

Monte–Carlo zobrazování

© 1996-2016 Josef Pelikán
CGG MFF UK Praha

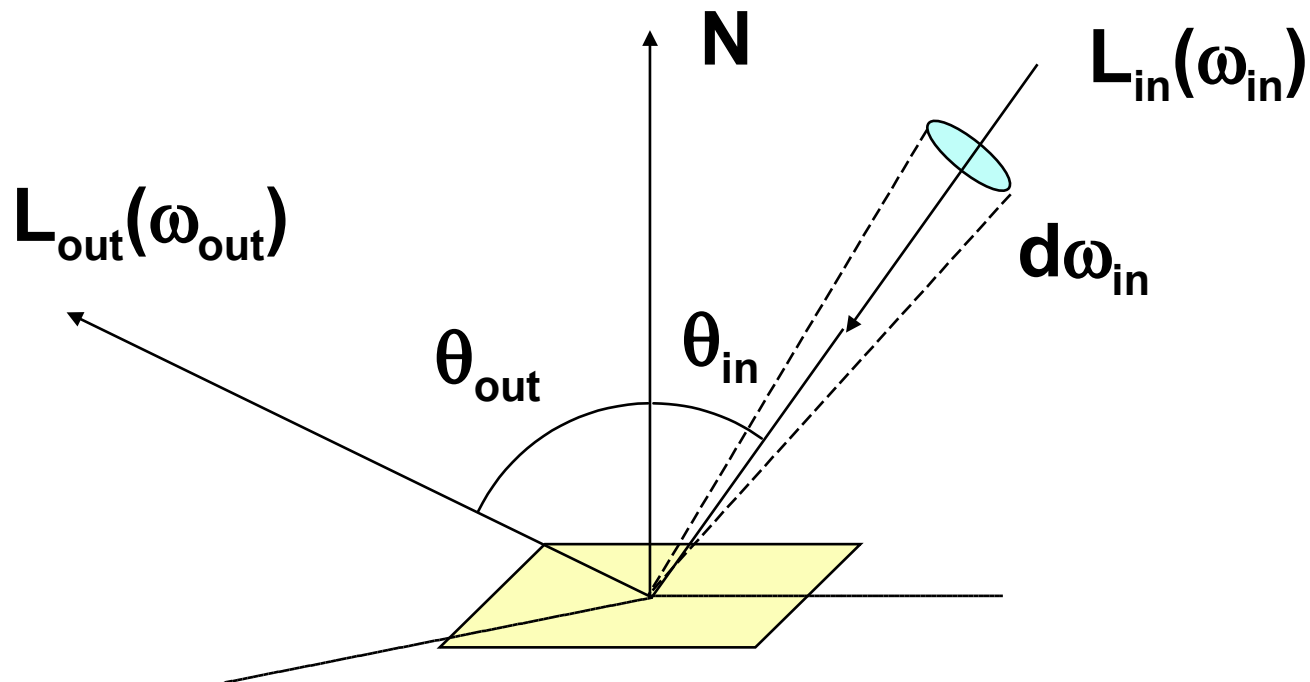
pepca@cgg.mff.cuni.cz

<http://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/>



BRDF (funkce odrazivosti)

“Bidirectional Reflectance Distribution Function”

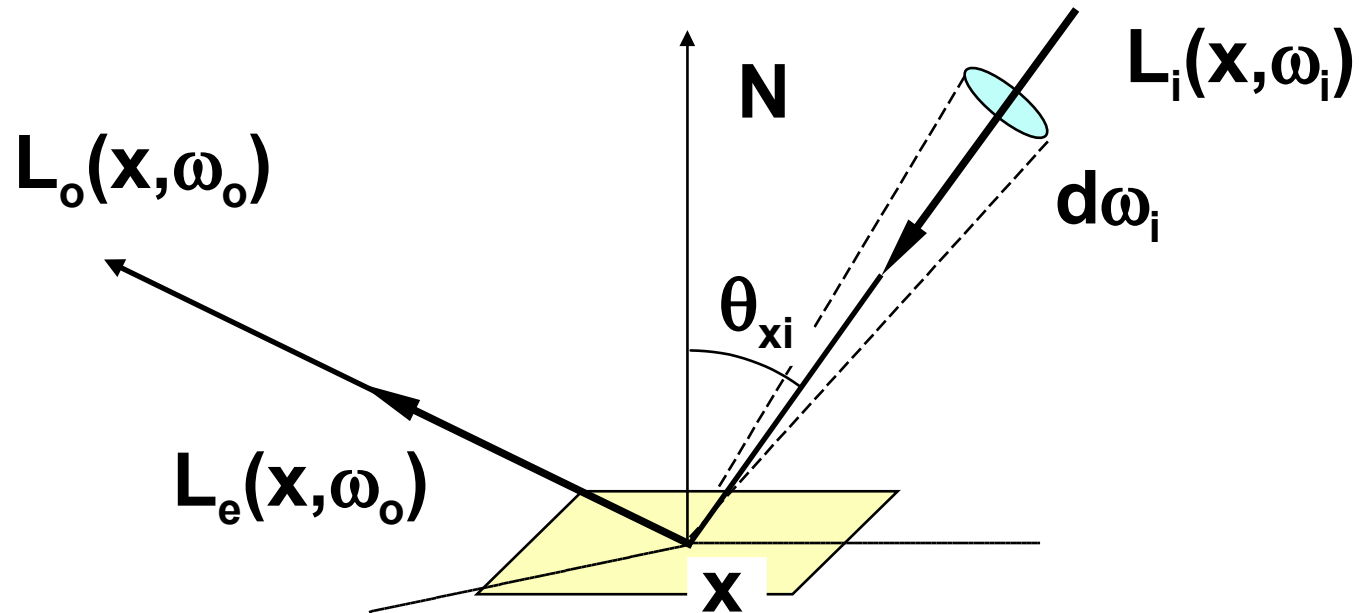


$$f(\omega_{in} \rightarrow \omega_{out}) = \frac{L_{out}(\omega_{out})}{L_{in}(\omega_{in}) \cdot \cos \theta_{in} \cdot d\omega_{in}} \quad [sr^{-1}]$$



Lokální rovnice (OVTIGRE)

“Outgoing, Vacuum, Time-Invariant, Gray Radiance Equation”



vlastní vyzařování

$$\mathbf{L}_o(\mathbf{x}, \omega_o) = \mathbf{L}_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \mathbf{L}_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot \cos \theta_{xi} d\omega_i$$



Operátory šíření světla

Zobrazovací rovnice pro **radianci** (operátory):

$$\mathbf{L} = \mathbf{e} + \mathbf{T}\mathbf{L}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{e} + \mathbf{T}\mathbf{e} + \mathbf{T}^2\mathbf{e} + \mathbf{T}^3\mathbf{e} + \dots$$

Integrální **operátor** **T** lze rozložit na difusní (**D**) a lesklou (**S**) složku odrazu:

$$\mathbf{T} = \mathbf{D} + \mathbf{S}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{e} + (\mathbf{D} + \mathbf{S})\mathbf{e} + (\mathbf{D} + \mathbf{S})^2\mathbf{e} + \dots$$

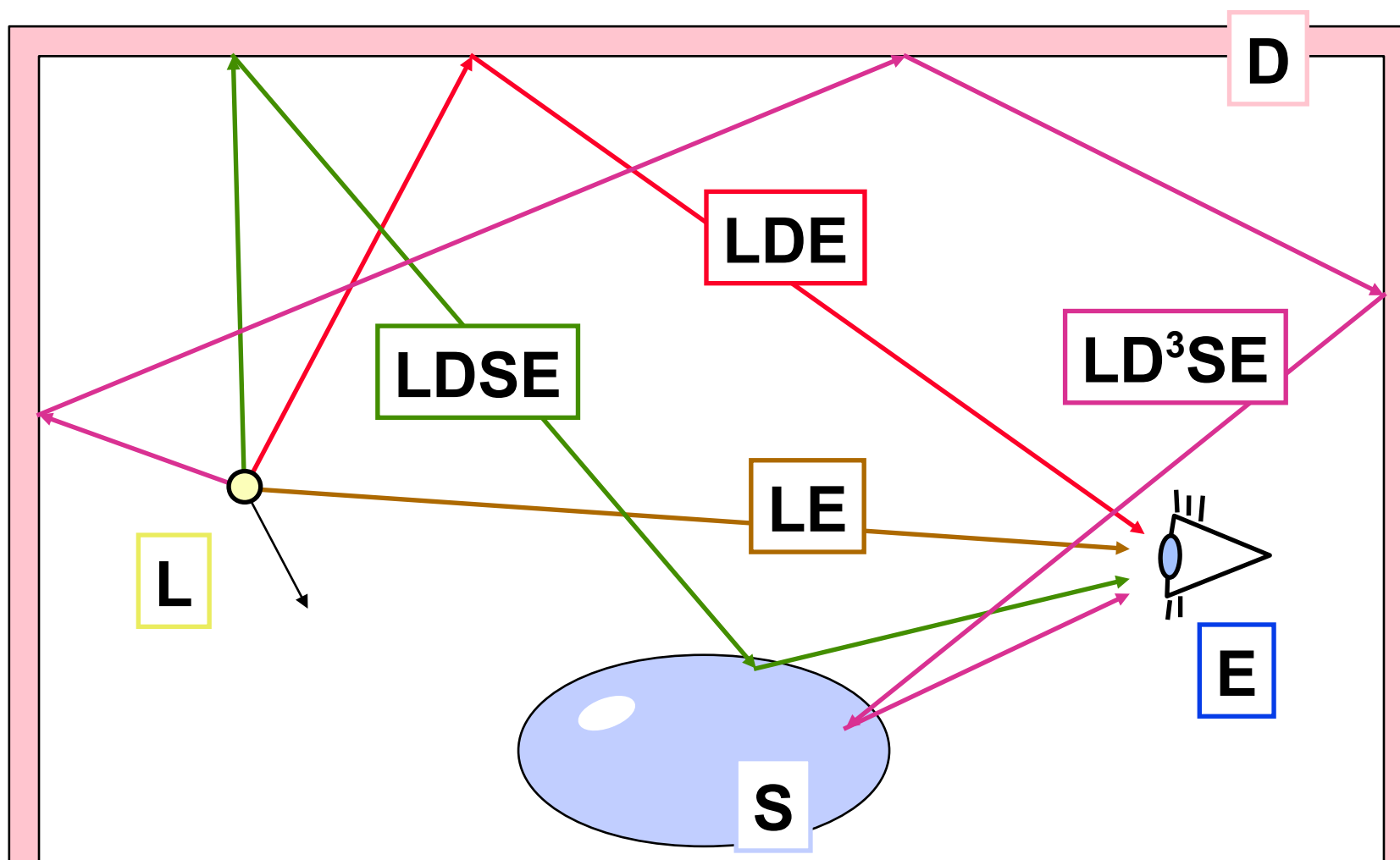
$$\mathbf{L} = \mathbf{e} + \mathbf{D}\mathbf{e} + \mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{e} + \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{e} + \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{e} + \mathbf{S}\mathbf{S}\mathbf{e} + \dots$$



Abeceda regulárních výrazů

- ◆ **zdroj světla L** (“light”)
- ◆ **difusní odraz D** (“diffuse”)
 - odraz podle Lambertova zákona (všesměrový)
- ◆ **lesklý odraz S** (“specular”)
 - směrový odraz, odlesk - směrová část BRDF
 - idealizovaný **zrcadlový odraz: S_M**
- ◆ **oko pozorovatele E** (“eye”)
 - příspěvek výslednému obrazu

Cesty šíření světla





Klasické zobrazovací metody

- ➔ **stínování s odlesky a vrženými stíny** (např. Phongův model): $L(D|S)E$
 - často se ignoruje výpočet vržených stínů
- ➔ **rekurzivní sledování paprsku** (Whitted): $L[D|S]S_M^*E$
 - první lesklý odraz se počítá přesně, ostatní se nahrazují ideálním zrcadlovým odrazem

Klasické zobrazovací metody



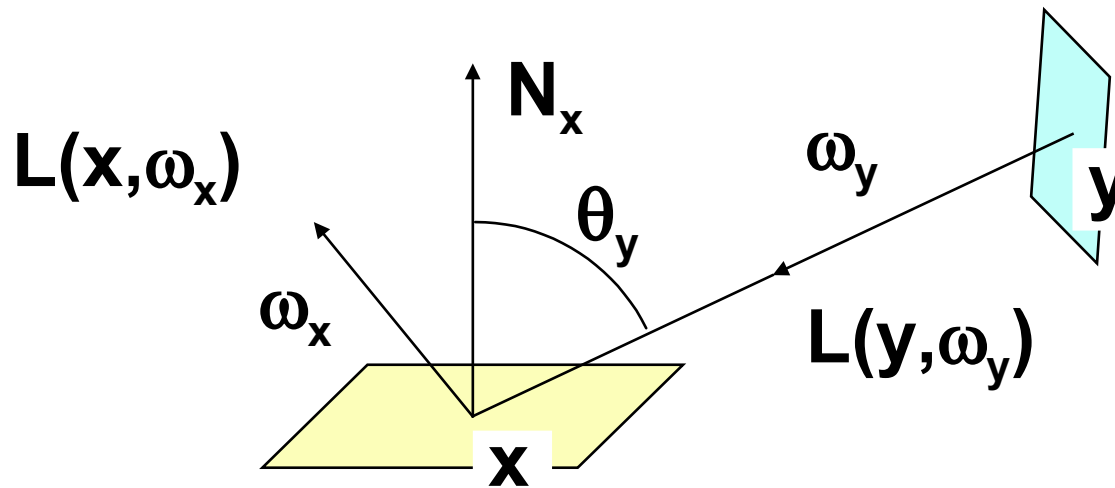
- **distribuované sledování paprsku (Cook): $L[D]S^*E$**
 - všechny lesklé odrazy se odhadují korektně
- obyčejná **radiální metoda: LD^*E**
 - pouze měkké odrazy světla
- ◆ **všechny možné cesty světla: $L(D|S)^*E$**
 - přesné řešení zobrazovacích rovnic (Kajiya)



Monte Carlo zobrazování

- ♦ integrál zobrazovací rovnice je často **mnoho-rozměrný**
 - anti-aliasing, hloubka ostrosti, rozmazání pohybem
 - Monte Carlo metody nejsou citlivé na více dimenzí
- ♦ integrandy mají mnoho **nespojností** různých druhů
- ♦ **nepožaduje se velká přesnost**
 - lidské vidění má omezenou absolutní citlivost
 - běžně postačí přesnost 0.1 - 1 %

Zobrazovací rovnice pro radianci



$$L(\mathbf{x}, \omega_x) =$$

$$= L_e(\mathbf{x}, \omega_x) + \int_{\Omega_x^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_y \rightarrow \omega_x) \cdot L(\mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y$$

$$\Phi_o(\mathbf{S}) = \int_A \int_{\Omega_x} L(\mathbf{x}, \omega_x) \cdot W_e(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{S}) \cdot \cos \theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$



Path tracing

Výkon procházející pixelem (anti-alias, hloubka ostrosti):

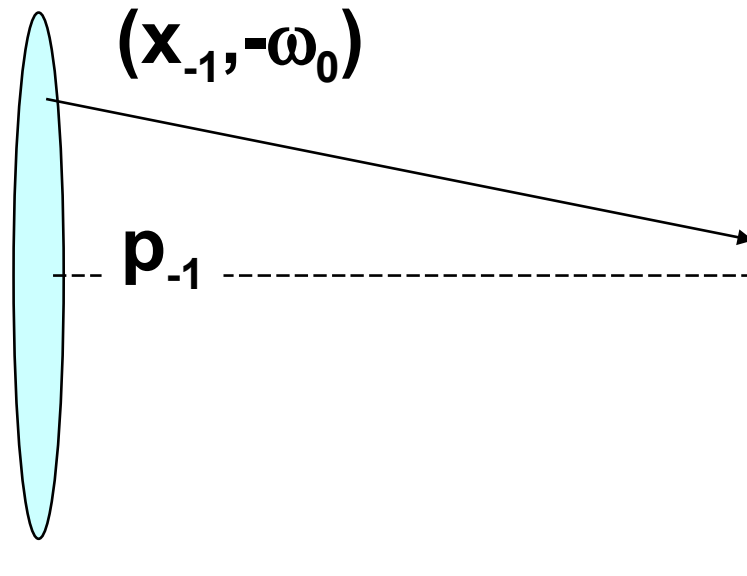
$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{path}} = \frac{\mathbf{W}_e(\mathbf{x}_0, \omega_0, \mathbf{S}) \cdot \cos \psi}{\mathbf{p}_0(\mathbf{x}_0, \omega_0)} \cdot \langle \mathbf{L}(\mathbf{x}_0, \omega_0) \rangle_{\text{path}}$$

(\mathbf{x}_0, ω_0) se týká bodu na povrchu tělesa, do kterého dopadne sledovaný paprsek; \mathbf{p}_0 je příslušná hustota pravděpodobnosti. Vzorkování na čočce objektivu \mathbf{p}_{-1} :

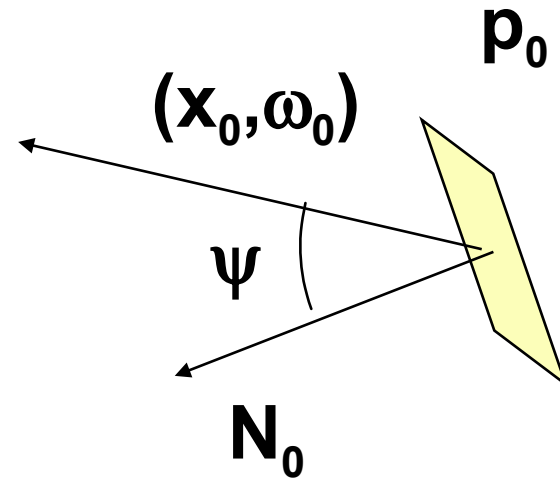
$$\mathbf{p}_0(\mathbf{x}_0, \omega_0) = \frac{\mathbf{p}_{-1}(\mathbf{x}_{-1}, \omega_0) \cdot \cos \psi}{\|\mathbf{x}_{-1} - \mathbf{x}_0\|^2}$$



Primární paprsek



**hloubka ostrosti,
anti-aliasing**



**světlo vycházející
z bodu \mathbf{x}_0 směrem ω_0**



Path tracing

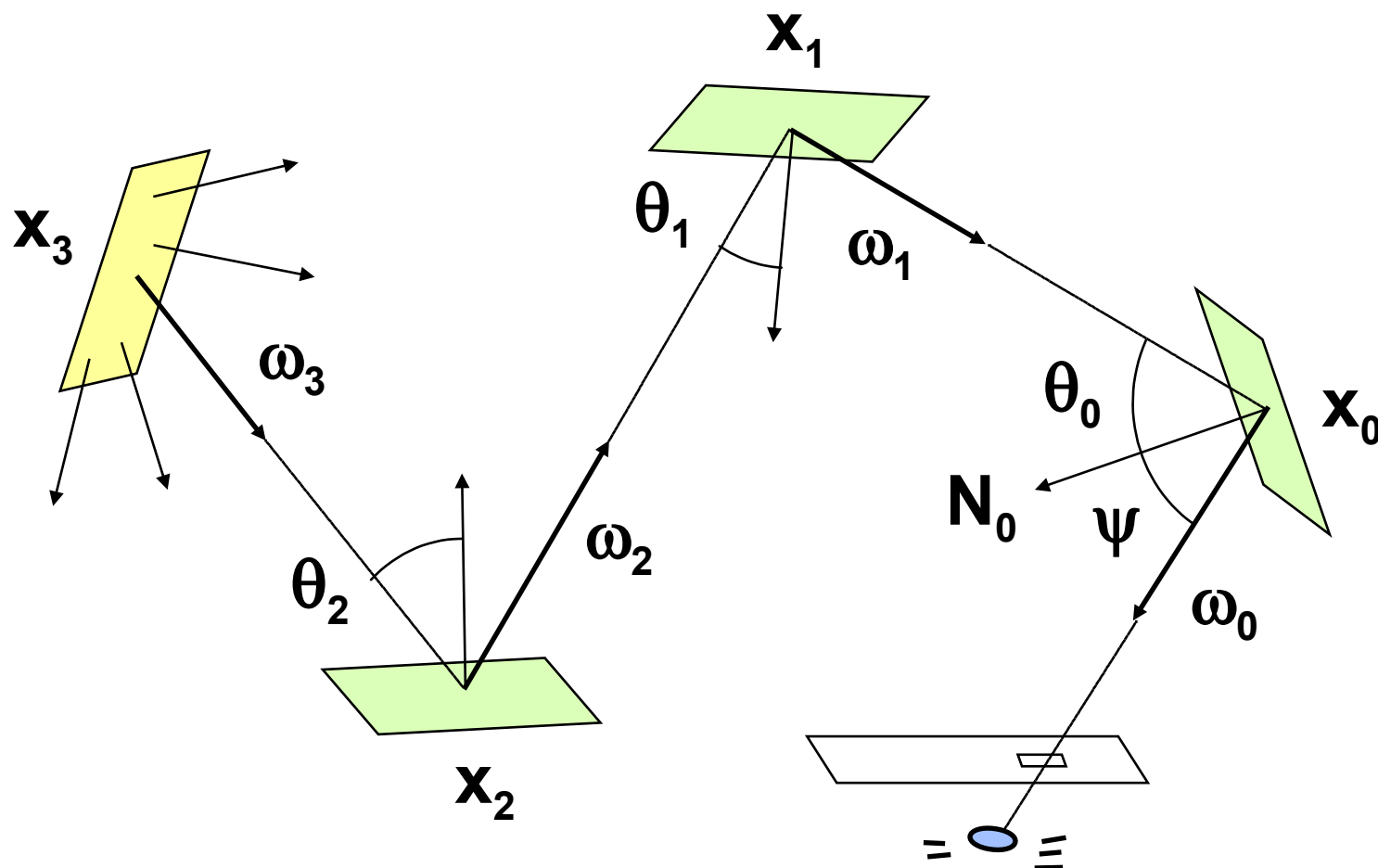
Odhad $L(\mathbf{x}_0, \omega_0)$ metodou Monte Carlo omezený pomocí ruské rulety:

$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{path}} = \frac{W_e(\mathbf{x}_0, \omega_0, \mathbf{S}) \cdot \cos \psi}{p_0(\mathbf{x}_0, \omega_0)} \cdot \sum_{i=0}^k \left[\prod_{j=1}^i \frac{f(\mathbf{x}_{j-1}, \omega_j \rightarrow \omega_{j-1}) \cdot \cos \theta_{j-1}}{P_j \cdot p_j(\omega_j)} \right] \cdot L_e(\mathbf{x}_i, \omega_i)$$

pravděpodobnost pokračování krokem j

hustota pravděpodobnosti pro vstupní směr ω_j

Schema šíření světla





Vzorkování podle důležitosti

Pro výkon procházející pixelem (druhý integrál):

$$\underline{p_0(\mathbf{x}_0, \omega_0)} = \frac{W_e(\mathbf{x}_0, \omega_0, \mathbf{S}) \cdot \cos \psi}{W(\mathbf{S})}, \text{ kde}$$

$$W(\mathbf{S}) = \int_A \int_{\Omega_x} W_e(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{S}) \cdot \cos \theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$

V zobrazovací rovnici (první integrál) známe člen $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_y \rightarrow \omega_x) \cos \theta_y$; protože je podle fyzikálních podmínek menší než **1**, můžeme ho použít ke konstrukci subkritické hustoty pravděpodobnosti.



Vzorkování podle BRDF

Pravděpodobnost pokračování krokem j :

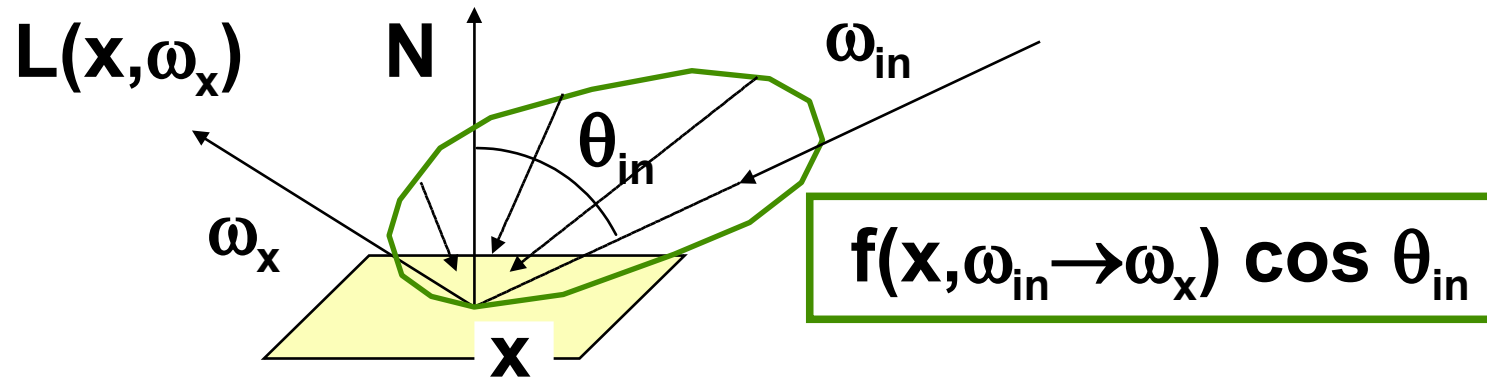
$$\underline{P_j} = \int_{\Omega^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{j-1}, \omega_{in} \rightarrow \omega_{j-1}) \cdot \cos \theta_{in} \, d\omega_{in}$$

Hustota pravděpodobnosti pro **směr pokračování** ω_j :

$$\underline{p_j(\omega_j)} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{j-1}, \omega_j \rightarrow \omega_{j-1}) \cdot \cos \theta_{j-1}}{P_j}$$



Vzorkování podle BRDF



Celkový primární odhad s využitím všech uvedených pravděpodobností:

$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{path,imp}} = \mathbf{W}(\mathbf{S}) \cdot \sum_{i=0}^k L_e(\mathbf{x}_i, \omega_i)$$



Odhad příští události (NEE)

Rozdělení nepřímého osvětlení na dvě složky:

$$L(\mathbf{x}, \omega_x) = L_e(\mathbf{x}, \omega_x) + L_r(\mathbf{x}, \omega_x)$$

$$\underline{L_r(\mathbf{x}, \omega_x)} = \int_{\Omega_x^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_y \rightarrow \omega_x) \cdot L(\mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y =$$

$$\begin{aligned} &= \int_A \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_y \rightarrow \omega_x) \cdot L_e(\mathbf{y}, \omega_y) \cdot G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \, dA_y + \\ &+ \int_{\Omega_x^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_y \rightarrow \omega_x) \cdot L_r(\mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y \end{aligned}$$



Příspěvek přímého osvětlení

Geometrický člen $\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$:

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \frac{\cos \theta_{\mathbf{y}, \text{out}} \cdot \cos \theta_{\mathbf{x}, \text{in}}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}$$

faktor viditelnosti

Příspěvek **přímého osvětlení** je vyjádřen prvním integrálem (integruje se přes všechny plošné zdroje ve scéně).

Hustota pravděpodobnosti pro odhad této složky se konstruuje pomocí radiosity zdroje..



Vzorkování světelných zdrojů

hustota pravděpodobnosti pro **příspěvek**
přímého osvětlení:

$$p(\mathbf{y}) = \frac{L(\mathbf{y})}{L}$$

radiosita emitovaná z bodu \mathbf{y}

$$L(\mathbf{y}) = \int_{\Omega_{\mathbf{y}}} L_e(\mathbf{y}, \omega_{\mathbf{y}}) \cdot \cos \theta_{\mathbf{y}} d\omega_{\mathbf{y}}$$

$$L = \int_A \int_{\Omega_{\mathbf{y}}} L_e(\mathbf{y}, \omega_{\mathbf{y}}) \cdot \cos \theta_{\mathbf{y}} d\omega_{\mathbf{y}} dA_{\mathbf{y}}$$

celkový emitovaný výkon



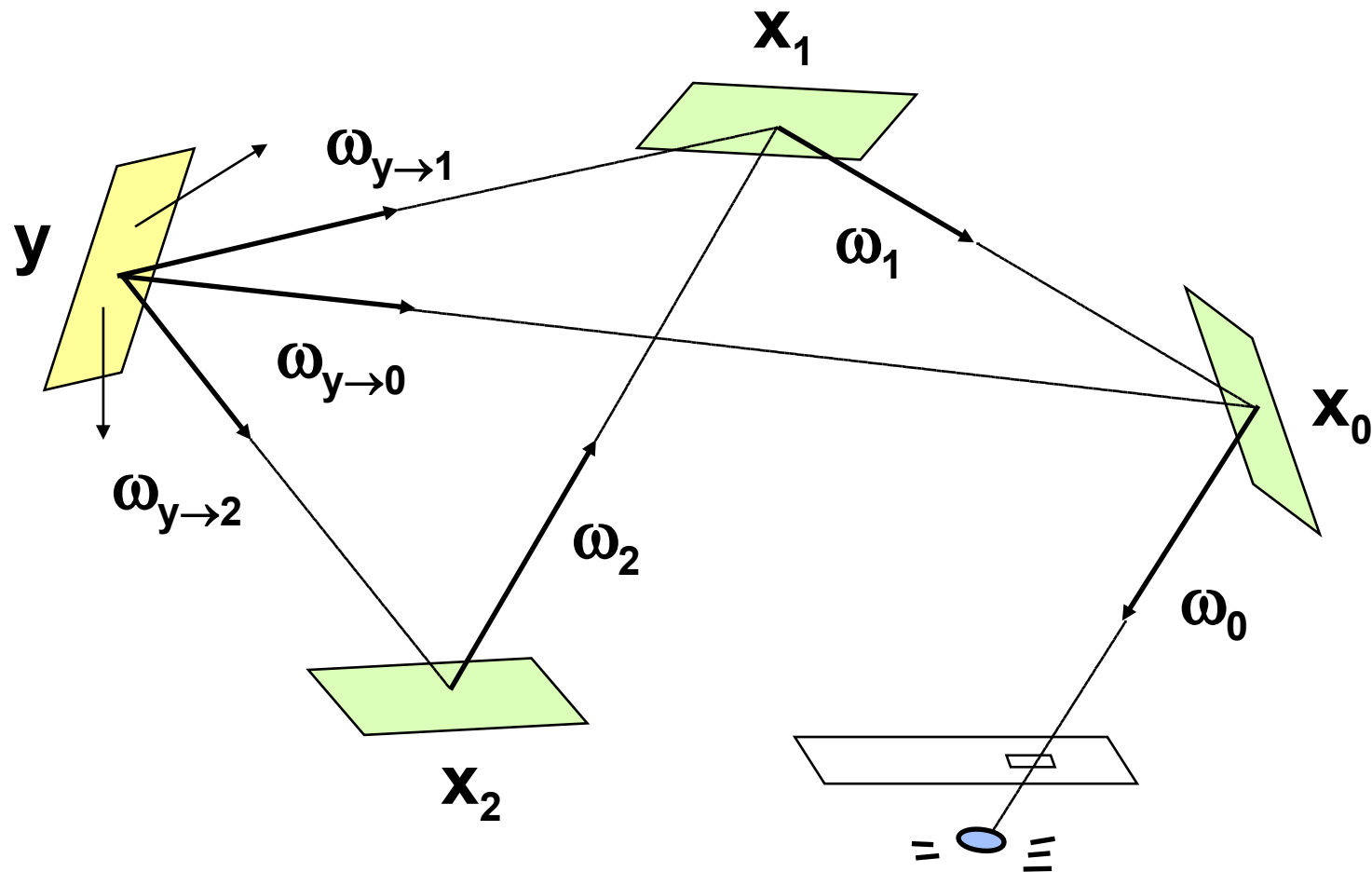
Odhad příští události

Vzorkování podle **BRDF** (subkritická hustota pravděpodobnosti) s **ruskou ruletou** a **odhadem příští události**:

$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{path,imp,nee}} = \mathbf{W}(\mathbf{S}) \cdot \left[\mathbf{L}_e(\mathbf{x}_0, \omega_0) + \frac{\mathbf{L}}{\mathbf{L}(\mathbf{y})} \sum_{i=0}^k \mathbf{L}_e(\mathbf{y}, \omega_{\mathbf{y} \rightarrow i}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \omega_{\mathbf{y} \rightarrow i}, \omega_i) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) \right]$$



Schema šíření světla (NEE)

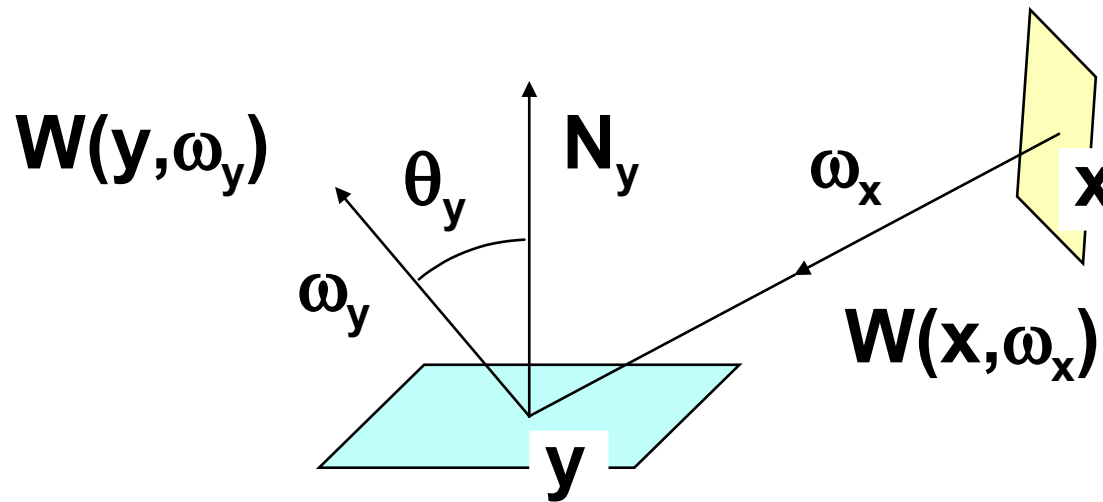




Odhad příští události

- ♦ je nejvýhodnější pro scény s **malými** ale **dobře viditelnými** plochami světelných zdrojů
 - vzorkování světelných zdrojů je dominantní
- ♦ vzorkování zdrojů nebere v úvahu jejich **viditelnost**
 - dokonalejší metody počítají i s **BRDF** nebo geometrickými faktory **$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i)$**
- ♦ **vzorkování světelných zdrojů** se může provádět v každém kroku **\mathbf{x}_i**

Zobrazovací rovnice pro potenciál



$$W(\mathbf{x}, \omega_x) =$$

$$= W_e(\mathbf{x}, \omega_x) + \int_{\Omega_y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega_x \rightarrow \omega_y) \cdot W(\mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y$$

$$\Phi_o(\mathbf{S}) = \int_A \int_{\Omega_x} L_e(\mathbf{x}, \omega_x) \cdot W(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{S}) \cdot \cos \theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$



Light tracing

Paprsek vycházející ze zdroje (vyzařovací charakteristiky zdroje):

$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{light}} = \frac{L_e(\mathbf{x}_0, \omega_0) \cdot \cos \theta_0}{p_0(\mathbf{x}_0, \omega_0)} \cdot \langle \mathbf{W}(\mathbf{x}_0, \omega_0, \mathbf{S}) \rangle_{\text{light}}$$

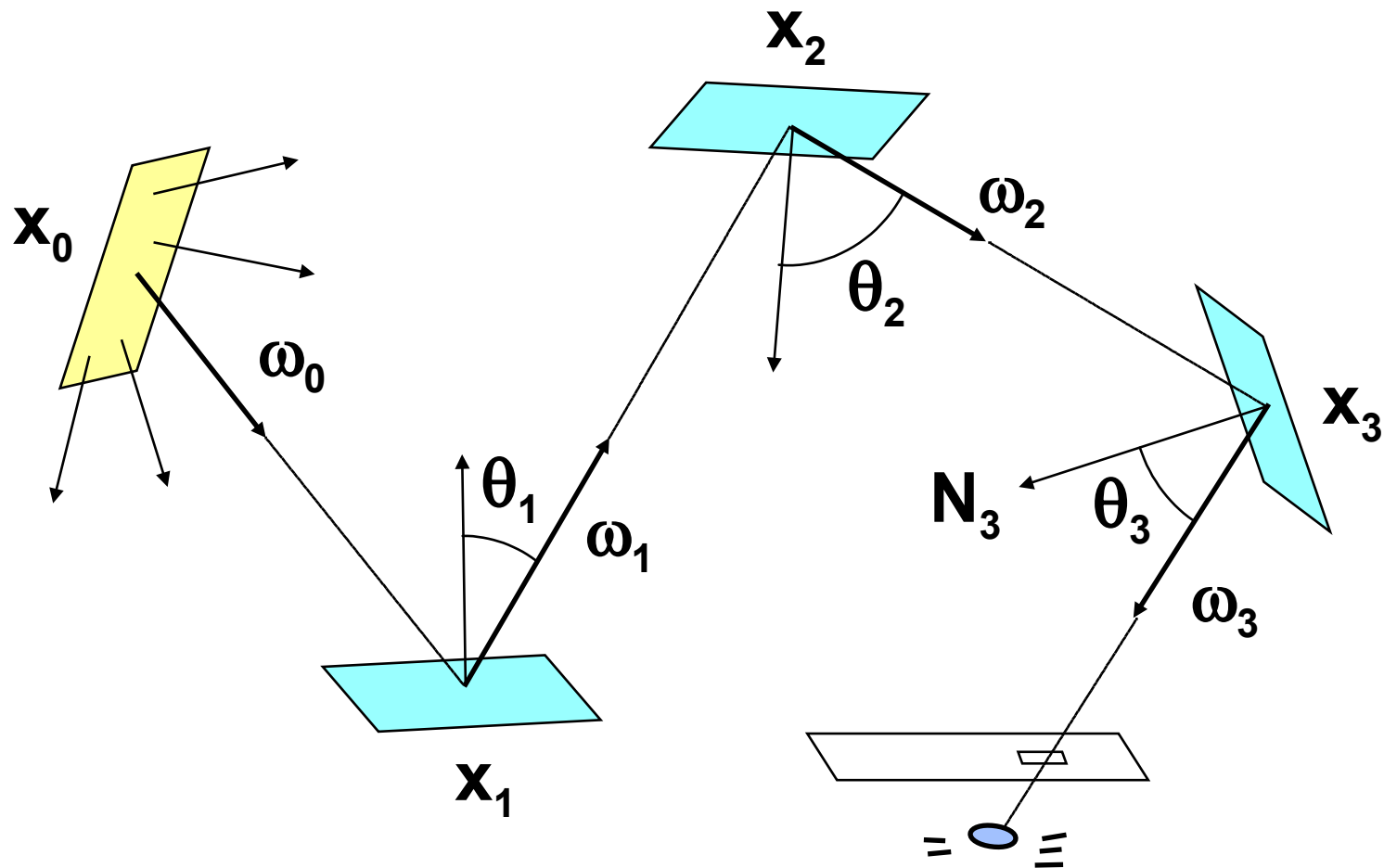
$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{light}} = \frac{L_e(\mathbf{x}_0, \omega_0) \cdot \cos \theta_0}{p_0(\mathbf{x}_0, \omega_0)} \cdot$$

**celkový
odhad**

$$\cdot \sum_{i=0}^k \left[\prod_{j=1}^i \frac{f(\mathbf{x}_j, \omega_{j-1} \rightarrow \omega_j) \cdot \cos \theta_j}{P_j \cdot p_j(\omega_j)} \right] \cdot \mathbf{W}_e(\mathbf{x}_i, \omega_i, \mathbf{S})$$



Schema šíření světla (střílení)





Vzorkování podle důležitosti

Pro vyzařování světelného zdroje (druhý integrál):

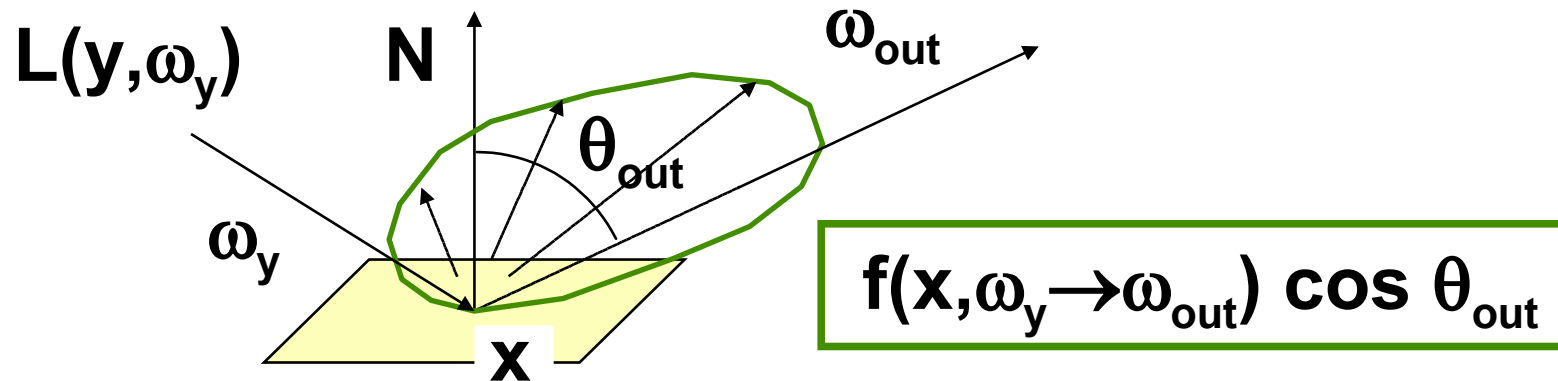
$$\underline{\mathbf{p}_0(\mathbf{x}_0, \omega_0)} = \frac{\mathbf{L}_e(\mathbf{x}_0, \omega_0) \cdot \cos \theta_0}{L}$$

Pro pravděpodobnost pokračování a směr odraženého paprsku (první integrál) se použije metoda subkritické pravděpodobnosti (BRDF v bodě \mathbf{p}_j):

$$\underline{\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{p}_j(\omega_j)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_j, \omega_{j-1} \rightarrow \omega_j) \cdot \cos \theta_j$$



Vzorkování podle BRDF



Celkový primární odhad s využitím všech uvedených pravděpodobností:

$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{light,imp}} = L \cdot \sum_{i=0}^k W_e(\mathbf{x}_i, \omega_i, \mathbf{S})$$



Odhad příští události (NEE)

Rozdělení odraženého světla na dvě složky (bez **S**):

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \omega_x) = \mathbf{W}_e(\mathbf{x}, \omega_x) + \mathbf{W}_r(\mathbf{x}, \omega_x)$$

$$\underline{\mathbf{W}_r(\mathbf{x}, \omega_x)} = \int_{\Omega_y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega_x \rightarrow \omega_y) \cdot \mathbf{W}(\mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y =$$

$$= \int_{\underline{A_{pe}}} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega_x \rightarrow \underline{\omega_z}) \cdot \mathbf{W}_e(\mathbf{y}, \underline{\omega_z}) \cdot \underline{\mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{z})} \, \underline{dA_z} +$$
$$+ \int_{\Omega_y} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega_x \rightarrow \omega_y) \cdot \mathbf{W}_r(\mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y$$

plocha
objektivu

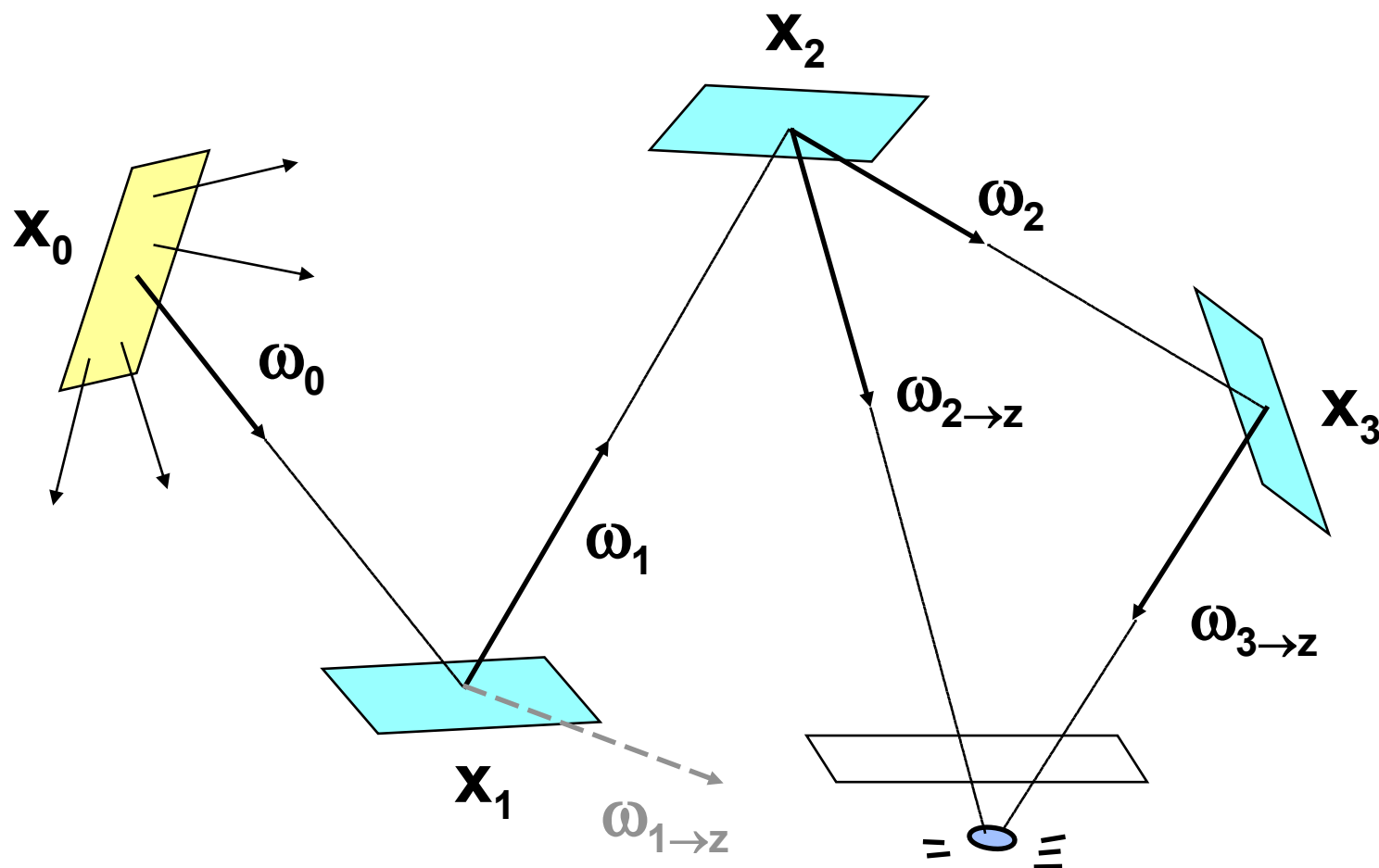


Odhad příští události

Vzorkování podle **BRDF** (subkritická hustota pravděpodobnosti) s **ruskou ruletou** a **odhadem příští události**:

$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{light,imp,nee}} = \mathbf{L} \cdot \left[\mathbf{W}_e(\mathbf{x}_0, \omega_0, \mathbf{S}) + \mathbf{Ape} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} \mathbf{W}_e(\mathbf{x}_i, \omega_{i \rightarrow z}, \mathbf{S}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \omega_{i-1}, \omega_{i \rightarrow z}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}) \right]$$

Schema šíření světla (NEE)





Použití metody “**light-tracing**”:

- ♦ **přímý výpočet realistického obrázku**
 - světlo se přijímá kamerou a ukládá v průmětně
- ◆ **pomocný výpočet** pro některou kombinovanou (hybridní) metodu
 - světlo se ukládá do tzv. světelných map (fotonové mapy, “particle-tracing”)
 - větší suma potenciálu W_e vede k efektivnějšímu výpočtu



Obousměrné sledování paprsku

(“bidirectional path-tracing”)

Kombinovaná **globální zobrazovací rovnice**:

vlastní emitovaná radiance

GRDF

diskrétní potenciál

$$\Phi(\mathbf{S}) = \iint_{A, \Omega_x} \iint_{A, \Omega_y} L_e(\mathbf{x}, \omega_x) W_e(\mathbf{y}, \omega_y, \mathbf{S}) F(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) \cos \theta_y \cos \theta_x d\omega_y dA_y d\omega_x dA_x$$

integrály přes všechny plochy a směry zdrojů a všechny plochy a směry receptorů



Odhad světelného toku

Výkon procházející pixelem (anti-aliasing, hloubka ostrosti), vyzařování světelného zdroje:

$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{bipath}} = \frac{L_e(\mathbf{x}_0, \omega_{x0}) \cos \theta_{x0}}{p_0(\mathbf{x}_0, \omega_{x0})} \cdot \frac{W_e(\mathbf{y}_0, \omega_{y0}, \mathbf{S}) \cos \theta_{y0}}{q_0(\mathbf{y}_0, \omega_{y0})} \cdot \langle F(\mathbf{x}_0, \omega_{x0} \rightarrow \mathbf{y}_0, \omega_{y0}) \rangle_{\text{bipath}}$$

p_0 ... hustota pravděpodobnosti náhodné dvojice $[\mathbf{x}_0, \omega_{x0}]$, q_0 ... h. p. náhodné dvojice $[\mathbf{y}_0, \omega_{y0}]$



Rekurentní definice GRDF

První odraz:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \underline{\mathbf{y}}, \omega_y) = \delta(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{y}, \omega_y) + \int_{\Omega_z} \mathbf{f}(\mathbf{z}, \omega_x \rightarrow \omega_z) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{z}, \omega_z \rightarrow \underline{\mathbf{y}}, \omega_y) \cdot \cos \theta_z \, d\omega_z$$

Poslední odraz:

$$\mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}, \omega_x \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) = \delta(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{y}, \omega_y) + \int_{\Omega_y^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega_z \rightarrow \omega_y) \cdot \mathbf{F}(\underline{\mathbf{x}}, \omega_x \rightarrow \mathbf{z}, \omega_z) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_z$$



Odhad GRDF

Lineární kombinace obou rekurzivních vzorců:

$$\underline{\mathbf{F} = \delta + \mathbf{w}^* \mathbf{T}^* \mathbf{F} + \mathbf{w} \mathbf{T} \mathbf{F}}, \quad \mathbf{w} + \mathbf{w}^* = \mathbf{1}$$

Nekonečná Neumannova řada:

$$\underline{\mathbf{F} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{w}_{ij} \mathbf{T}^{*i} \mathbf{T}^j \delta}, \quad \sum_{i=0}^N \mathbf{w}_{i,N-i} = \mathbf{1}$$

\mathbf{T} i \mathbf{T}^* se odhadují stochasticky pomocí náhodné procházky ukončované ruskou ruletou. Bez odhadu příští události však má tato metoda **velký rozptyl**.

Obousměrné sledování paprsku

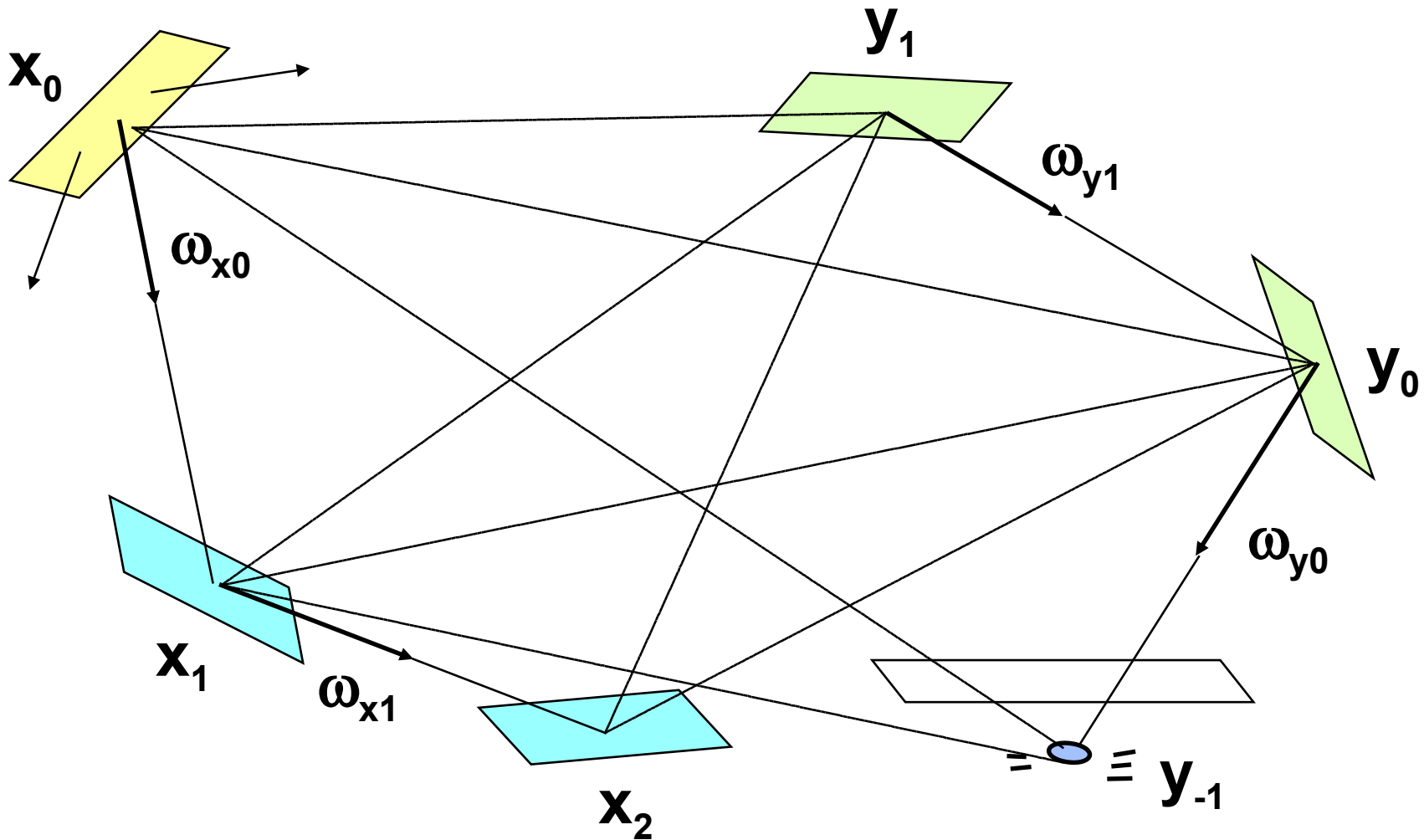


T* se odhaduje sledováním dráhy světla **od zdroje** (“light tracing”):
 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k^*}$ - směr ω_{x_i} se vybírá podle hustoty pravděpodobnosti $p_i(\omega_{x_i})$, pravděpodobnost pokračování je P_i

T se odhaduje zpětným sledováním dráhy světla **od pozorovatele** (“path tracing”):
 $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ - směr ω_{y_i} se vybírá podle hustoty pravděpodobnosti $q_i(\omega_{y_i})$, pravděpodobnost pokračování je Q_i



Schema šíření světla (NEE)





Odhad příští události (NEE)

S přidáním neuzavřených cest:

$$\langle \Phi(\mathbf{S}) \rangle_{\text{bipath,nee}} = \sum_{i=-1}^k \sum_{j=-1}^{k^*} w_{ij} C_{ij}$$

$i=-1, j>0$: cesta od pozorovatele (bez NEE)

$i=0, j\geq 0$: cesta od pozorovatele se vzorkem na zdroji

$i>0, j>0$: světlo i -krát odražené od zdroje a j -krát od pozorovatele

$i\geq 0, j=0$: cesta od zdroje se vzorkem na receptoru

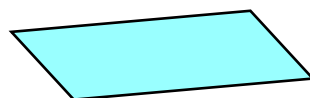
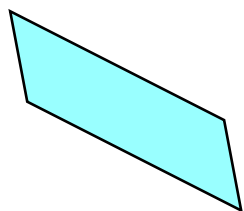
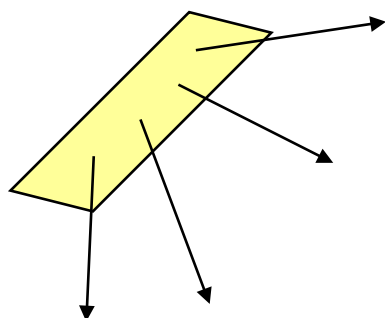
$i>0, j=-1$: cesta od zdroje (bez NEE - neefektivní)

Přehled vzorkování

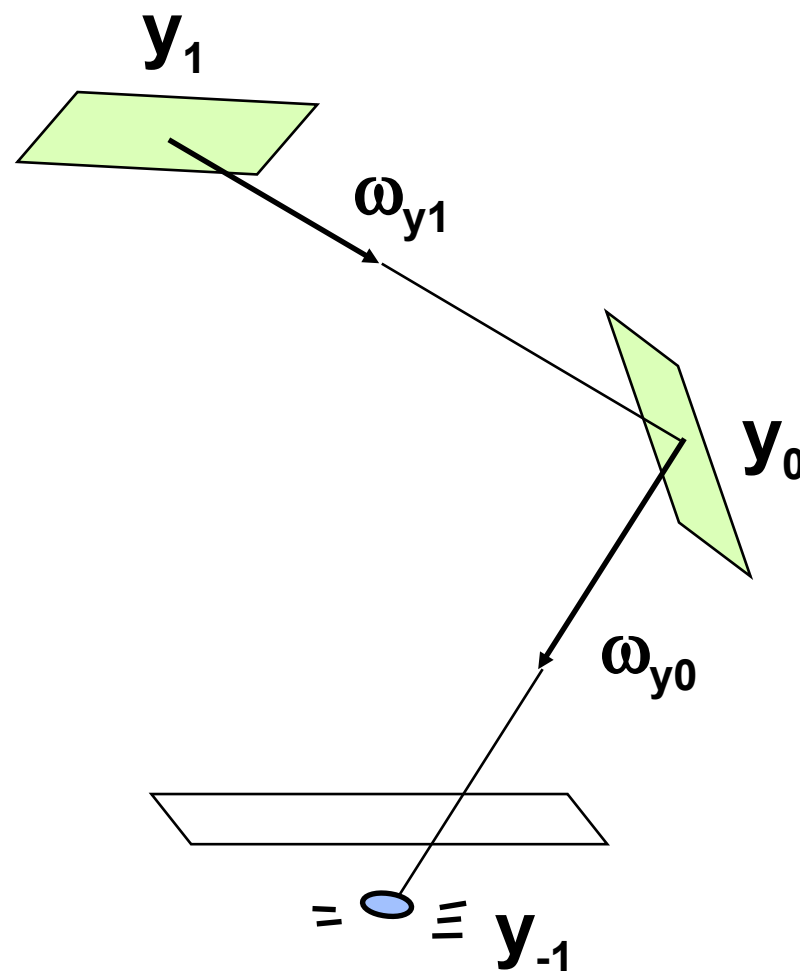


závislost příspěvku na		vzorku na cestě od zdroje světla				
		x_0	x_1	x_2	x_3	
vzorku na cestě od receptoru		LT				
		PT		$C_{1,-1}$	$C_{2,-1}$	$C_{3,-1}$
	y_{-1}		$C_{0,0}$	$C_{1,0}$	$C_{2,0}$	$C_{3,0}$
	y_0	$C_{-1,1}$	$C_{0,1}$	$C_{1,1}$	$C_{2,1}$	$C_{3,1}$
y_2	$C_{-1,2}$	$C_{0,2}$	$C_{1,2}$	$C_{2,2}$	$C_{3,2}$	

Neuzavřená cesta od receptoru

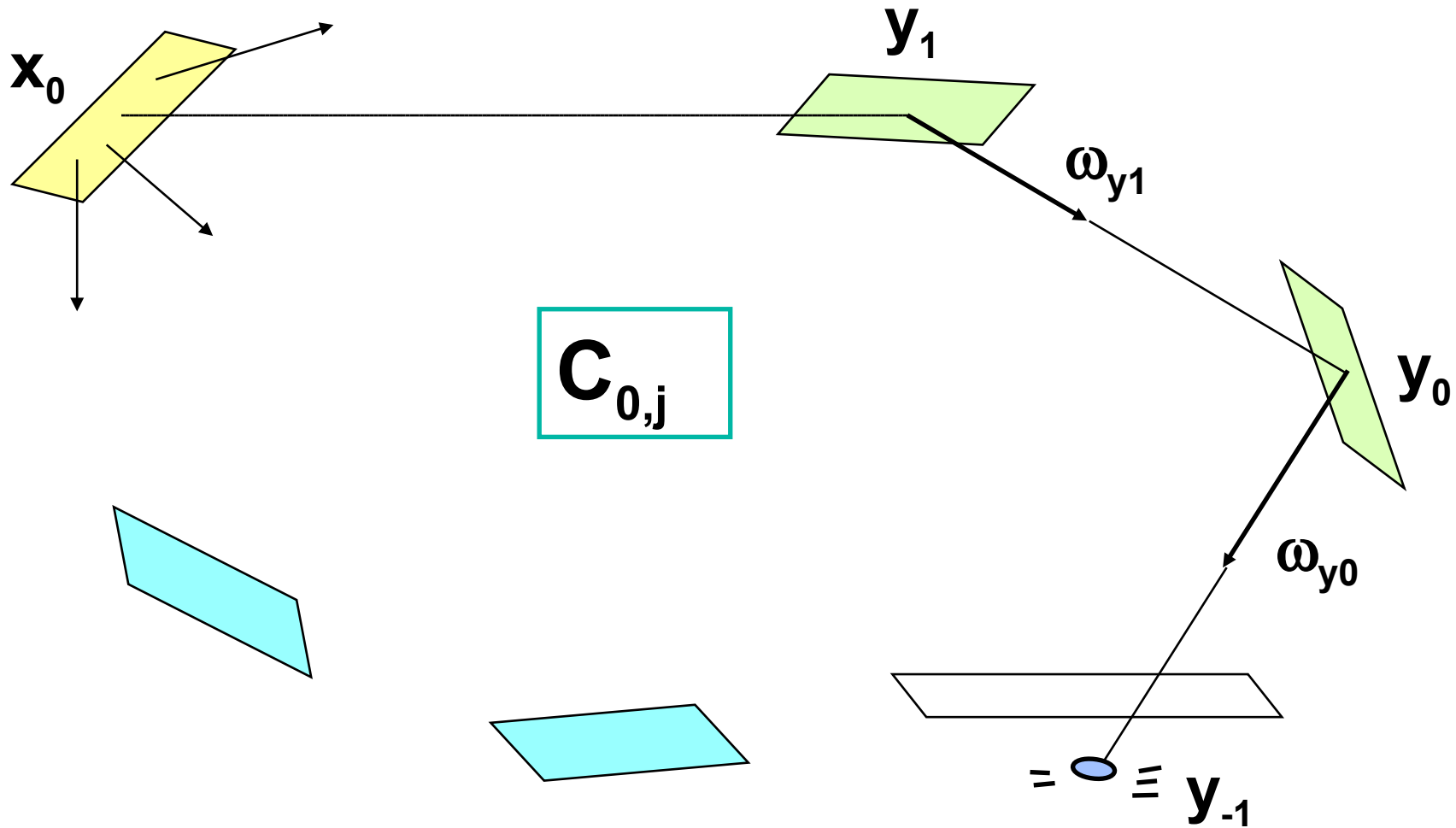


$C_{-1,j}$



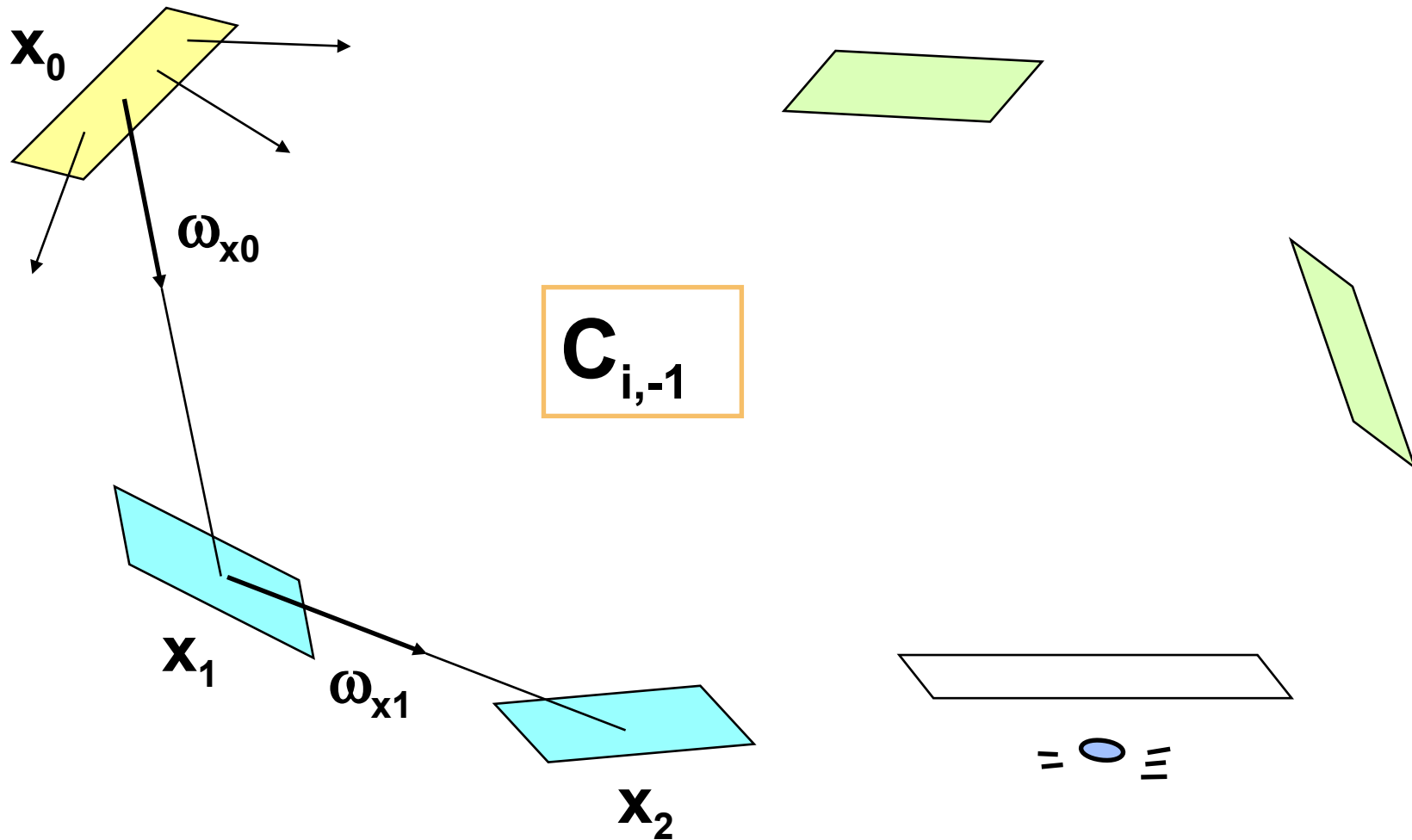


Path tracing s NEE



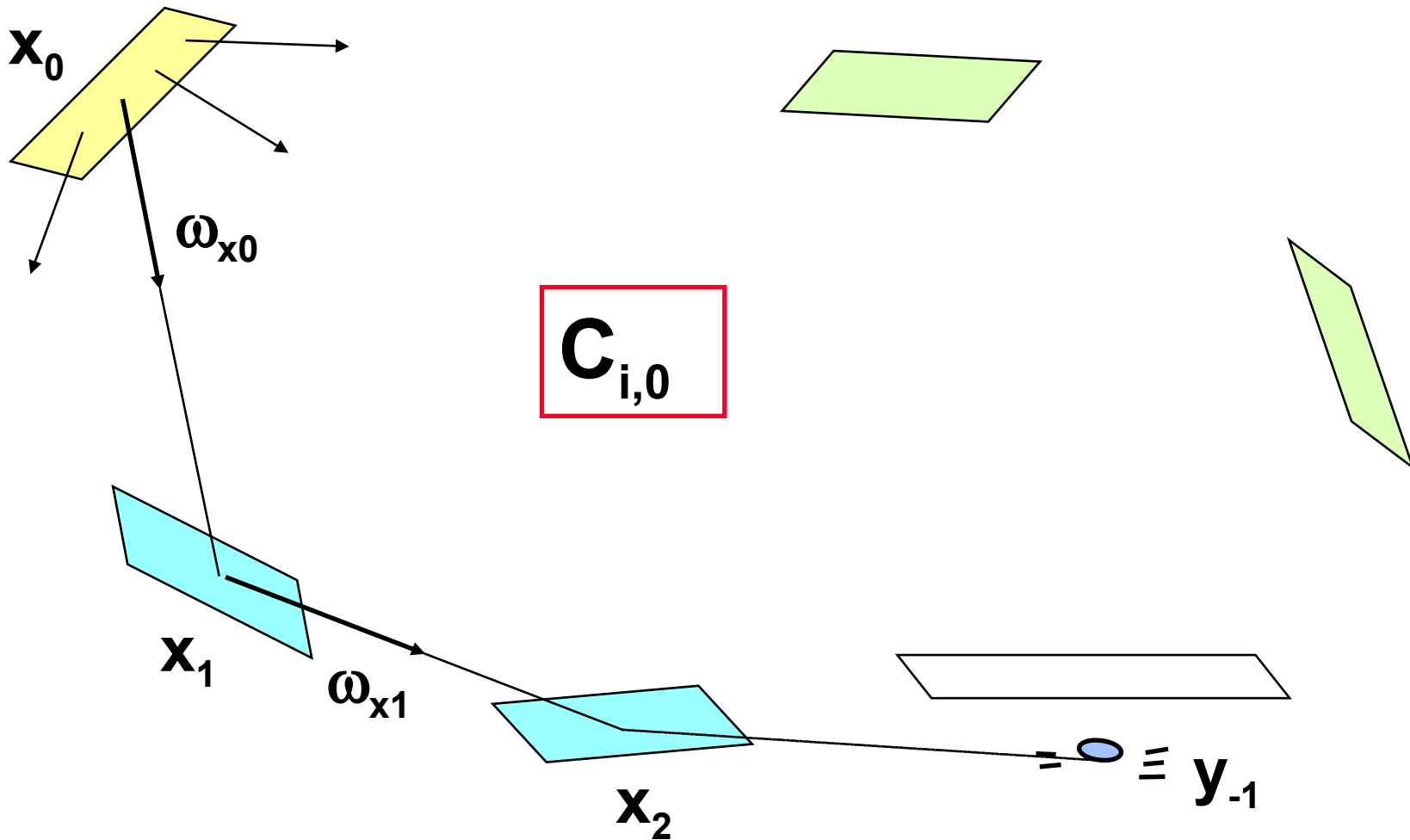


Neuzavřená cesta od zdroje

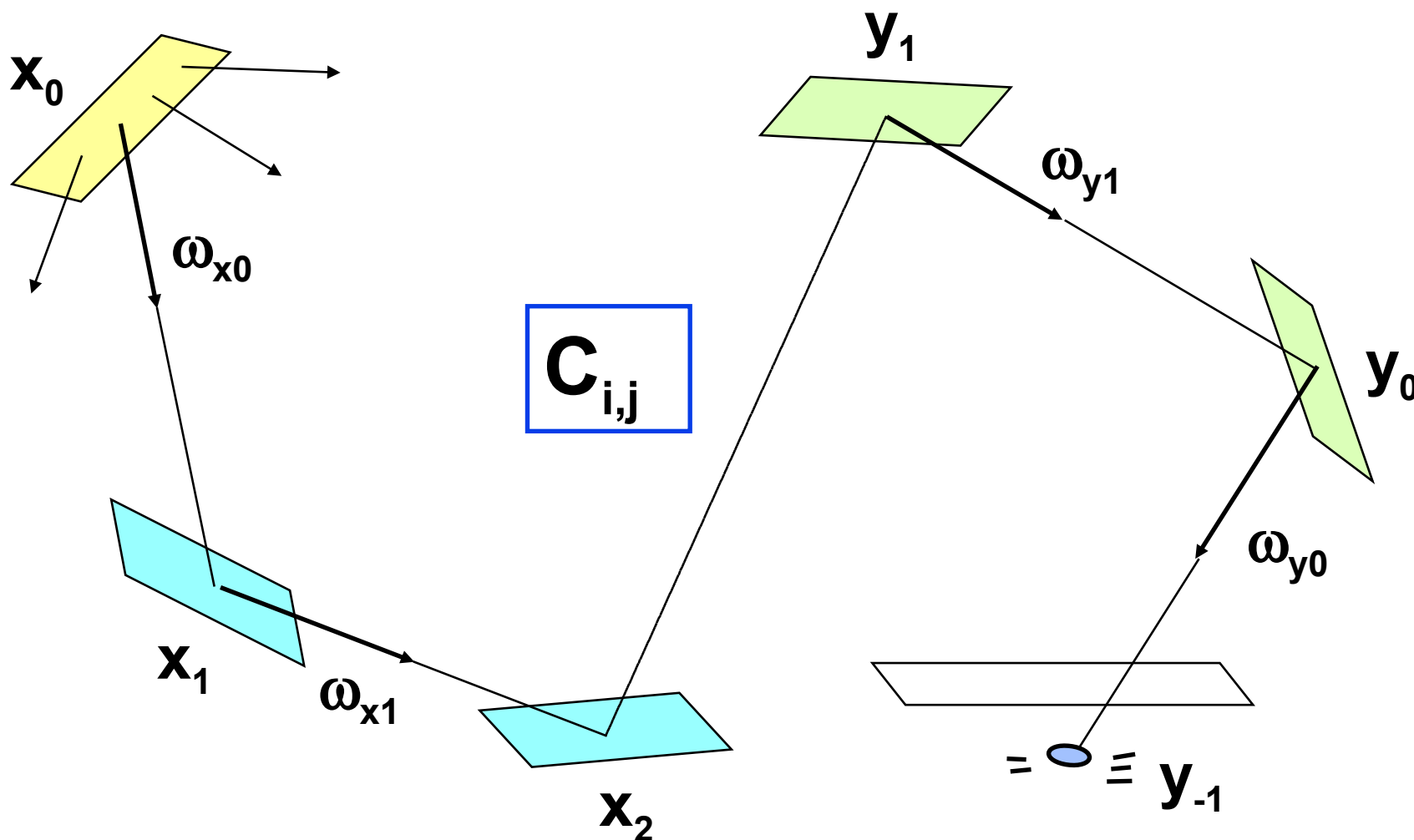




Light tracing s NEE



Kombinovaná cesta





Efektivní implementace

- ♦ výpočet dvou **nezávislých náhodných procházek** zakončovaných ruskou ruletou
 - od světelného zdroje (délka k^*) a od receptoru (k)
 - nebo jedna cesta ze zdroje do receptoru délky K
- ➔ kombinace **všech prefixů** obou cest
 - systematická chyba?
- ➔ **$K+2$** kombinace pro cestu pevné délky K
 - kombinovaný odhad - směs odhadů pro všechna K



Další informace:

- **E. Lafortune: *Mathematical Models and Monte Carlo Algorithms for Physically Based Rendering*, PhD thesis, KU Leuven, 65-102**
- **A. Glassner: *Principles of Digital Image Synthesis*, Morgan Kaufmann, '95, 1037-1049**
- **E. Veach, L. Guibas: *Optimally Combining Sampling Techniques for Monte Carlo Rendering*, SIGGRAPH '95**