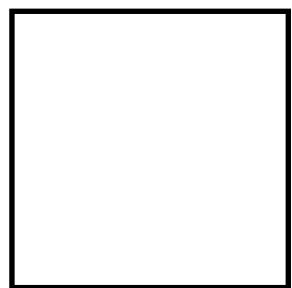
Interpolace obrazové funkce

Obrazová funkce v čase t :

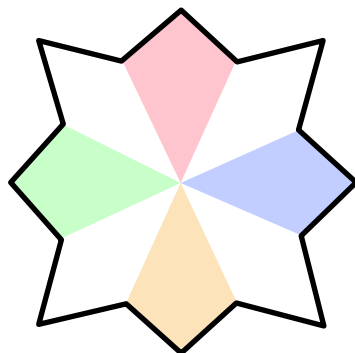
$$\underline{f_t[g_t(\mathbf{x}, \mathbf{y})]} = (1 - t) \cdot f_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t \cdot \underline{f_1[g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})]}$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \in U \subset \mathbb{R}^2$$

může být předpočítáno



f_0



$f_{0.5}$



f_1



Interpolace deformační funkce

- ♦ deformace zadávané **sítí**
 - interpolují se jednotlivé uzly sítě (trojúhelníková síť, sítě spline křivek)
- ♦ deformace zadané soustavou **šipek**
 - lineární interpolace koncových bodů šipek
 - interpolace středů šipek, jejich délky a orientace
- ♦ deformace **mnohoúhelníku v rovině**
 - přechodová funkce minimalizující vynaloženou deformační práci



Metamorfóza mnohoúhelníků

- vzájemná transformace **dvou mnohoúhelníků** v rovině
 - mohou mít různý počet vrcholů
 - spojitá přechodová funkce (pro „in-betweening“)
- metoda má **fyzikální základ**
 - model polygonu vyrobeného z drátu
 - minimalizace deformační práce mezi koncovými stavy
 - „natahovací“ i „ohýbací“ práce



Lineární interpolace vrcholů

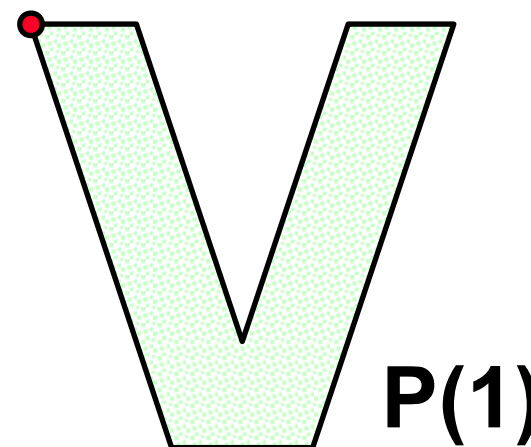
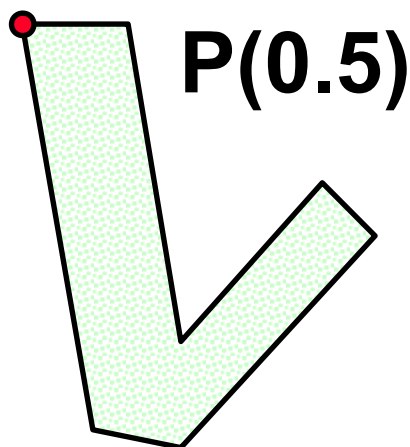
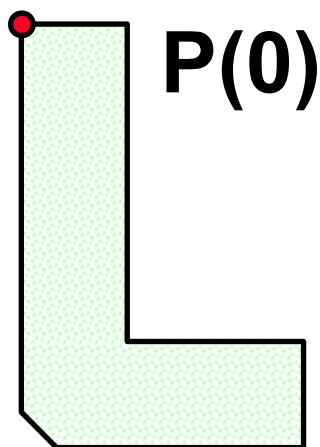
Mnohoúhelníky se stejným počtem vrcholů:

$$\mathbf{P}(0) = [\mathbf{P}_0(0), \mathbf{P}_1(0), \dots, \mathbf{P}_N(0) = \mathbf{P}_0(0)]$$

$$\mathbf{P}(1) = [\mathbf{P}_0(1), \mathbf{P}_1(1), \dots, \mathbf{P}_N(1) = \mathbf{P}_0(1)]$$

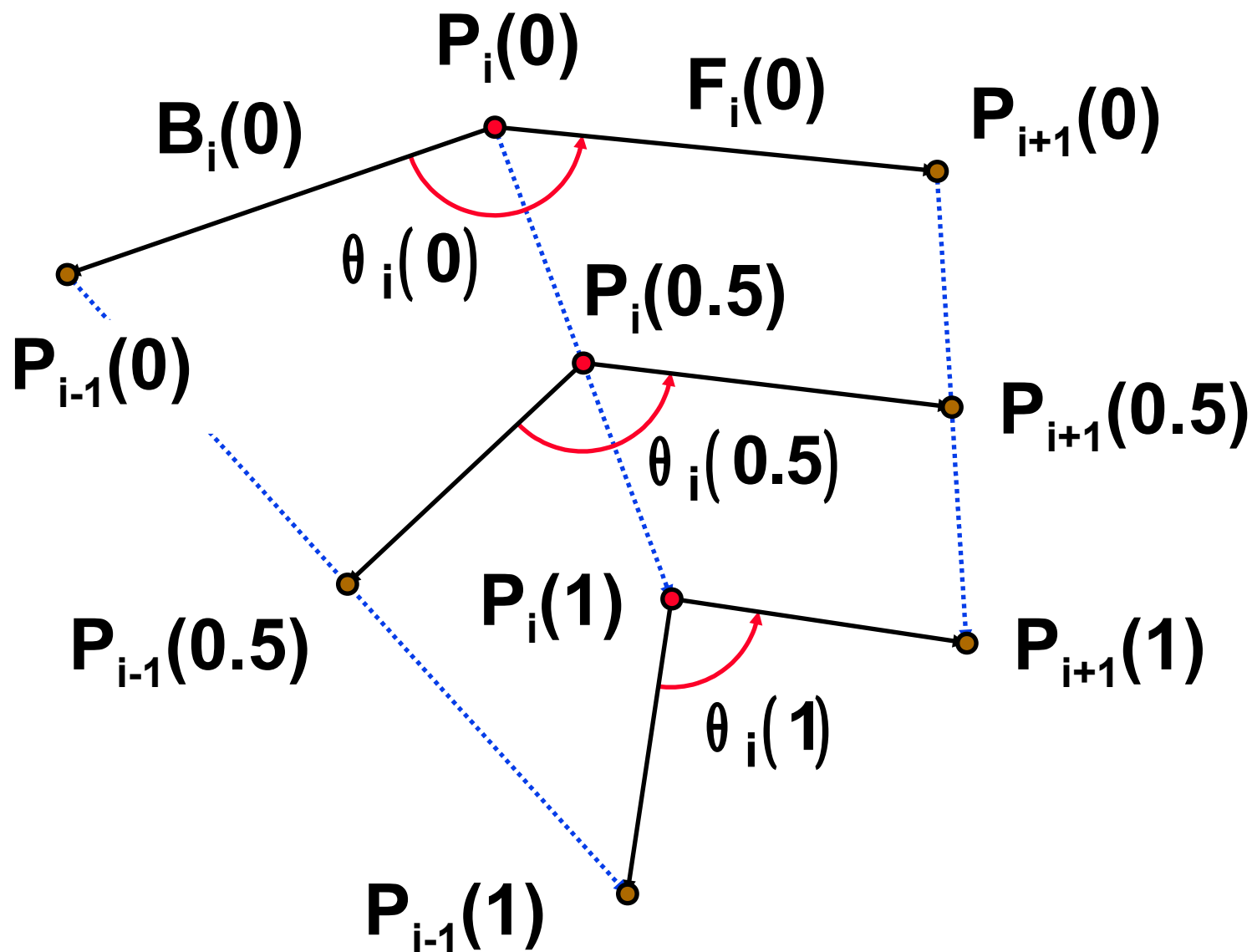
Mezipoloha vrcholu i :

$$\mathbf{P}_i(t) = (1-t) \cdot \mathbf{P}_i(0) + t \cdot \mathbf{P}_i(1)$$





Interpolace úhlů





Vyjádření vnitřních úhlů

$$\begin{aligned} \theta_i(\mathbf{t}) &= \angle \mathbf{P}_{i-1}(\mathbf{t}), \mathbf{P}_i(\mathbf{t}), \mathbf{P}_{i+1}(\mathbf{t}) \\ &= \angle \mathbf{B}_i(\mathbf{t}), \mathbf{0}, \mathbf{F}_i(\mathbf{t}) \end{aligned}$$

Pro úhel svíraný dvěma úsečkami platí:

$$\tan(\angle \mathbf{A}, \mathbf{0}, \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_A x_B + y_A y_B}$$

$$\tan \theta_i(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{B}_i(\mathbf{t}) \times \mathbf{F}_i(\mathbf{t})}{\mathbf{B}_i(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{F}_i(\mathbf{t})} = \frac{y_0(1-t)^2 + y_1 2t(1-t) + y_2 t^2}{x_0(1-t)^2 + x_1 2t(1-t) + x_2 t^2}$$



Vyjádření vnitřních úhlů

$$\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0] = [\mathbf{F}_i(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{B}_i(\mathbf{0}), \mathbf{F}_i(\mathbf{0}) \times \mathbf{B}_i(\mathbf{0})]$$

$$\mathbf{Q}_1 = [\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i(\mathbf{1}) \cdot \mathbf{B}_i(\mathbf{0}) + \mathbf{F}_i(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{B}_i(\mathbf{1})), \\ \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i(\mathbf{1}) \times \mathbf{B}_i(\mathbf{0}) + \mathbf{F}_i(\mathbf{0}) \times \mathbf{B}_i(\mathbf{1})) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = [\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2] = [\mathbf{F}_i(\mathbf{1}) \cdot \mathbf{B}_i(\mathbf{1}), \mathbf{F}_i(\mathbf{1}) \times \mathbf{B}_i(\mathbf{1})]$$

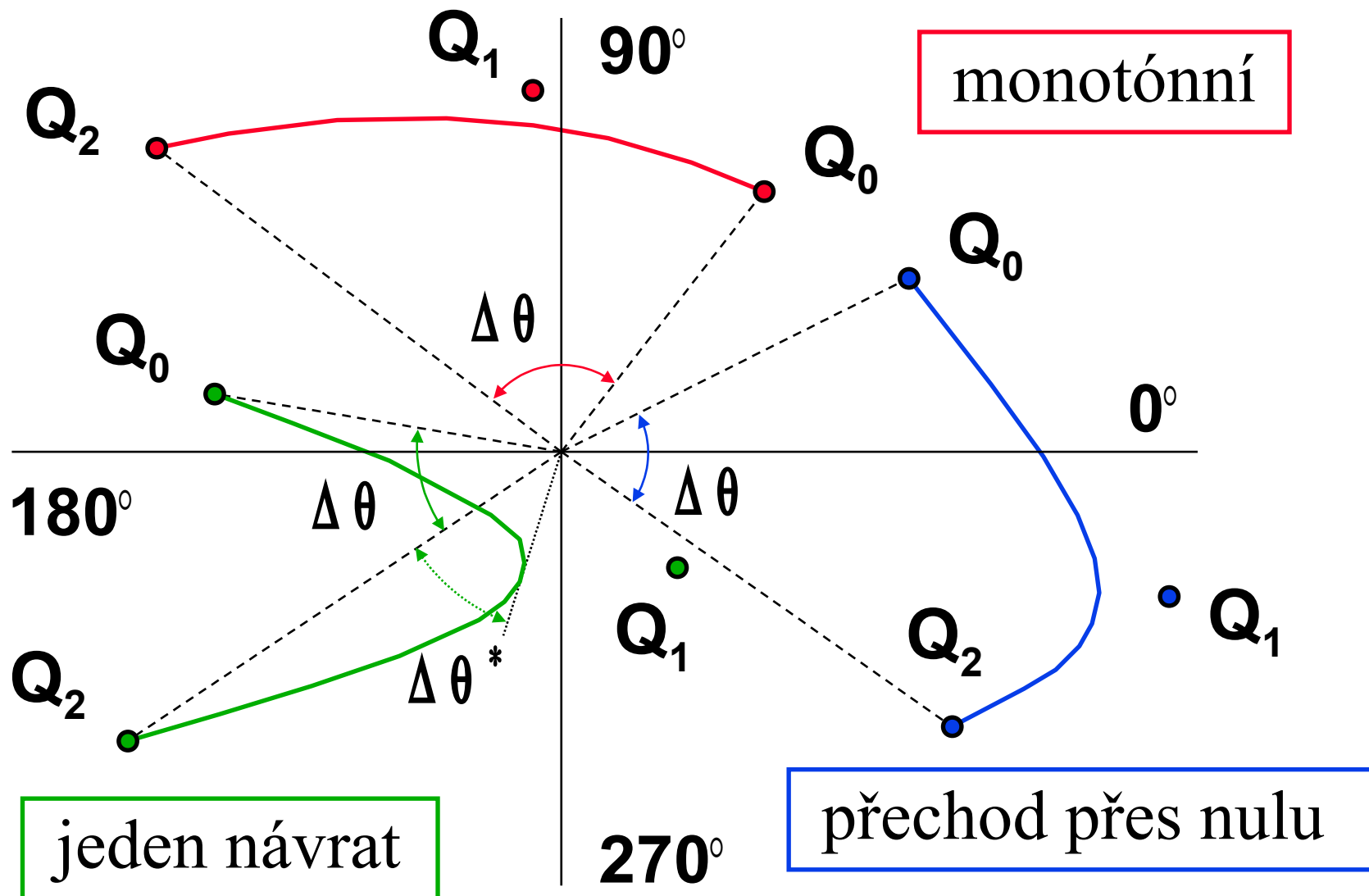
Kvadratická **Bézierova křivka** daná uzly \mathbf{Q}_i :

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 \cdot (1-t)^2 + \mathbf{Q}_1 \cdot 2t(1-t) + \mathbf{Q}_2 \cdot t^2$$

přitom platí: $\theta_i(t) = \angle [\mathbf{1}, \mathbf{0}], [\mathbf{0}, \mathbf{0}], \mathbf{Q}(t)$



Změna vnitřního úhlu





„Natahovací“ práce

Fyzikálně **přesný vzorec:**

$$W = \frac{\delta^2 \cdot A \cdot E}{2 \cdot L_0}$$

A průřez drátu

E modul pružnosti materiálu

L₀ původní délka drátu

δ (absolutní) prodloužení

Při **degeneraci** drátu do jednoho bodu by vyšla **nekonečná práce!**

„Natahovací” práce



Upravený vzorec:

$$W_S = \frac{k_S \cdot |L_1 - L_0|^{e_S}}{(1 - c_S) \cdot \min\{L_0, L_1\} + c_S \cdot \max\{L_0, L_1\}}$$

$k_S = A \cdot E$ koeficient pružnosti materiálu

e_S exponent pružnosti (1 .. plastický, 2 .. pružný)

c_S pokuta za degeneraci úsečky



„Ohýbací” práce

$$\mathbf{W}_B = \mathbf{k}_B \cdot \left(\Delta \theta + \mathbf{m}_B \cdot \Delta \theta^* \right)^{e_B} + \mathbf{p}_B(\mathbf{Q})$$

\mathbf{k}_B koeficient pružnosti v ohybu

\mathbf{m}_B pokuta za nemonotónní změnu vnitř. úhlu

$\Delta \theta$ celková změna vnitřního úhlu

$\Delta \theta^*$ „přehnutí” vnitřního úhlu

\mathbf{p}_B pokuta za přechod přes nulu („překlopení”),
nula pro $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ neprotínající osu nulového úhlu



Výpočet celkové práce

- součet všech „**natahovacích**” a „**ohýbacích**” prací
 - „natahovací” práce pro každou hranu
 - „ohýbací” práce pro každý vrchol
- **normalizace velikosti mnohoúhelníků**
 - „natahovací” práce závisí na absolutním měřítku
 - uniformní změna měřítka každého z polygonů tak, aby jejich obalové obdélníky měly delší stranu délky **1**

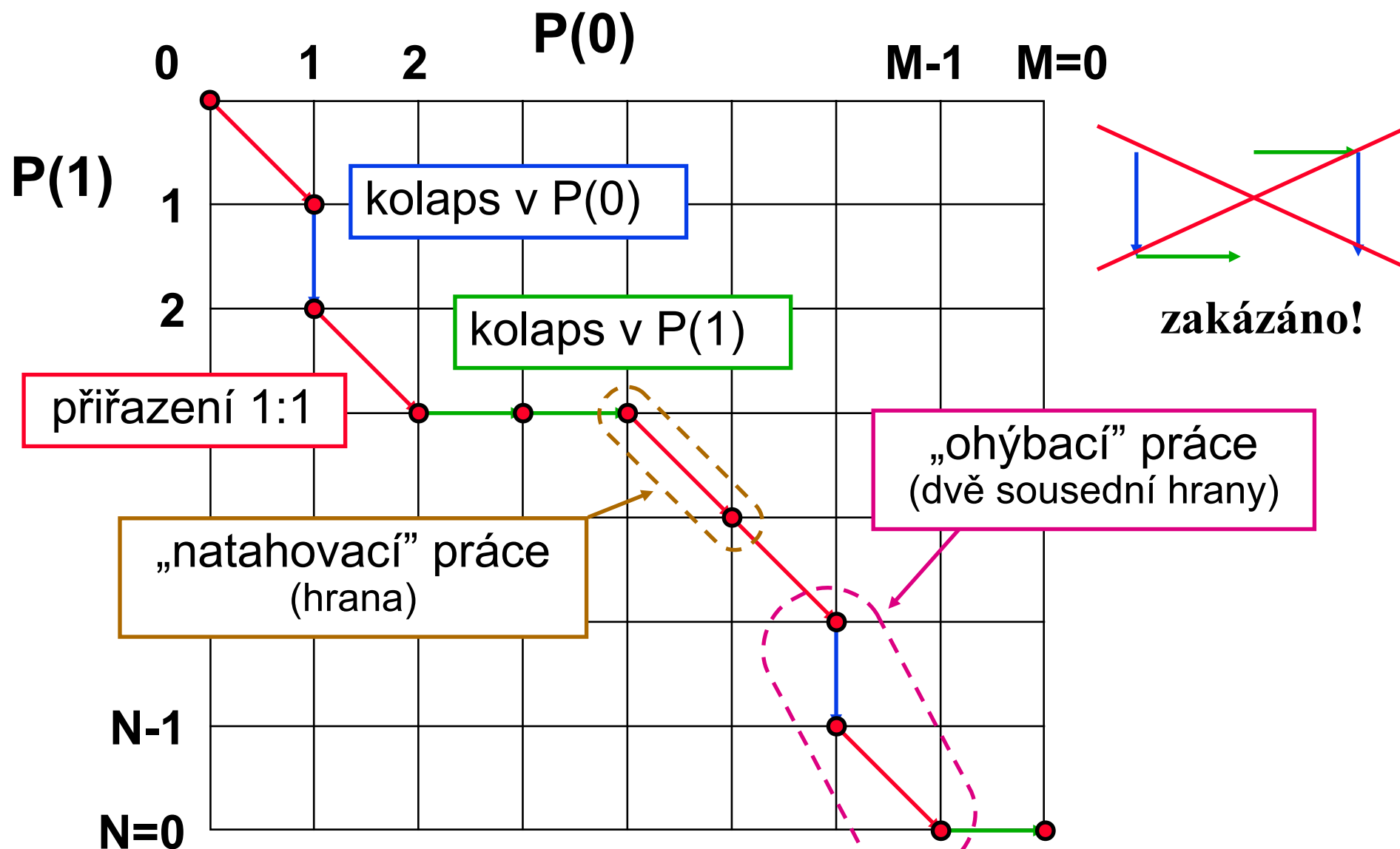


Globální optimalizace

- hledání takového **vzájemného přiřazení** zdrojových a cílových vrcholů, aby byla celková **deformační práce minimální**
 - nepředpokládá se stejný počet vrcholů \Rightarrow některé hrany mohou degenerovat
 - delší hrany mohou být předem rozděleny na několik úseků
- **dynamický algoritmus** se složitostí **$O(MN)$**
 - postup od kratších přiřazovacích úseků k delším



Graf přiřazení vrcholů





Algoritmus

- ♦ hledám **cestu z $[0,0]$ do $[M,N]$** s minimálním ohodnocením
 - cesta se nesmí vracet a zotáčet o 90°
- ♦ každá hrana cesty má „**natahovací**“ práci
- ♦ každé dvě sousední hrany definují „**ohýbací**“ práci
- **dynamický algoritmus** – každý počáteční úsek cesty má v pomocném poli tři hodnoty
 - kdyby se pokračovalo na **V**, **JV** nebo **J**



Obecnější algoritmus

- hledám cestu z $[i,0]$ do $[i,N]$ s minimálním ohodnocením
 - musím probrat všechny možné začátky (i)
 - cesta cyklicky přechází přes vertikální okraj
- o jeden řád větší složitost
 - matice velikosti $O(M \times N \times M)$



Další informace:

- **J. Gomes et al.: *Warping and Morphing of Graphical Objects*, C.N., SIGGRAPH'95**
- **T. Sederberg, E. Greenwood: *A Physically Based Approach to 2D Shape Blending*, SIGGRAPH'92**