Radiometrie, radiační metody

CGG MFF UK Praha

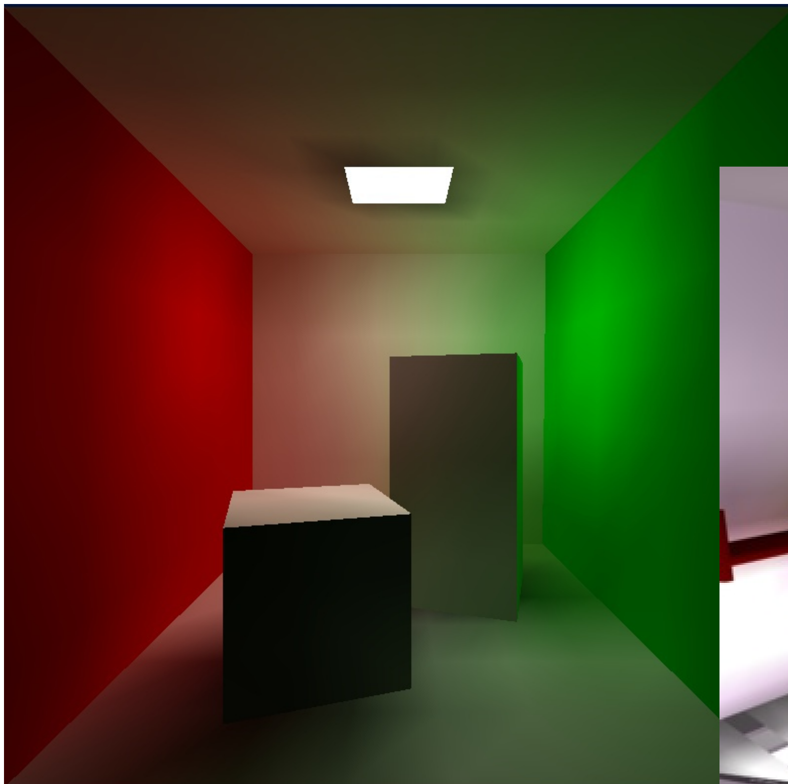
pepca@cgg.mff.cuni.cz

http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/

Globální výpočet osvětlení

- založen na **fyzikálním principu**
  - propagace energie (světla) v difusním prostředí
  - použití v syntéze obrazu: Cindy Goral (SIGGRAPH 1984)
- dokáže dobře spočítat **měkké osvětlení**, sekundární odrazy světla, ..
- základní metoda nezvládá **ostré světlo**, zrcadlové odrazy, ..
- **časově náročnější** než rekurzivní sledování paprsku
  - RT: zobrazení (rendering), Rad: jen výpočet osvětlení

Radiační metoda – příklady

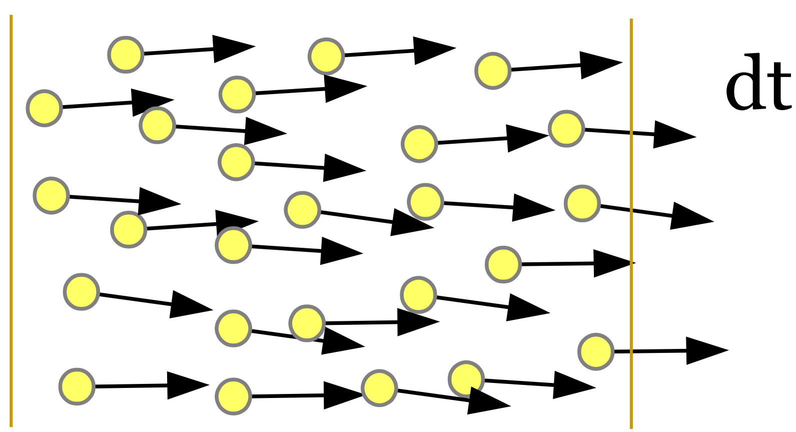


Základy radiometrie I

Zářivý tok, výkon (*Radiant flux*, *Radiant power*)

$$\Phi = \frac{d\,Q}{d\,t} \qquad [\,\mathrm{W}\,]$$

Počet fotonů (přepočtených na energii) za jednotku času (100W žárovka: cca 10^{19} fotonů/s, oko z monitoru: 10^{12} f/s).

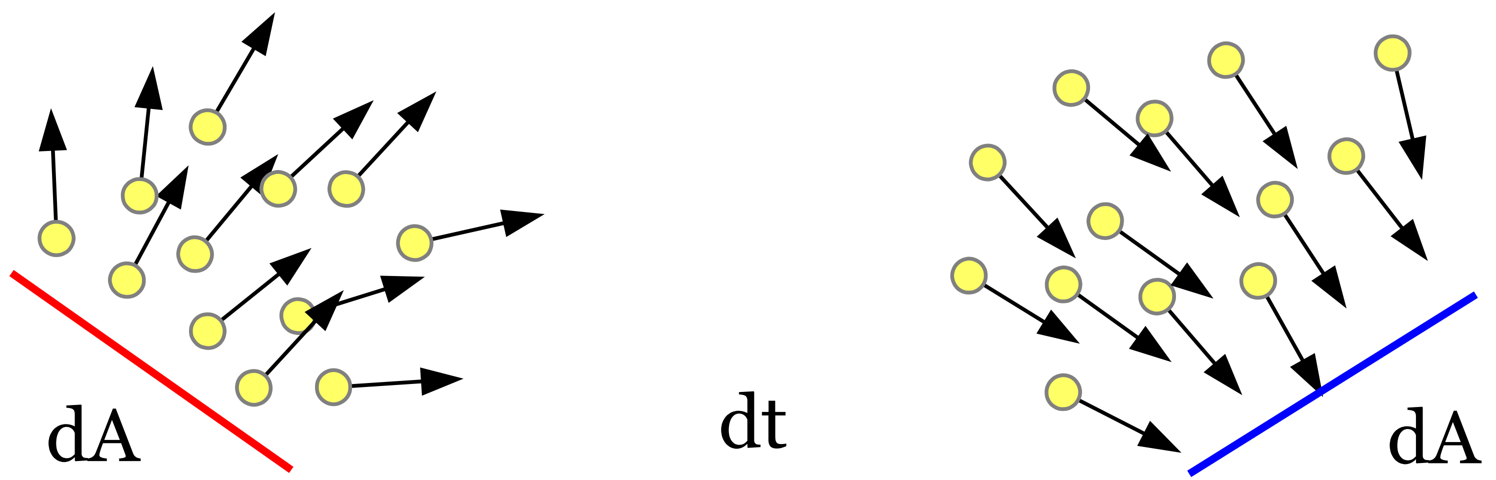


Základy radiometrie II

Hustota zářivého toku (*Irradiance*, *Radiant exitance*, *Radiosity*)

$$E(x) = \frac{d\,\Phi(x)}{d\,A(x)} \qquad [\,\mathrm{W/m^2}\,]$$

Plošná hustota fotonů (přepočtených na energii) dopadajících nebo vyzařovaných za jednotku času.



Základy radiometrie III

Zář (*Radiance*)

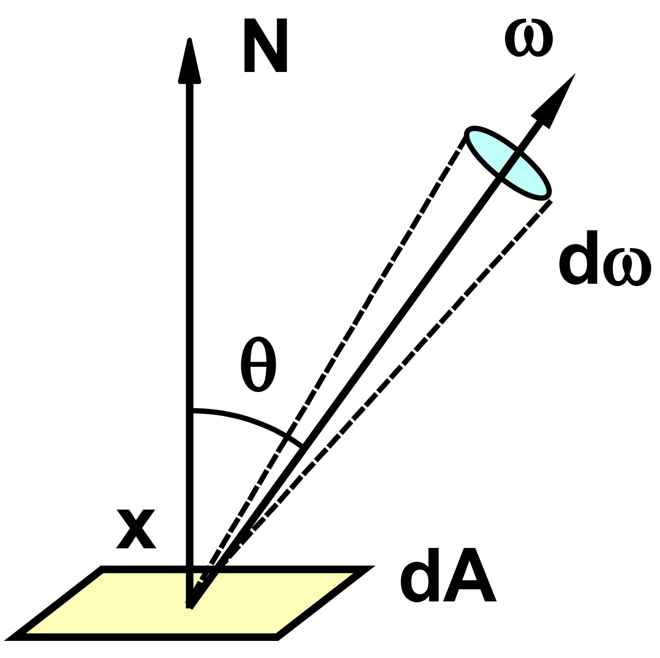
$$L(x,\omega) = \frac{d^2\Phi(x,\omega)}{d\,A_\omega^\perp(x)\,d\,\sigma(\omega)} \qquad [\,\mathrm{W/m^2/sr}\,]$$

Počet fotonů (přepočtených na energii) procházejích za jednotku času malou ploškou kolmou na směr ω. Záření míří do malého kuželе kolem daného směru ω.

Zář je veličina definovaná jako **hustota** vzhledem k **d**$\mathbf{A}^\perp$ a současně vzhledem k prostorovému úhlu **dσ(ω)**.

Radiance I

- přijímaná (emitovaná) **radiance** ve směru ω:
  - $L_{in}(\omega)$ ($L_e(\omega)$, $L_{out}(\omega)$) [$W/(m^2 \cdot sr)$]

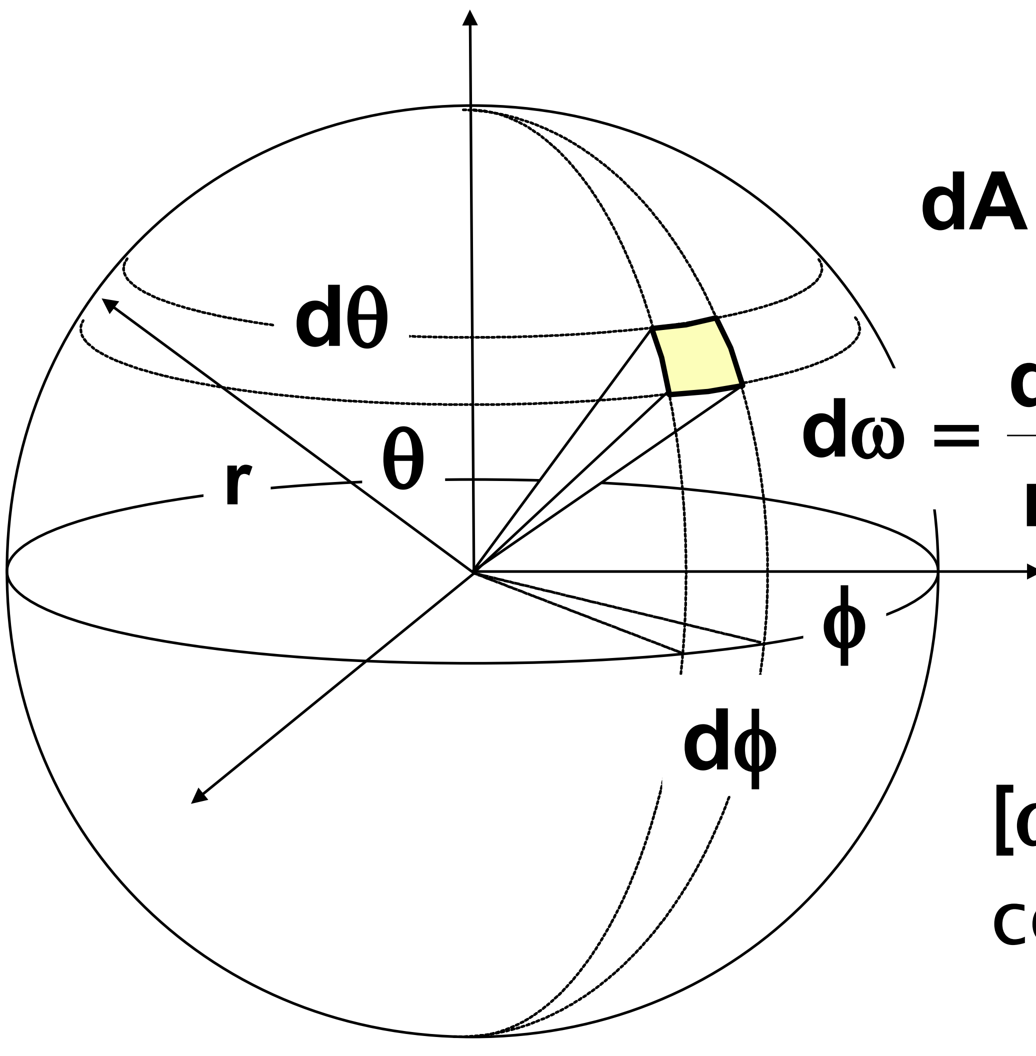


$$L_{out}(x,\omega) = \frac{d^2\Phi}{dA\, d\omega\, \cos\theta}$$

$$= \frac{dB_{out}}{d\omega\, \cos\theta}$$

$$= \frac{dI}{dA\, \cos\theta}$$

Prostorové úhly



$$dA = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

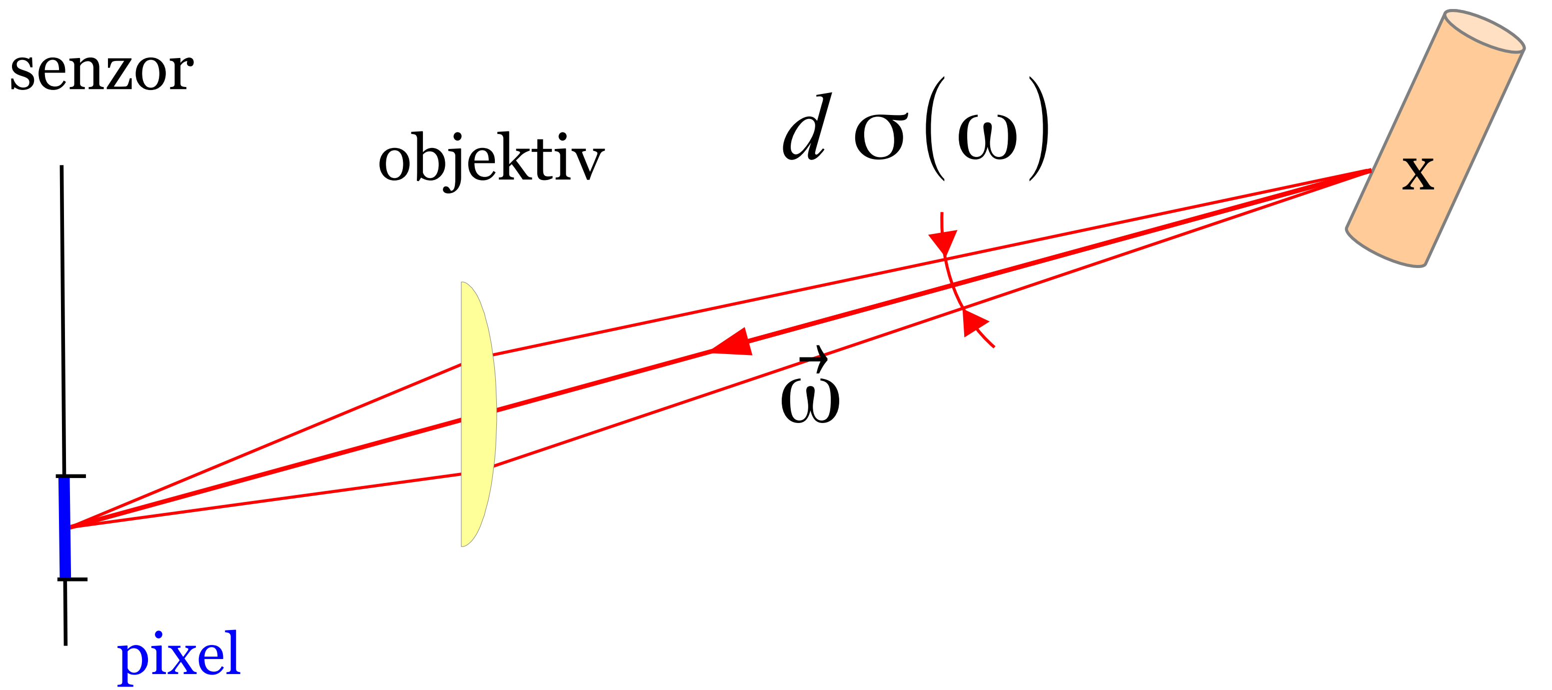
$$d\omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

[ω] .. steradián (sr)

celá sféra má **4π sr**

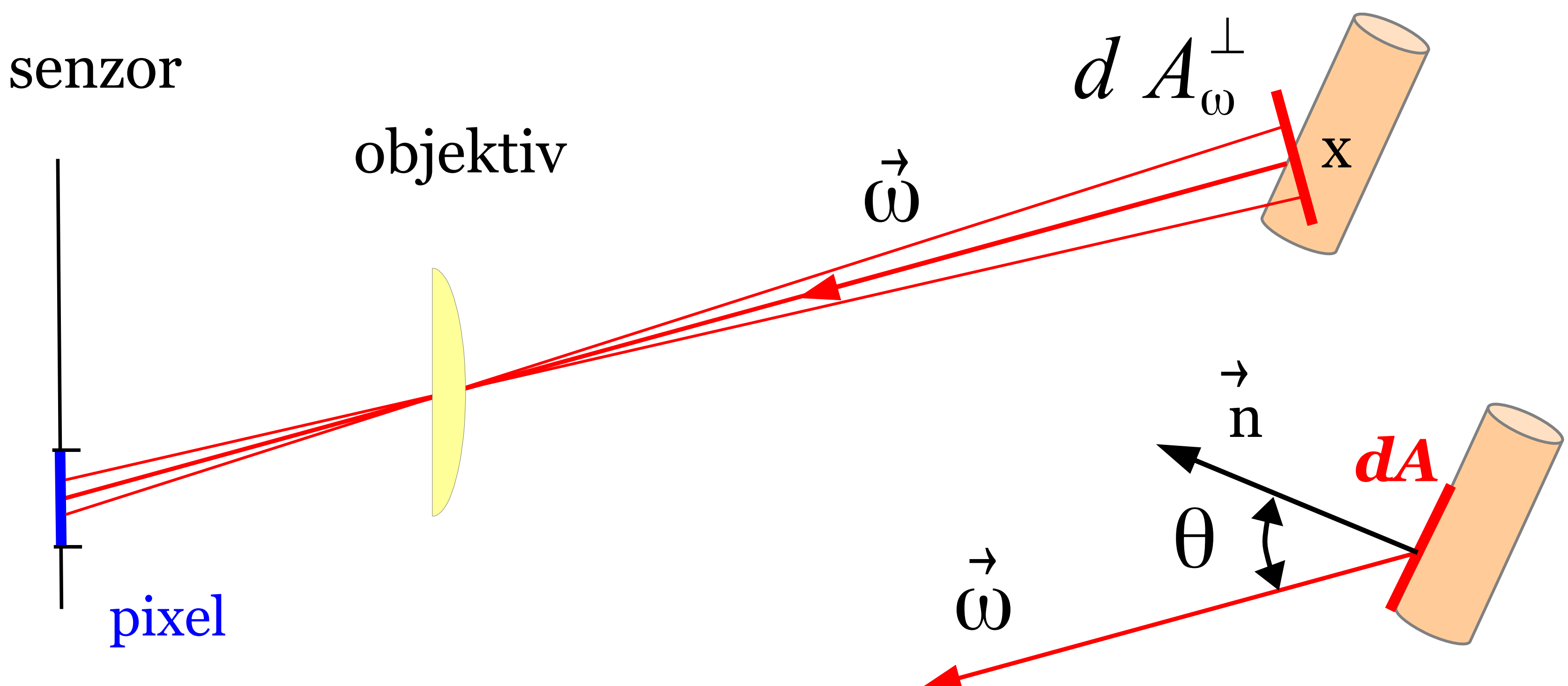
Radiance II

$$\Phi(x,\omega) \propto d\sigma(\omega)$$



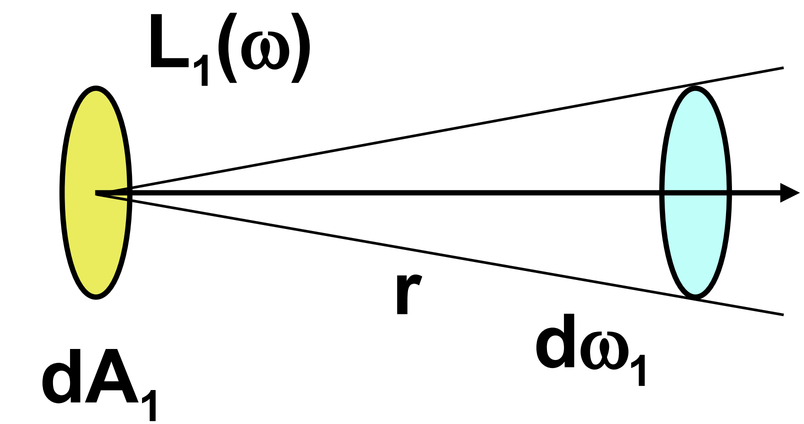
Radiance III

$$\Phi(x,\omega) \propto dA_\omega^\perp(x)$$



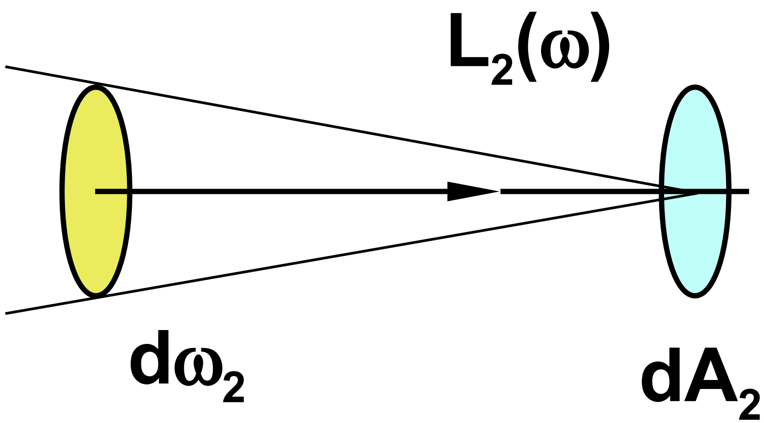
$$dA_\omega^\perp = dA \cdot \cos\theta$$

Zákon zachování energie v paprsku

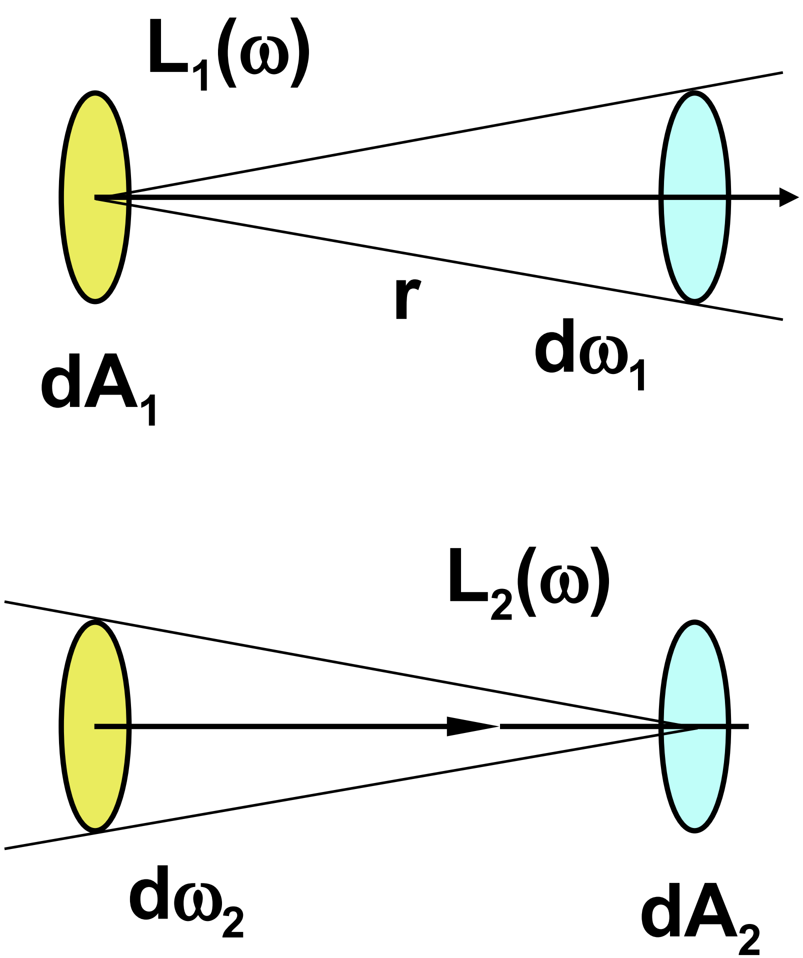


$$L_1 \, d\omega_1 \, dA_1 = L_2 \, d\omega_2 \, dA_2$$

emitovaný výkon	přijímaný výkon



Zákon zachování energie v paprsku



$$L_1 \, d\omega_1 \, dA_1 = L_2 \, d\omega_2 \, dA_2$$

$$T = d\omega_1 \, dA_1 = d\omega_2 \, dA_2 = \frac{dA_1 \, dA_2}{r^2}$$

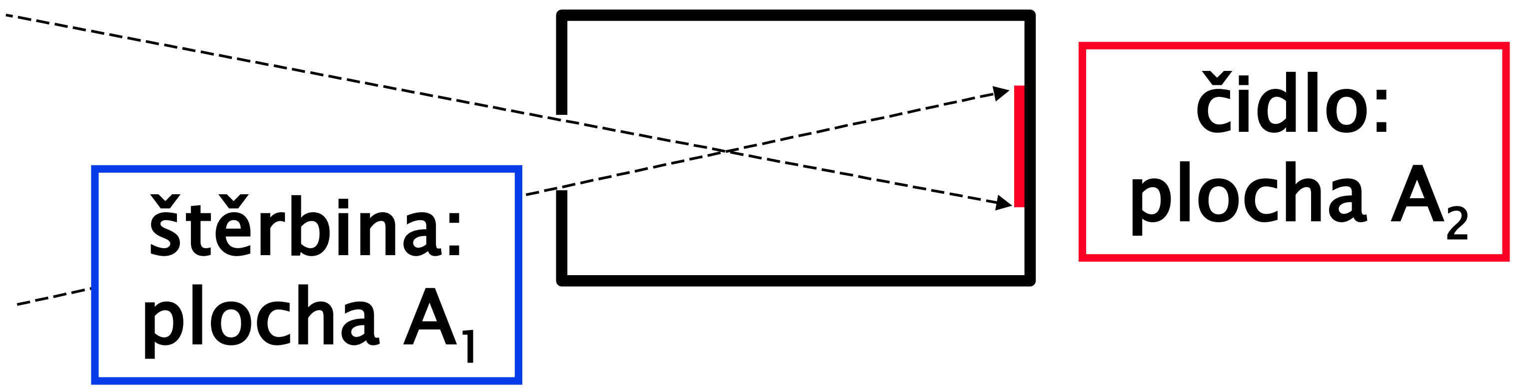
kapacita paprsku

$$\boxed{L_1 = L_2}$$

paprsek ... radiance L

Měření světla

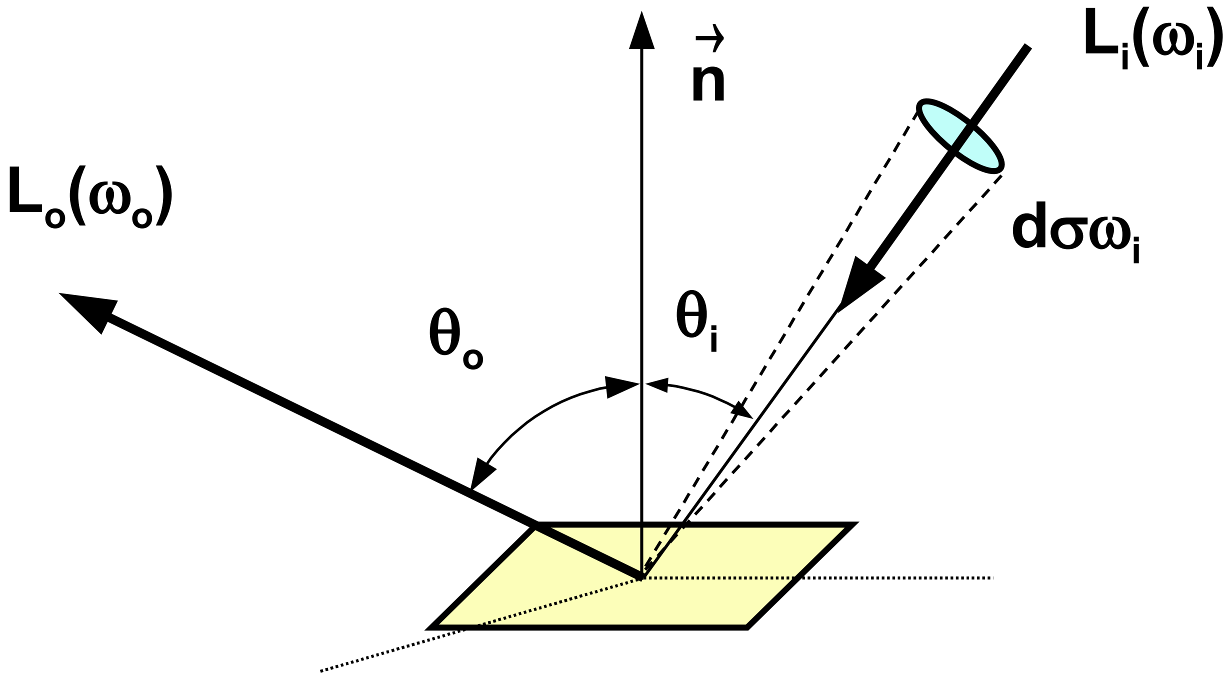
- **naměřená veličina** je přímo úměrná **radianci** viditelné části scény



$$\underline{R} = \int_{A_2} \int_{\Omega} L_{in}(A, \omega) \cdot \cos\theta \, d\omega \, dA = \underline{L_{in} \cdot T}$$

BSDF (lokální přenosová funkce)

(„Bidirectional Scattering Distribution Function“, postaru BRDF)



$$f_s(\omega_i \rightarrow \omega_o) = \frac{d\,L_o(\omega_o)}{d\,E(\omega_i)} = \frac{d\,L_o(\omega_o)}{L_i(\omega_i)\,\cos\theta_i\,d\,\sigma^{\perp}(\omega_i)}$$

Helmholtzův recipročnízákon, ..

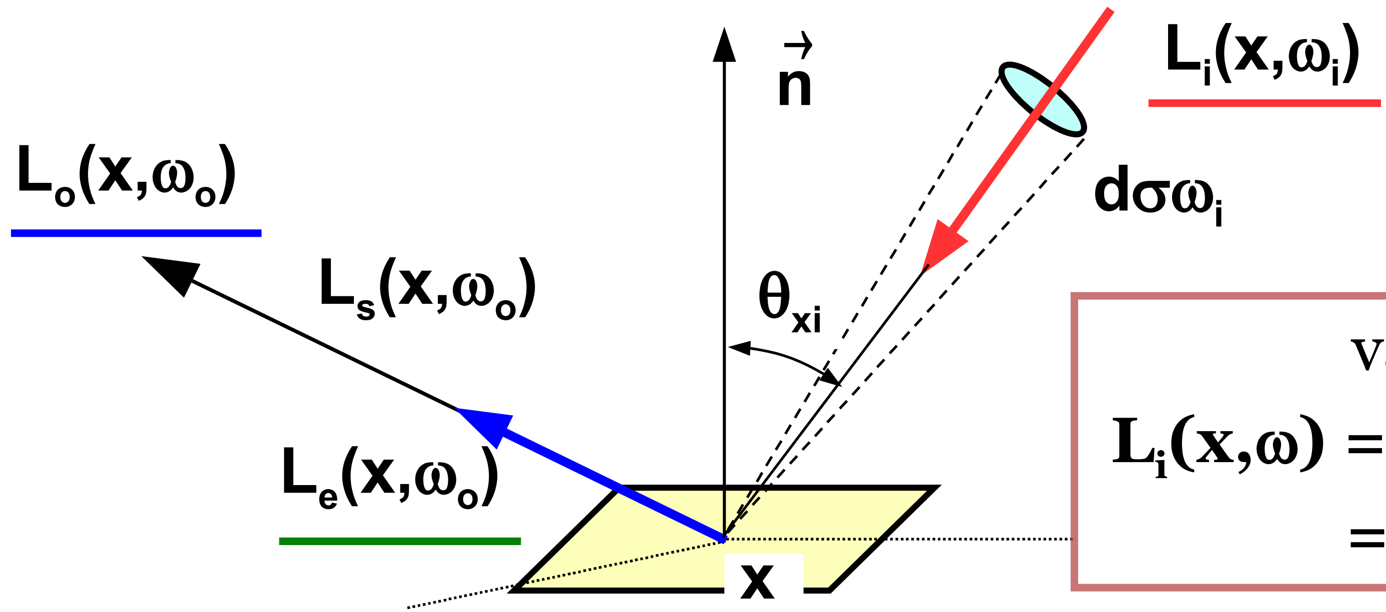
- pro **reálné** povrchy těles (vyhovující fyzikálním zákonům) platí:

$$f(\omega_{in} \rightarrow \omega_{out}) = f(\omega_{out} \rightarrow \omega_{in})$$

- obecná **BRDF** nemusí být **isotropní** (invariantní k otočení kolem normály)
  – kovové povrchy leštěné v jednom směru, ..

$$f(\theta_{in}, \phi_{in}, \theta_{out}, \phi_{out}) \neq f(\theta_{in}, \phi_{in} + \phi, \theta_{out}, \phi_{out} + \phi)$$

Lokální zobrazovací rovnice



paprsek

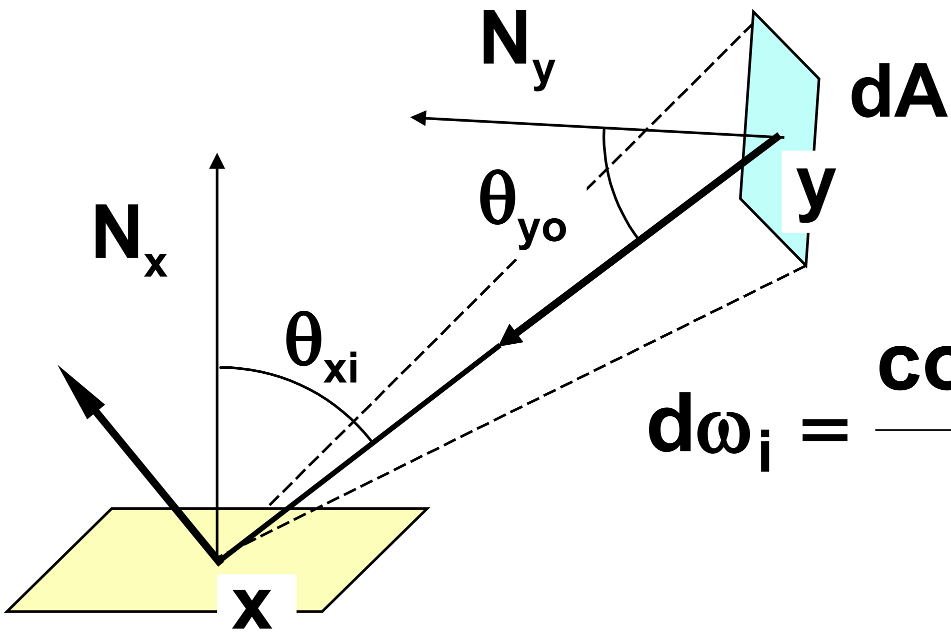
vakuum:

$$\mathbf{L_i(x,\omega) = L_o(x_M(x,\omega),-\omega) = L_o(y,-\omega)}$$

vlastní vyzařování x

$$\underline{L_o(x,\omega_o)} = \underline{L_e(x,\omega_o)} + \int \underline{L_o(y,-\omega_i)} \cdot f_s(x,\omega_i \to \omega_o) \cdot d\sigma_x^{\perp}(\omega_i)$$

Radiance přijímaná z plochy



$$d\omega_i = \frac{\cos\theta_{yo}\, dA}{\left\| x - y \right\|^2}$$

Geometrický člen: $$G(y, x) = \frac{\cos\theta_{yo}\cos\theta_{xi}}{\left\| x - y \right\|^2}$$

Radiance přijímaná z plochy

$$L_o(x,\omega_o) =$$

integrál přes všechny dopadající směry

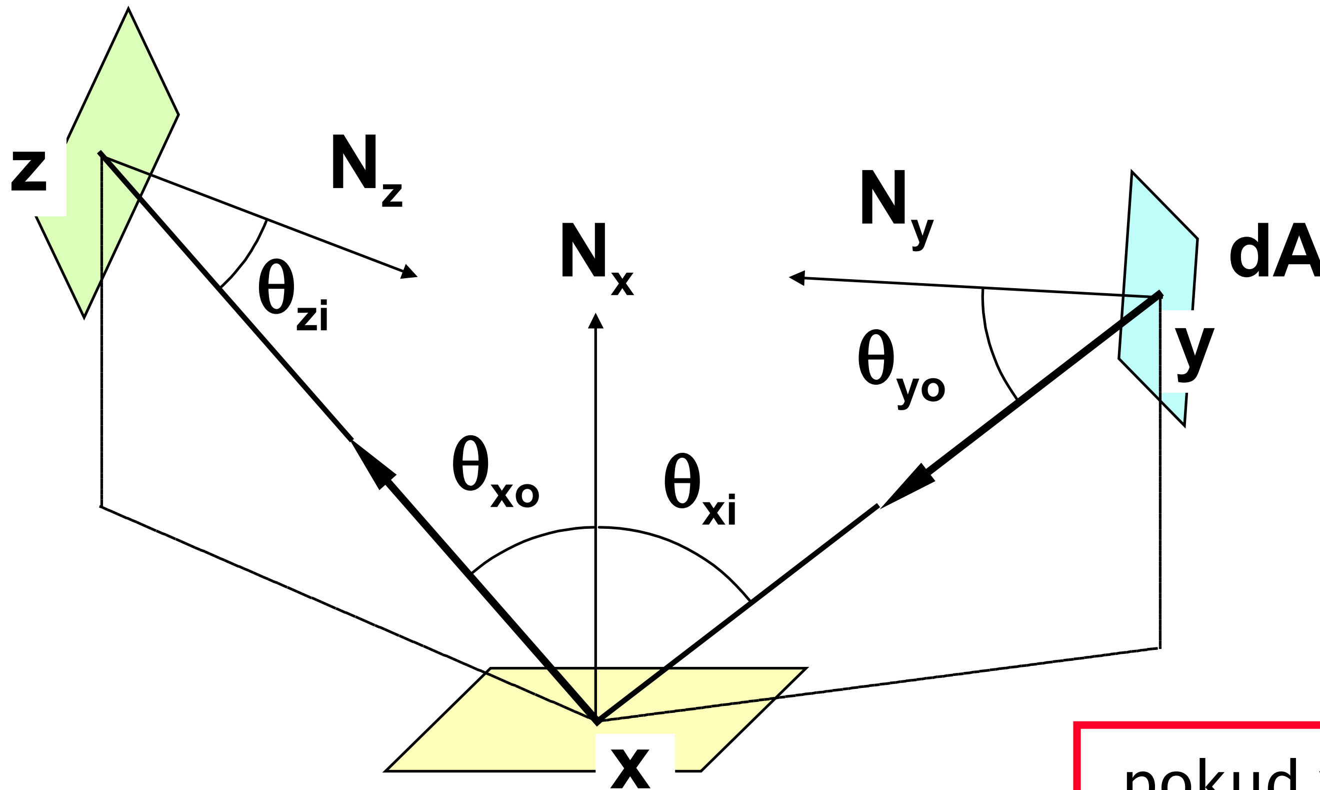
$$= L_e(x,\omega_o) + \int_{\boxed{\Omega}} f(x,\omega_i \to \omega_o) \cdot L_i(x,\omega_i) \cdot \cos\theta_{xi}\, \underline{d\omega_i} =$$

$$= L_e(x,\omega_o) + \int_{\boxed{S}} f(x,\omega_i \to \omega_o) \cdot L_o(y,-\omega_i) \cdot G(y,x)\, \underline{dA}$$

integrál přes vyzařující plošku

(za předpokladu, že z bodu **x** je vidět celá plocha **S**)

Šíření světla odrazem



pokud y vidí x

Označení: $\underline{L(y,x)} = L_o(y, x-y) = L_i(x, y-x)$

$\underline{f(y,x,z)} = f(x,(y-x) \to (z-x))$

Rovnice pro nepřímou radianci

$$V(y,x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud y vidí x} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\underline{L(x,z)} = \underbrace{L_e(x,z)}_{\text{vlastní (emitovaná) radiance}} + \int_S \underbrace{f(y,x,z)}_{\text{BRDF}} \cdot L(y,x) \cdot \underbrace{G(y,x) \cdot V(y,x)}_{\text{geometrické členy}} \, dA$$

Rovnice pro radiositu

- předpokládáme **ideálně difusní** povrch:
  - **BRDF** není závislá na vstupním a výstupním úhlu
  - výstupní radiance $\mathbf{L(y,\omega)}$ nezávisí na směru $\boldsymbol{\omega}$

$$L(x,z) = L_e(x,z) + f(x) \cdot \int_S L(y,x) \cdot G(y,x) \cdot V(y,x) \, dA$$

$$L(x,z) = B(x)/\pi, \quad L_e(x,z) = E(x)/\pi, \quad f(x) = \rho(x)/\pi$$

$$\boxed{B(x) = E(x) + \rho(x) \cdot \int_S B(y) \cdot \frac{G(y,x) \cdot V(y,x)}{\pi} \, dA}$$

Diskrétní řešení radiační rovnice

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}) \cdot \int_{\mathbf{S}} \mathbf{B}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{x})\ \mathbf{dA}}$$

kde $$\mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{G}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{y},\mathbf{x})}{\pi}$$

- řešení **B** je nekonečně-dimenzionální
- diskretizace problému:
  - **Monte-Carlo** ray-tracing (řešení závislé na pohledu)
  - klasické **radiační metody** (konečné/hraniční prvky)

Obecná radiační metoda

❶ rozdělení ploch na konečný počet **elementů**

❷ určení polohy **uzlových bodů** na elementech
– v těchto bodech se bude počítat hodnota **radiosity**

❸ volba **aproximační metody** a chybové metriky
– systém basických funkcí pro lineární (konvexní) kombinace hodnot v uzlových bodech

❹ výpočet **koeficientů** soustavy lineárních rovnic
– “konfigurační faktory” (“form-factors”)

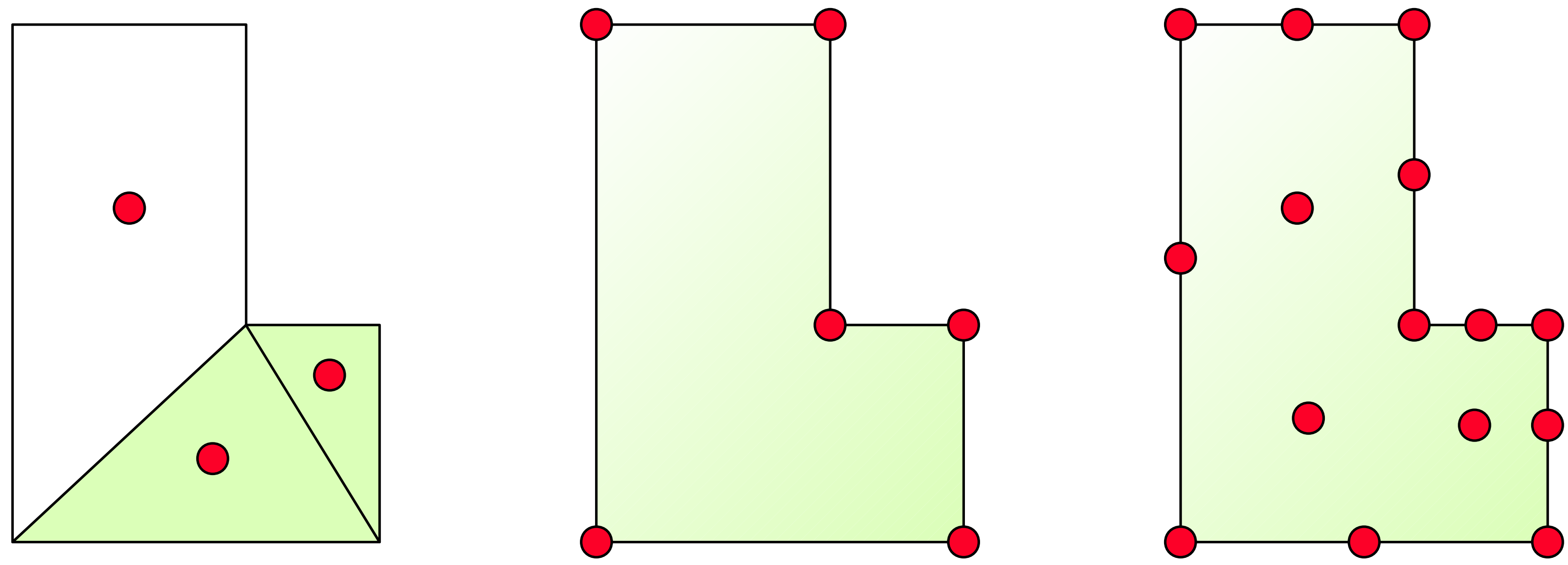
Obecná radiační metoda

- ❺ řešení **soustavy lineárních rovnic**
  - – výsledek: radiosita v uzlových bodech
- ❻ rekonstrukce přibližného řešení na **celých plochách**
  - – lineární kombinace bazických funkcí pomocí hodnot v uzlových bodech
- ❼ **zobrazení** výsledku (libovolný směr pohledu)
  - – intenzita osvětlení závisí na spočítané radiositě

Poznámky

- krok ❸ se provádí ve fázi **návrhu algoritmu**
  - v implementaci se přímo neobjevuje
- některé **zdokonalené metody** nepostupují striktně posloupností kroků ❶ až ❼
  - často se výpočet v některých fázích vrací a opakují se předcházející kroky (s lepší aproximací, lepším rozlišením, ..)

Aproximace radiosity



konstantní
(uzly jsou
těžiště ploch)

bilineární
(uzly jsou
ve vrcholech)

kvadratická
(další uzly jsou
uprostřed hran
a stěn)

Metoda konstantních elementů

- **na elementu $\mathbf{A_i}$** předpokládám **konstantní** odrazivost $\boldsymbol{\rho}$ a radiositu **B** - průměr hodnot **B(x)**:
  - značení: ρ_i, B_i pro $\mathbf{i = 1 .. N}$

průměr přes plochu A_i

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \cdot \int_S B(y) \cdot g(y,x)\, dA$$

$$B_i = E_i + \rho_i \cdot \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{N} B_j \int_{A_j} g(y,x)\, dA_j \right]}_{\text{radiosita přijímaná v bodě } x} dA_i$$

radiosita přijímaná v bodě **x** (ležícím na A_i)

Základní rovnice pro radiositu

přehození sumy a integrálu:

$$B_i = E_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} B_j \cdot \boxed{\frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} g(y, x)\ dA_j\ dA_i}$$

geometrický člen – **konfigurační faktor F_{ij}**
(část energie vyzářené ploškou A_i dopadající na A_j)

$$\boxed{B_i = E_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} B_j\, F_{ij} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]}$$

Fyzikálně intuitivní odvození

$$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} B_j A_j F_{ji} \quad [\mathrm{W}]$$

emitovaný výkon = vlastní výkon + odražený výkon

reciproční pravidlo: $\boxed{A_j F_{ji} = A_i F_{ij}}$

$$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} B_j F_{ij} A_i \quad \Big| \cdot A_i^{-1}$$

$$B_i = E_i + \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} B_j F_{ij} \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

Soustava lineárních rovnic

$$\underline{B_i} - \rho_i \cdot \sum_{j=1}^{N} \underline{B_j}\, F_{ij} = E_i \qquad i = 1..N$$

$$\begin{bmatrix} 1-\rho_1 F_{1,1} & -\rho_1 F_{1,2} & .. & -\rho_1 F_{1,N} \\ -\rho_2 F_{2,1} & 1-\rho_2 F_{2,2} & .. & -\rho_2 F_{2,N} \\ .. & .. & .. & .. \\ -\rho_N F_{N,1} & -\rho_N F_{N,2} & .. & 1-\rho_N F_{N,N} \end{bmatrix} \underline{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ .. \\ B_N \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ .. \\ E_N \end{bmatrix}$$

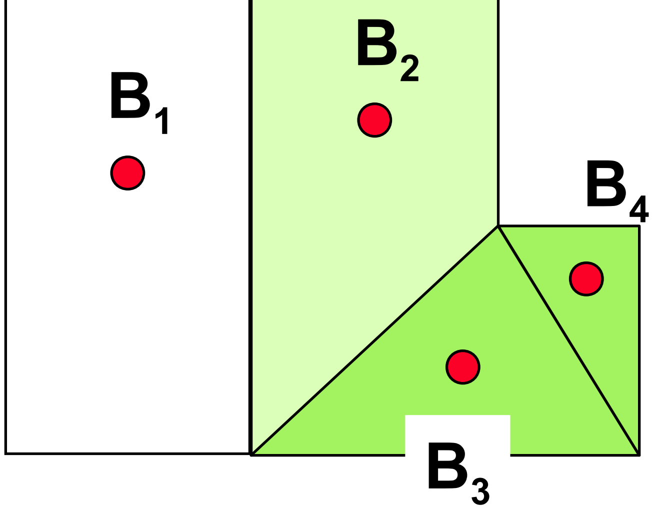
<u>vektor neznámých $[B_i]$</u>

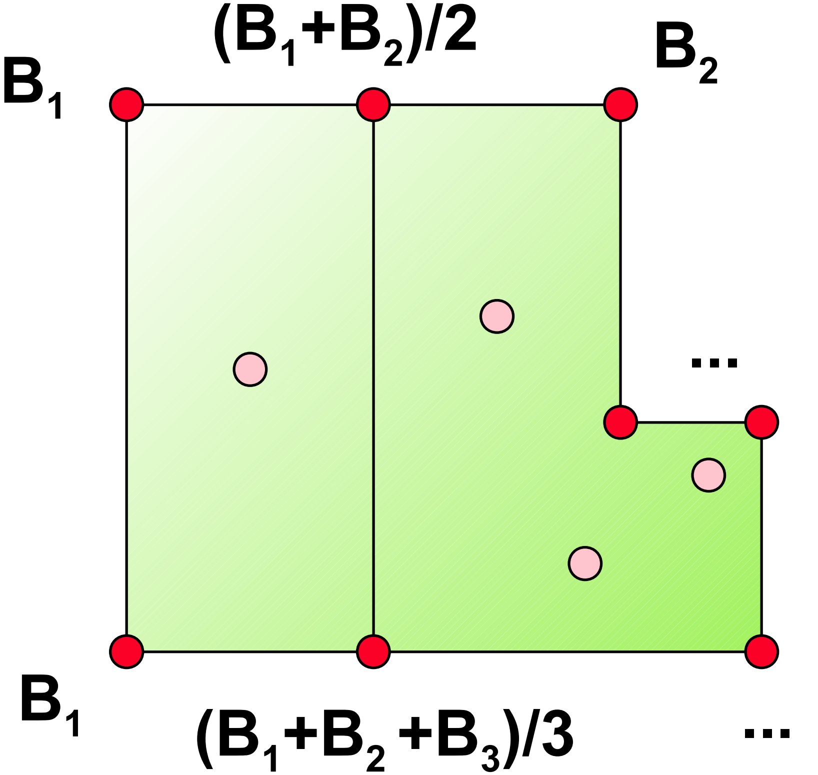
Soustava lineárních rovnic

- pro **rovinné plošky** platí: $\mathbf{F_{ii} = 0}$
  - na diagonále jsou pouze jedničky
- **nediagonální prvky** matice mají typicky malou absolutní hodnotu
  - matice je "diagonálně dominantní"
  - $\Rightarrow$ soustava je stabilní a lze ji úspěšně řešit **iteračními metodami** (Jacobi, Gauss-Seidel)
- při **změně osvětlení** $\mathbf{[E_i]}$ se nemusí soustava počítat znovu (používáme-li přímou metodu)

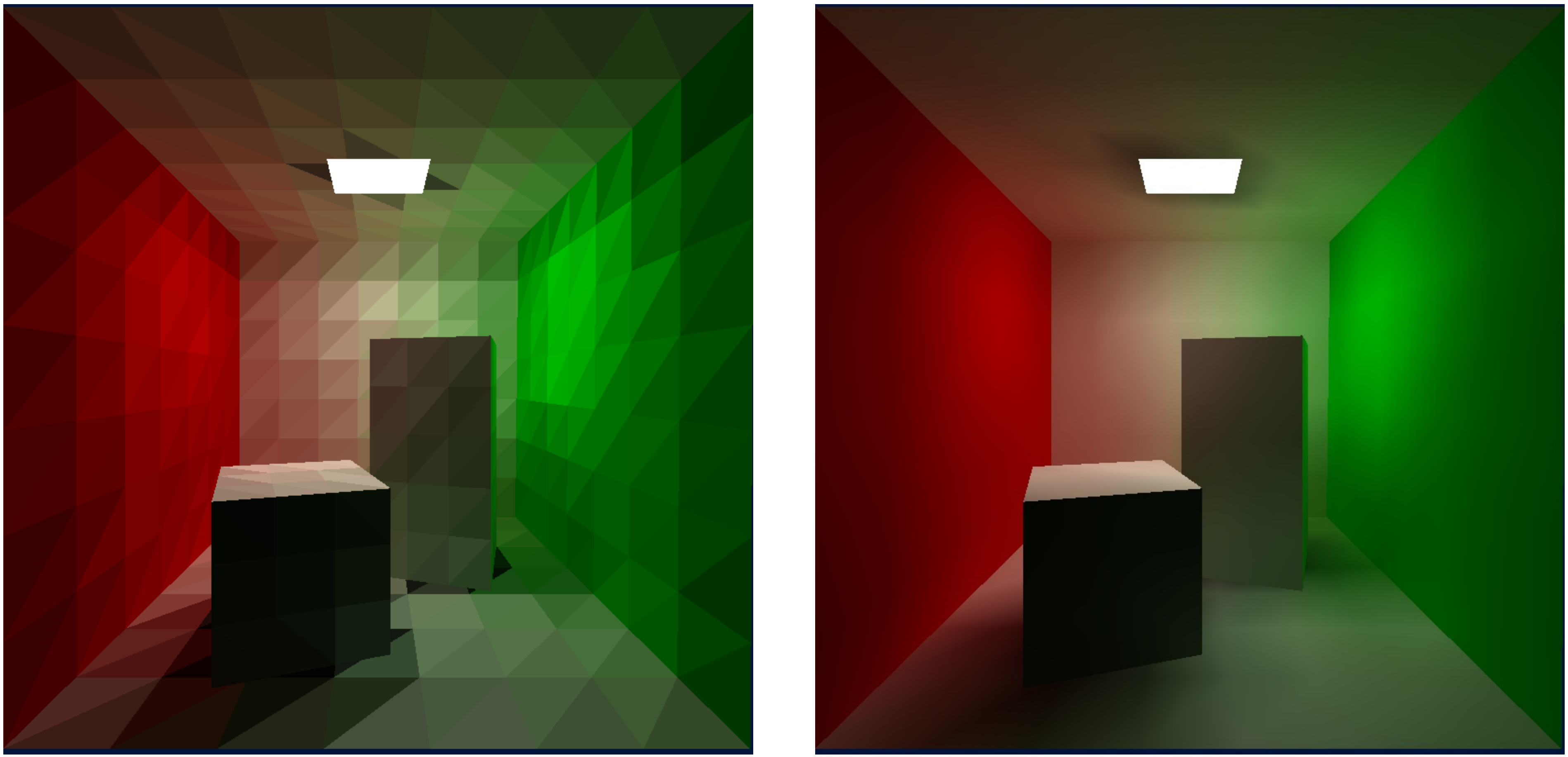
Přenos radiosity do vrcholů

I v metodě konstantních elementů je při zobrazování žádoucí použít alespoň **Gouraudovu interpolaci barvy**





Ukázka lineární interpolace



Konec

- **C. M. Goral, K. E. Torrance, D. P. Greenberg, B. Battaile**: *Modeling the Interaction of Light Between Diffuse Surfaces*, CG vol 18(3), SIGGRAPH 1984
- **A. Glassner**: *Principles of Digital Image Synthesis*, Morgan Kaufmann, 1995, 871-937
- **M. Cohen, J. Wallace**: *Radiosity and Realistic Image Synthesis*, Academic Press, 1993, 13-64
- **J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes**: *Computer Graphics, Principles and Practice*, 793-804