



Transformace obrazu

© 1997-2011 Josef Pelikán
CGG MFF UK Praha

pepca@cgg.mff.cuni.cz

<http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/>



Transformace 2D obrazu

- **dekorelace dat**
 - potlačení závislosti jednotlivých vzorků (pixelů)
- **spektrální analýza a syntéza**
 - spektrální prostor: frekvence obsažené v signálu (obrazovém, zvukovém)
- nejčastěji **ortogonální** (nebo unitární) **transformace**
 - projekce do některé ortogonální (unitární) baze
- **spojité i diskrétní formy transformace**



Skalární součin

Vektorový prostor se skalárním součinem $\langle *, * \rangle$:

- reálné nebo komplexní funkce
na intervalu T :

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

- posloupnosti reálných nebo
komplexních čísel:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_i a_i \cdot b_i$$

- reálné nebo komplexní
matice:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot b_{ij}$$



Ortogonalní systém

System $\mathbf{U} = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots \}$ je ortogonalní,
jestliže platí:

$$\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = \begin{cases} c_m > 0 & \text{pro } m = n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

System \mathbf{U} je ortonormální, jestliže platí:

$$\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = \delta(m - n)$$



Úplný ortogonální systém

Ortogonální systém $\mathbf{U} = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots \}$ je úplný, jestliže:

- 1) v prostoru **konečné dimenze** je bazí
- 2) v prostoru **nekonečné dimenze** lze každý prvek \mathbf{a} aproximovat libovolně přesně částečným součtem:

$$\mathbf{a} \cong \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{u}_i$$



Ortogonalní transformace

Výpočet koeficientů pro aproximaci prvku
ortogonálním systémem:

$$\min_{A_i} \left\{ \left\| \mathbf{a} - \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{u}_i \right\| \right\}$$

Optimální koeficient:

$$\mathbf{A}_i = \frac{1}{c_i} \langle \mathbf{a}, \mathbf{u}_i \rangle$$

Transformace \mathbf{T} :

$$\mathbf{a} \rightarrow \{ \mathbf{A}_i \}$$




Separabilní 2D transformace

- diskrétní transformace v prostoru $\mathbf{R}^{M \times N}$ potřebuje $\mathbf{O}(M^2N^2)$ násobení a sčítání
 - $M \times N$ koeficientů, každý $M \times N$ násobení

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N a(k,l) \cdot u_{ij}(k,l) \quad \forall i,j$$

- jestliže je systém \mathbf{U} separabilní, je třeba jen $\mathbf{O}(MN(M+N))$ operací



$$u_{ij}(k,l) = v_i(k) \cdot w_j(l)$$



Separabilní 2D transformace

- ◆ systémy $\{ \mathbf{v}_i \}$ a $\{ \mathbf{w}_j \}$ musí být samy také **ortogonální**
- ◆ často se pro čtvercové matice používá $\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$
- ◆ **separabilní transformace** se provádí ve dvou krocích
 - jeden krok transformuje sloupce, druhý řádky
 - maticový zápis:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{W} \\ &= \mathbf{A}^v \cdot \mathbf{W} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}^w \end{aligned}$$



Odvození

$$\begin{aligned} \underline{A_{ij}} &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N a(k,l) \cdot u_{ij}(k,l) = \quad \forall i,j \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N a(k,l) \cdot v_i(k) \cdot w_j(l) = \\ &= \sum_{k=1}^M v_i(k) \cdot \sum_{l=1}^N a(k,l) \cdot w_j(l) = \sum_{k=1}^M v_i(k) \cdot A_j^w(k) \\ &= \sum_{l=1}^N w_j(l) \cdot \sum_{k=1}^M a(k,l) \cdot v_i(k) = \sum_{l=1}^N w_j(l) \cdot A_i^v(l) \end{aligned}$$



Komplexní Fourierova řada

$$\left\{ \exp\left(\frac{2\pi n t}{T_0} i\right) = \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

Komplexní funkce g s periodou T_0 :

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \exp\left(\frac{2\pi n t}{T_0} i\right)$$

$$A_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t) \cdot \exp\left(-\frac{2\pi n t}{T_0} i\right) dt$$

Spojité Fourierova transformace

Komplexní funkce $g(t)$ s konečnou energií \rightarrow
 \rightarrow komplexní spektrální funkce $G(f)$

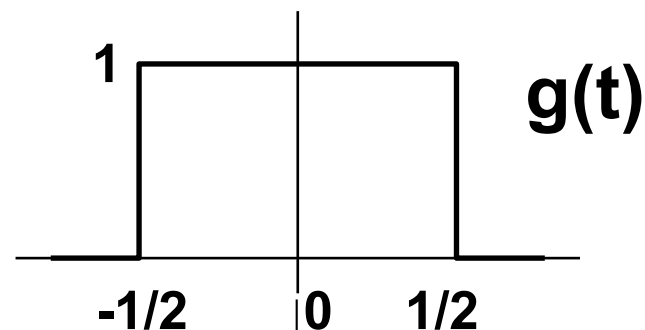
$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \exp(-2\pi f t i) dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \cdot \exp(2\pi f t i) df$$



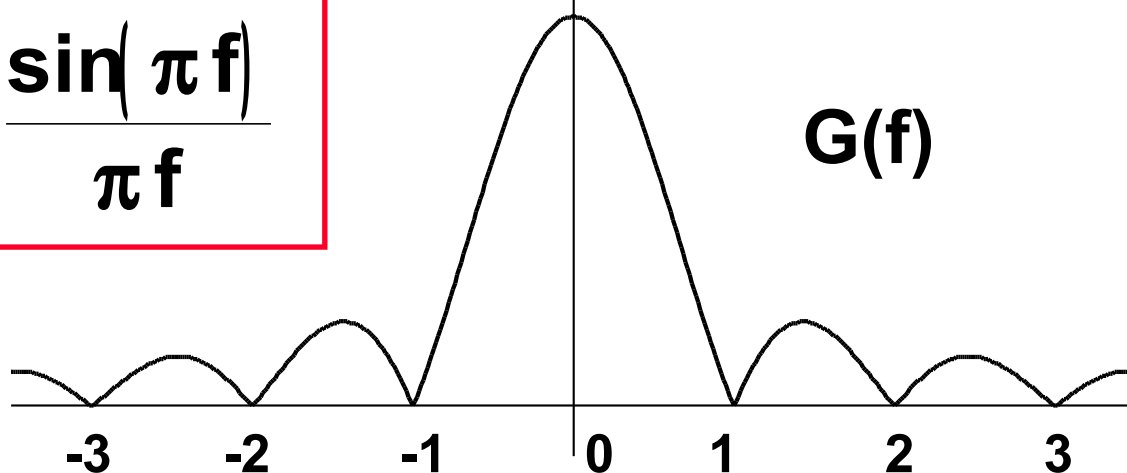
Příklad spojité FT

$g(t)$ - obdélník. impuls:

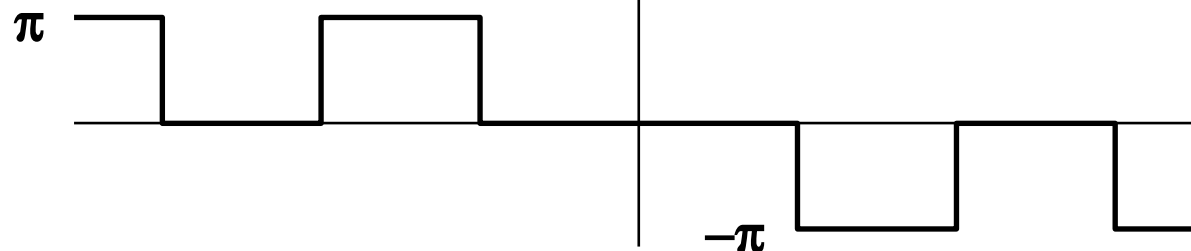


$$G(f) = \text{sinc}(\pi f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

amplituda:



fáze:



Diskrétní Fourierova transformace

Baze: $\left\{ \underline{f_k(n)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(\frac{2\pi kn}{N} i\right); \quad 0 \leq k, n < N \right\}$

Unitární transformace:

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \cdot f_k(-n)$$

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} G(k) \cdot f_k(n)$$



Rychlé algoritmy výpočtu DFT

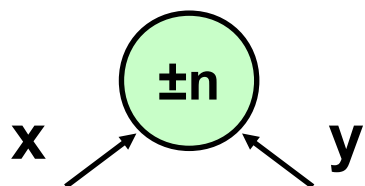
- využívají vlastnosti **komplexně sdružených koeficientů**:

$$\mathbf{G}\left(\frac{\mathbf{N}}{2} + \mathbf{k}\right) = \overline{\mathbf{G}\left(\frac{\mathbf{N}}{2} - \mathbf{k}\right)}$$

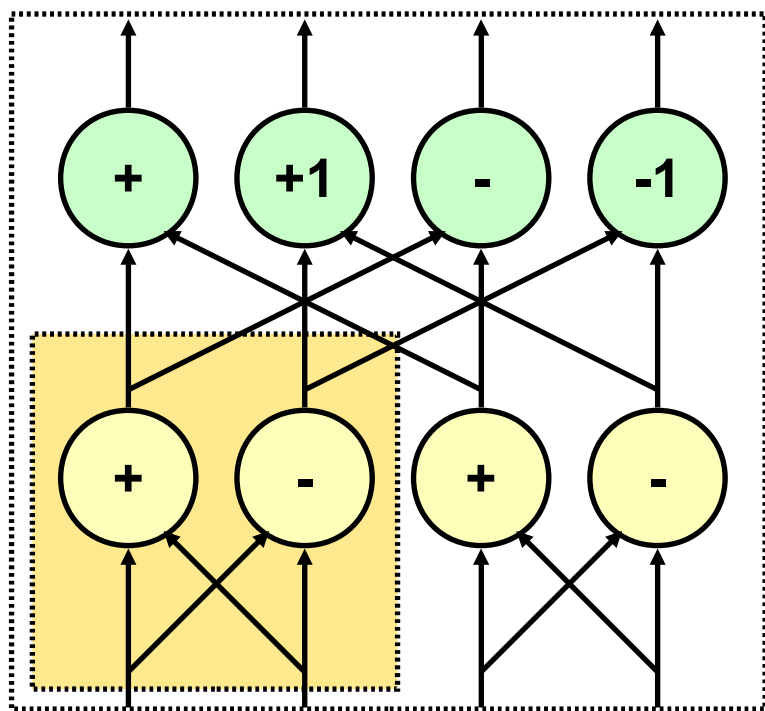
- princip „**rozděl a panuj**” (Cooley ‘65) **FFT_N**:
 - koeficienty se rozdělí na sudé a liché (**N=2M**)
 - každá skupina se spočítá algoritmem **FFT_M**
 - výpočet výsledku pomocí **N** násobení a sčítání
- složitost 1D FFT je **O(N log₂N)**, při paralelní HW implementaci **O(log₂N)**



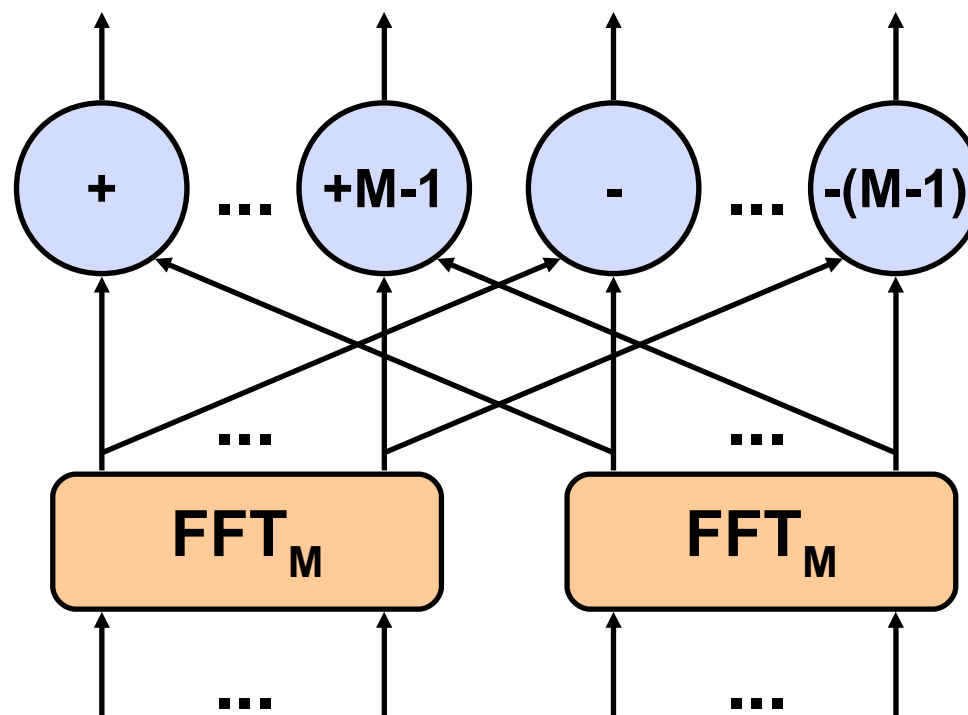
Schema rychlé DFT (FFT)



$$x \pm y \cdot \exp\left(-\frac{2\pi n}{M} i\right)$$



2 → 4





Diskrétní sinová transformace

Pro obrazová data s korelačním koeficientem < 0.5

$$\text{Baze: } \left\{ \underline{\mathbf{s}_k(\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi(k+1)(n+1)}{N+1}}; \quad 0 \leq k, n < N \right\}$$

Unitární transformace:

$$\mathbf{G}(\mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{g}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{n})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{n}) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{G}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{s}_k(\mathbf{n})$$

Diskrétní cosinová transformace

Pro obrazová data s velkým korelačním koeficientem

$$\text{Baze: } \left\{ \underline{\mathbf{C}_k \mathbf{c}_k(\mathbf{n})} = \mathbf{C}_k \cos \frac{\pi(2\mathbf{n} + 1) \mathbf{k}}{2\mathbf{N}}; \quad 0 \leq \mathbf{k}, \mathbf{n} < \mathbf{N} \right\}$$

Unitární transformace:

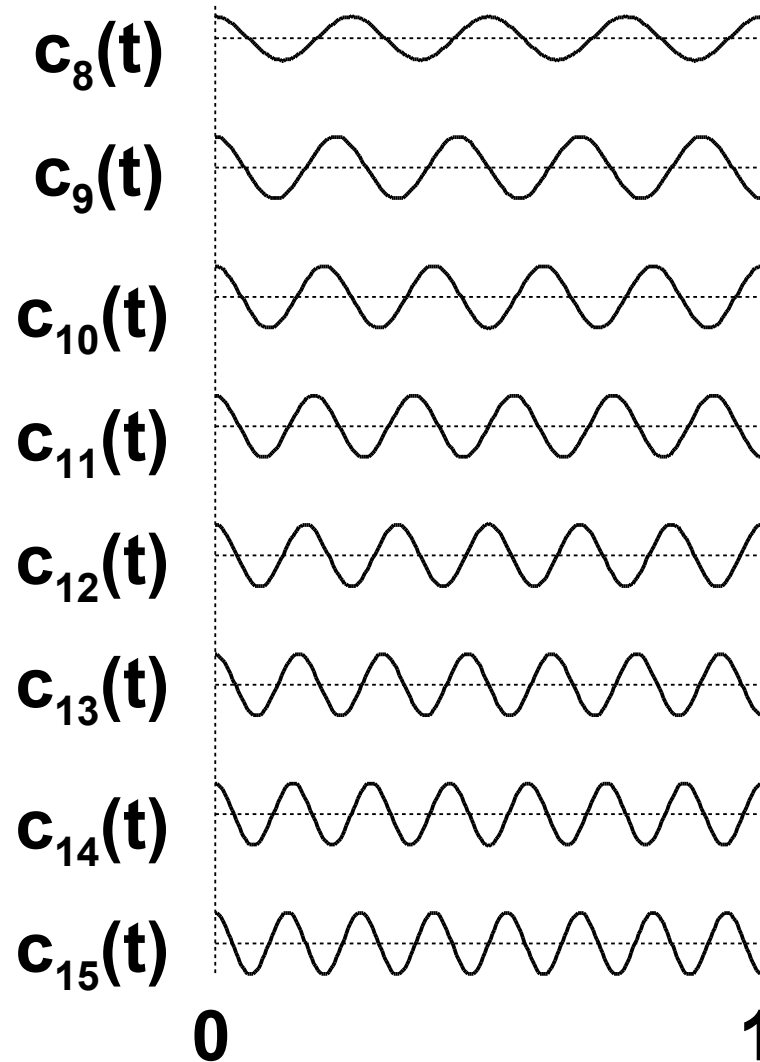
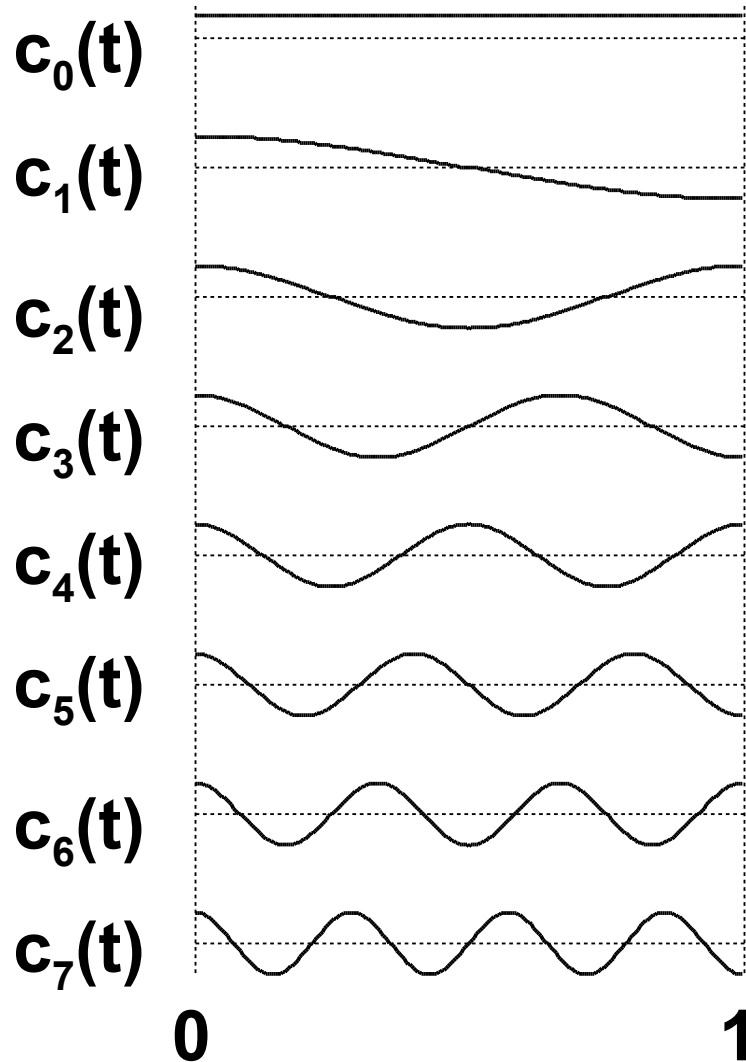
$$\mathbf{G}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}_k \sum_{\mathbf{n}=0}^{\mathbf{N}-1} \mathbf{g}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{c}_k(\mathbf{n})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{N}-1} \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{G}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{c}_k(\mathbf{n})$$

$$\mathbf{C}_k = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\mathbf{N}}} & \text{pro } \mathbf{k} = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\mathbf{N}}} & \text{jinak} \end{cases}$$

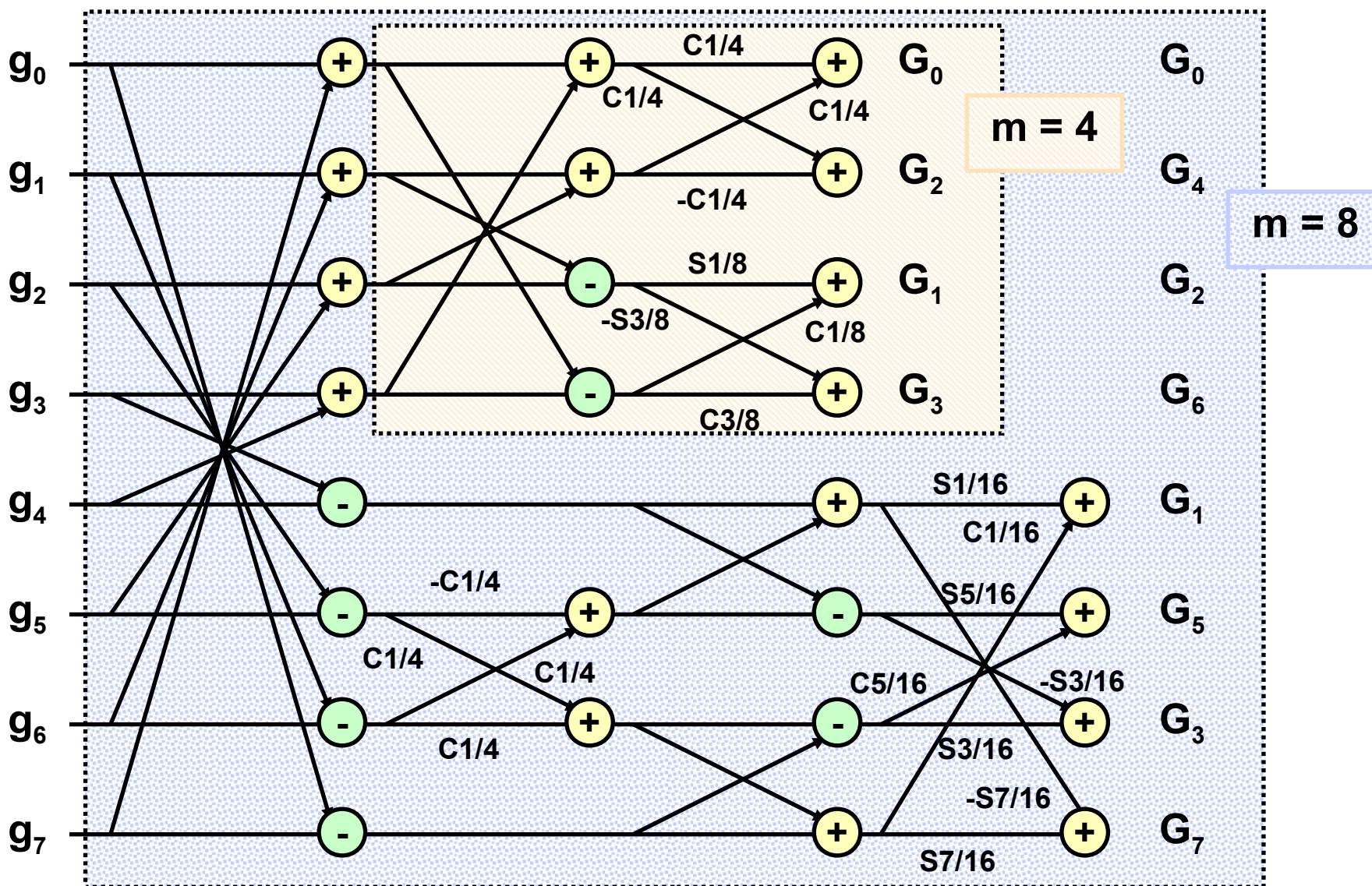


Příklad 1D cosinové baze





Schema rychlé DCT



Diskrétní Hartleyova transformace

Reálný ekvivalent diskrétní Fourierovy transformace

$$\text{Baze: } \left\{ \underline{h_k(n)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{cas} \frac{2\pi kn}{N}; \quad 0 \leq k, n < N \right\}$$

Unitární transformace:

$$\text{cas } x = \sin x + \cos x$$

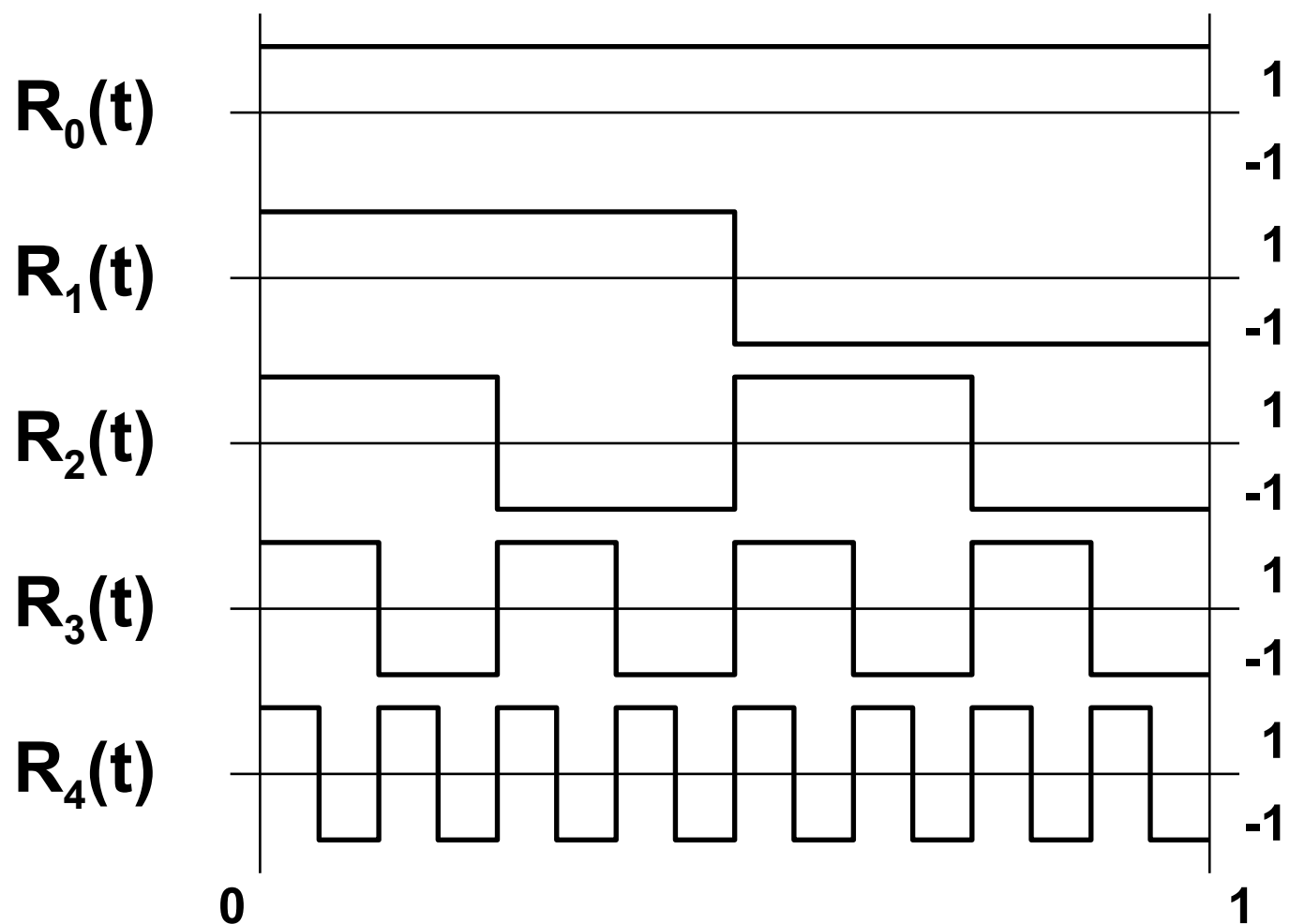
$$\mathbf{G}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{g}(n) \cdot h_k(n)$$

$$\mathbf{g}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{G}(k) \cdot h_k(n)$$



Rademacherovy funkce (1922)

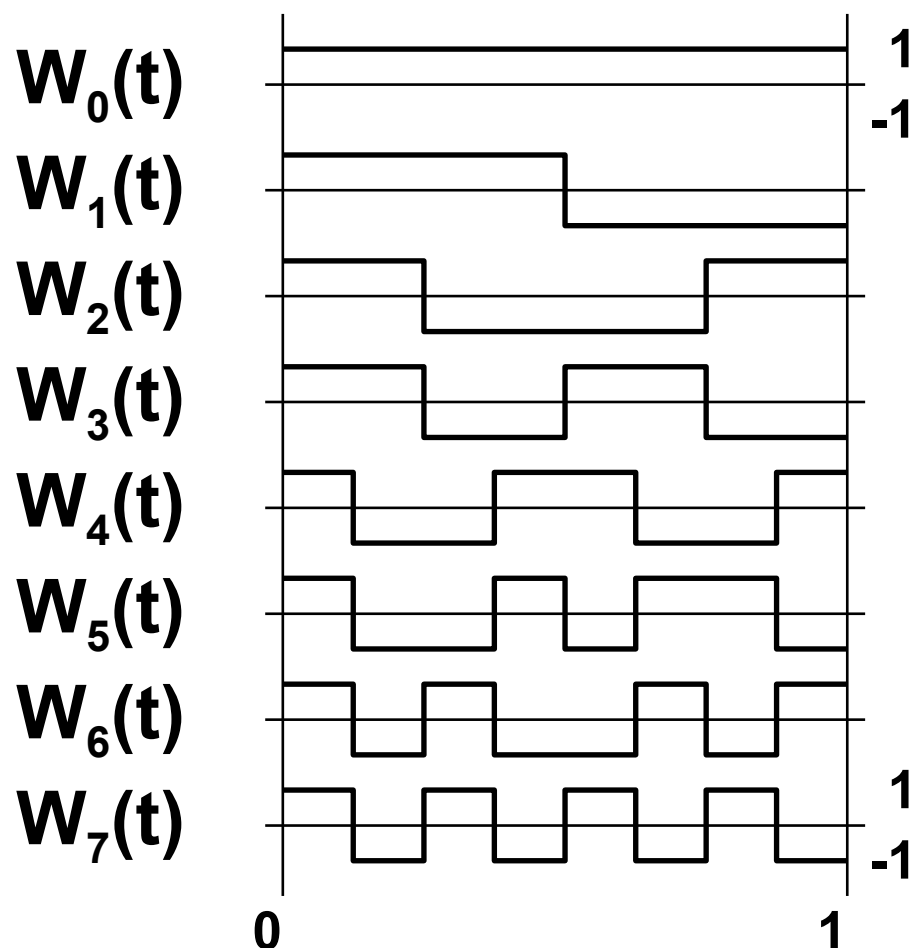
Ortogonalní **neúplný** systém funkcí na $\langle 0, 1 \rangle$:





Walshovy funkce (1923)

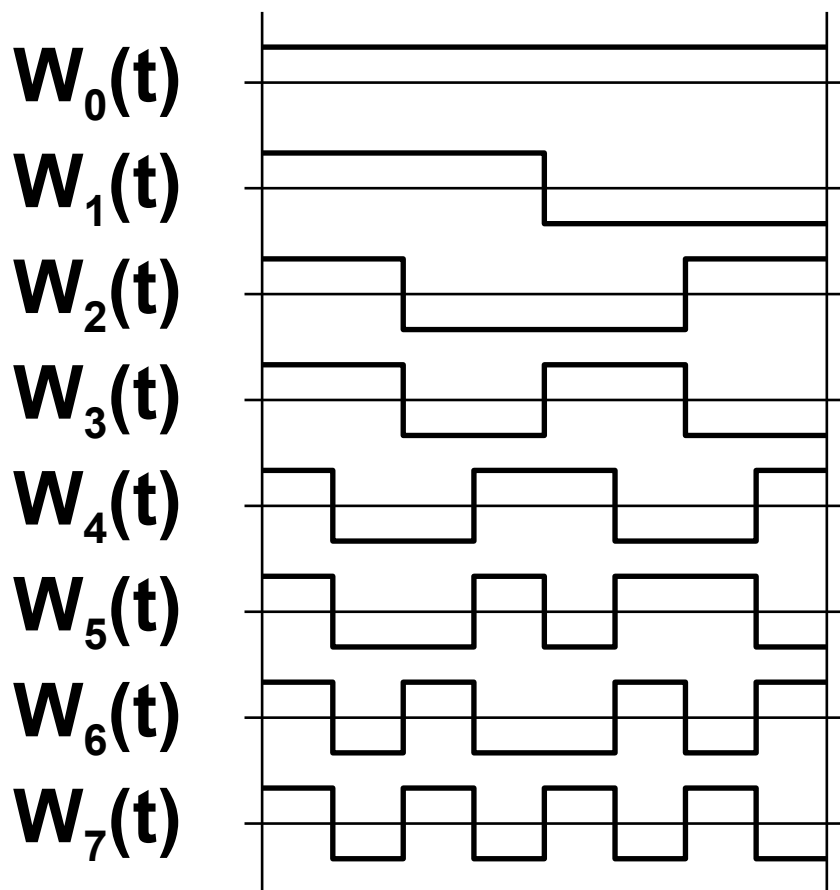
Zúplněný systém Rademacherových funkcí:



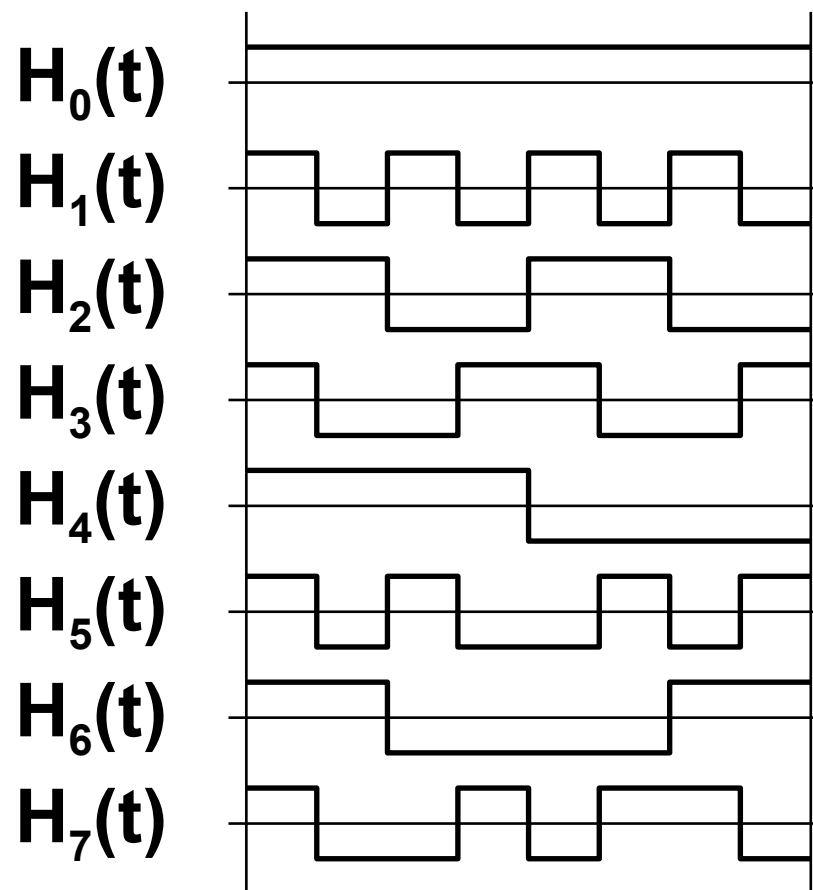


Hadamardovo uspořádaní

Uspořádání podle kmitočtu a rekurzivní dekompozice:



Walsh



Hadamard



Hadamardova transformace

Pro obrazová data s velkým korelačním koeficientem

$$\text{Baze: } \left\{ \underline{\mathbf{H}_k(\mathbf{n})} = \frac{1}{\sqrt{N}} (-1)^{b(\mathbf{k},\mathbf{n})}; \quad 0 \leq \mathbf{k}, \mathbf{n} < N \right\}$$

Unitární transformace:

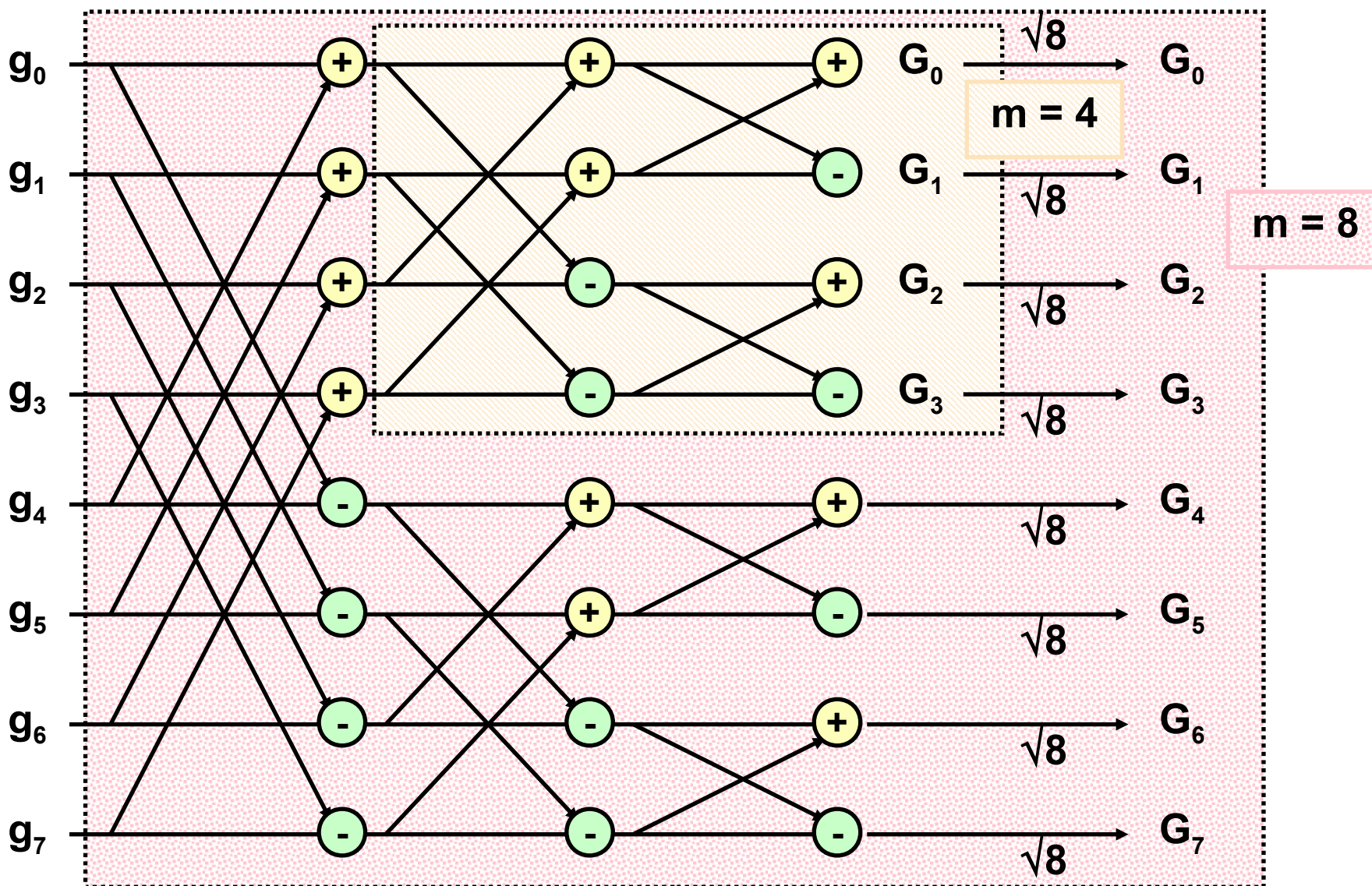
$$\mathbf{G}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{N-1} \mathbf{g}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{H}_k(\mathbf{n})$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k}=0}^{N-1} \mathbf{G}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{H}_k(\mathbf{n})$$

$$b(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \sum_{i=0}^{N-1} k_i n_i$$

binární rozvoje



Rychlá Hadamardova tr.





Hadamardova maticová tr.

Rekurentní definice Hadamardovy transformace v maticové podobě (jen pro $N=2^k$):

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_N & \mathbf{H}_N \\ \mathbf{H}_N & -\mathbf{H}_N \end{bmatrix}$$

Transformace maticí \mathbf{H} :

$$\mathbf{G}^T = \mathbf{H}\mathbf{g}^T \quad \mathbf{g} = \mathbf{G}\mathbf{H}$$



Haarova ortonormální baze

A. Haar (1909):

Pro $0 \leq k < N = 2^n$ lze jednoznačně nalézt čísla p, q tak, že platí:

$$k = 2^p + q - 1$$

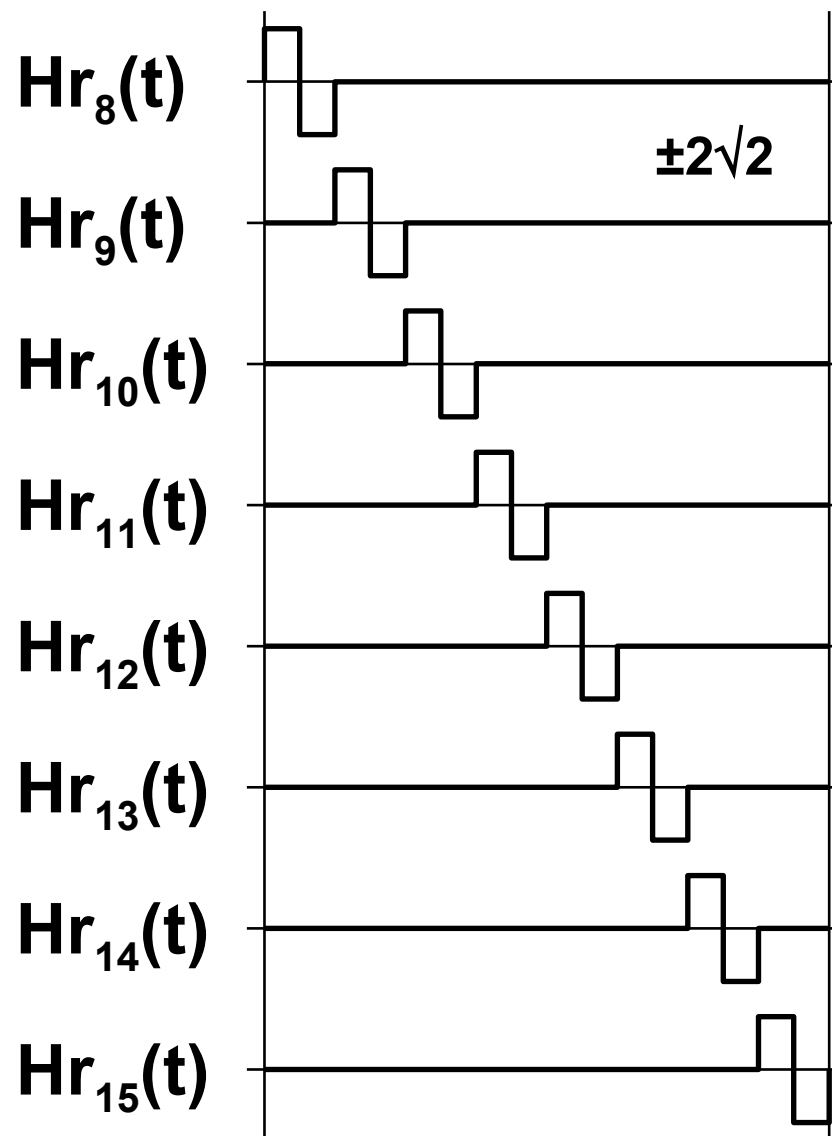
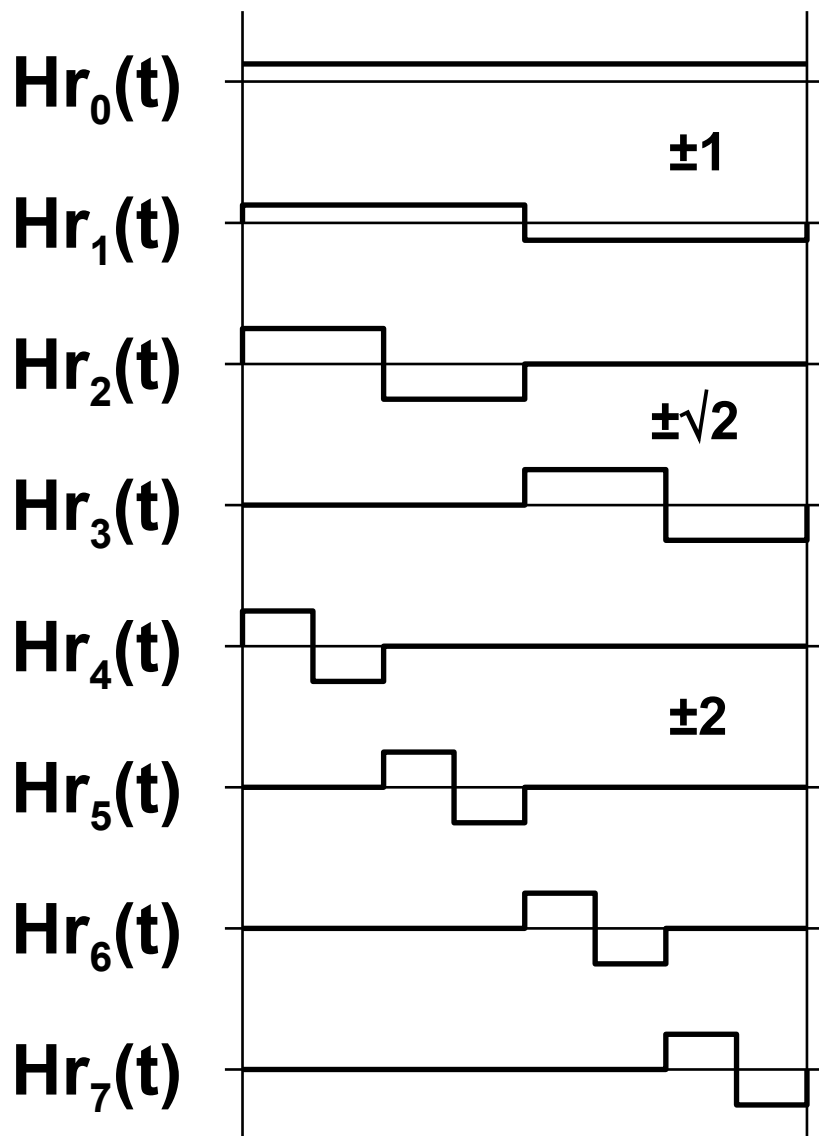
$$0 \leq p < n \quad 1 \leq q \leq 2^p$$

Baze na $\langle 0, 1 \rangle$:

$$\underline{Hr_0(\mathbf{x})} = \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \underline{Hr_k(\mathbf{x})} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2} & \frac{q-1}{2^p} \leq \mathbf{x} < \frac{q-1/2}{2^p} \\ -2^{p/2} & \frac{q-1/2}{2^p} \leq \mathbf{x} < \frac{q}{2^p} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Haarova baze pro $N=16$





Haarova transformace

- dobře reprezentuje **lokální změny obrazu**
 - většina bazických funkcí má velmi omezený nosič
- nejjednodušší **wavelet**
 - hierarchická rekurzivní definice, všechny prvky baze lze získat z jediné funkce dilatací a posunutím
- rychlá transformace
 - **$O(\log_2 N)$** : sčítání, odčítání a násobení $2^{p/2}$



Slantova transformace

- ◆ Slantova baze obsahuje **po částech lineární** funkce

Rekurentní definice Slantovy transformace:

$$\mathbf{S}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-3}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$



Rekurentní definice Slantovy tr.

$$S_{2N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{2N} & b_{2N} & 0 & -a_{2N} & b_{2N} & 0 \\ 0 & 0 & I_{N-2} & 0 & 0 & I_{N-2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -b_{2N} & a_{2N} & 0 & b_{2N} & a_{2N} & 0 \\ 0 & 0 & I_{N-2} & 0 & 0 & -I_{N-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_N & 0 \\ 0 & S_N \end{bmatrix}$$

$$a_{2N} = \sqrt{\frac{3N^2}{4N^2 - 1}} \quad b_{2N} = \sqrt{\frac{N^2 - 1}{4N^2 - 1}}$$



Další informace:

- **A. Jain: *Fundamentals of Digital Image Processing***, Prentice-Hall, 1989, 132-188
- **W. Pratt: *Digital Image Processing***, 2nd edition, J. Wiley, New York, 1991, 193-216
- **S. Haykin: *An Introduction to Analog and Digital Communications***, J. Wiley, New York, 1989