

Vzorkování a anti-aliasing

© 2010-2024 Josef Pelikán
CGG MFF UK Praha

pepca@cgg.mff.cuni.cz
<https://cgg.mff.cuni.cz/~pepca/>



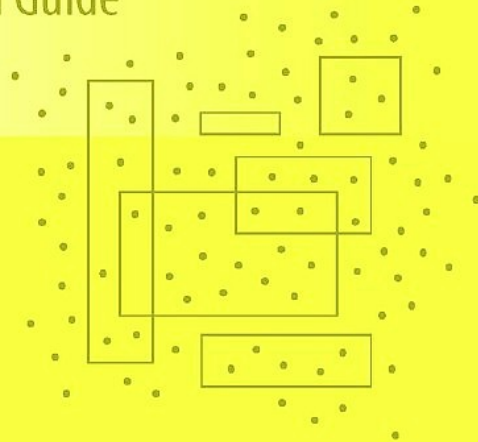
Jiří Matoušek

ALGORITHMS AND COMBINATORICS

18

Geometric Discrepancy

An Illustrated Guide



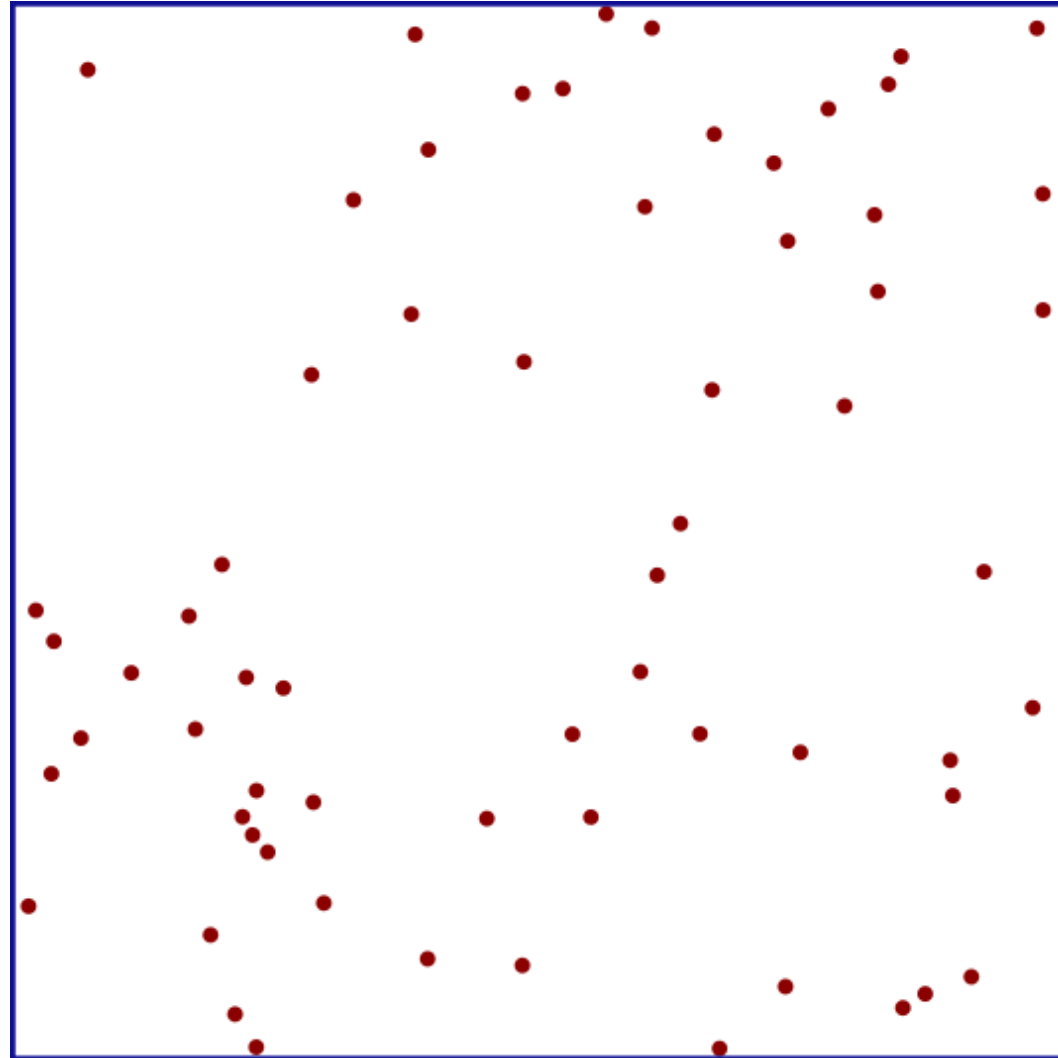
 Springer



Jiří Matoušek (1963-2015)



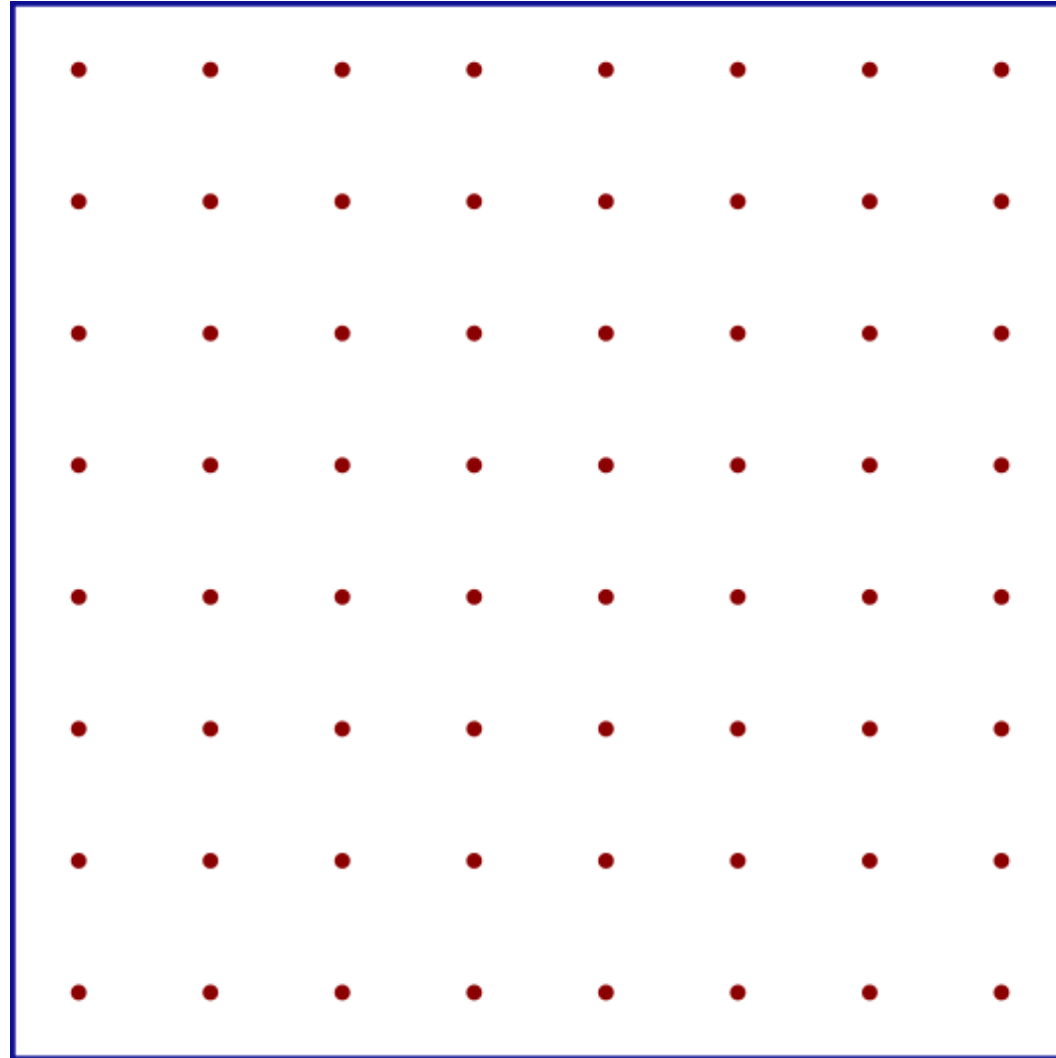
Náhodné rozložení bodů... ?



Random



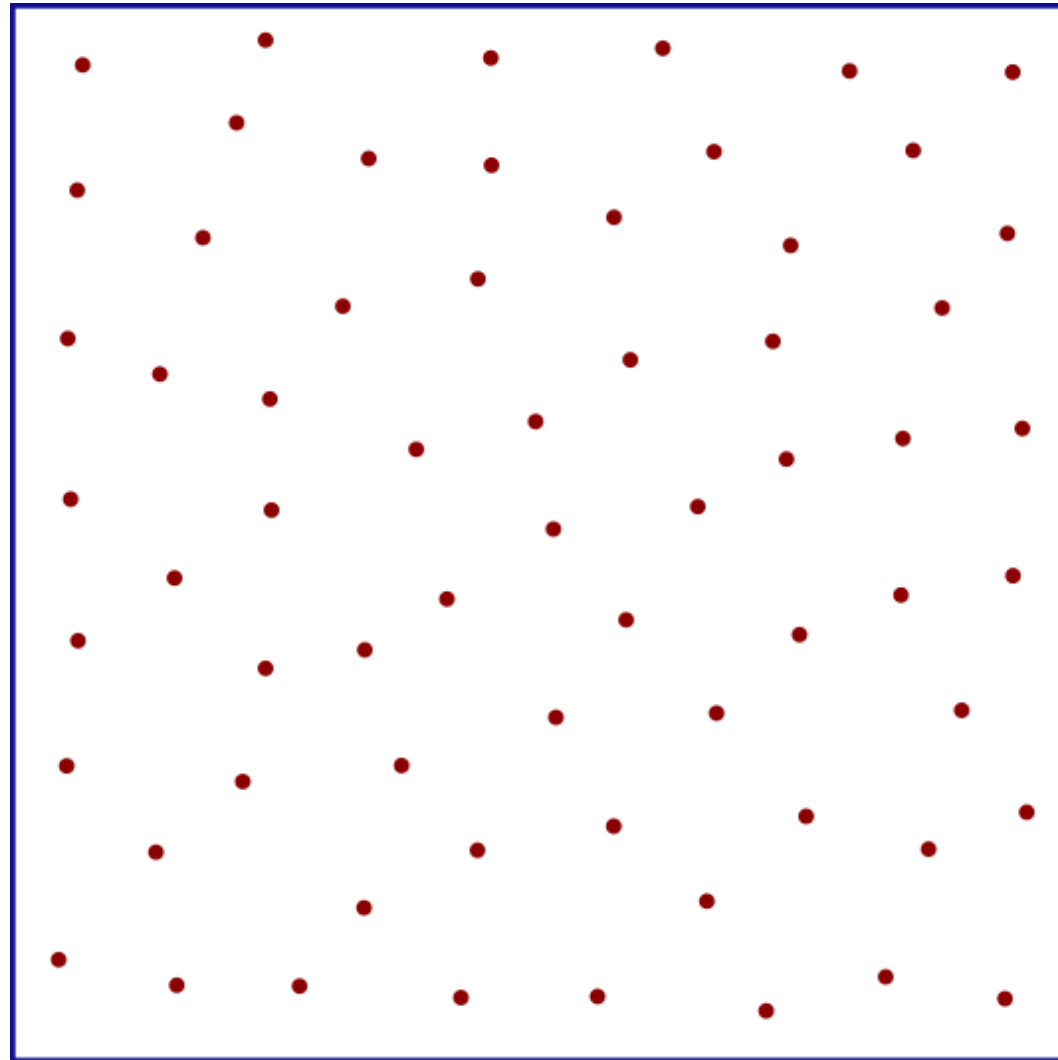
Náhodné rozložení bodů... ?



Regular

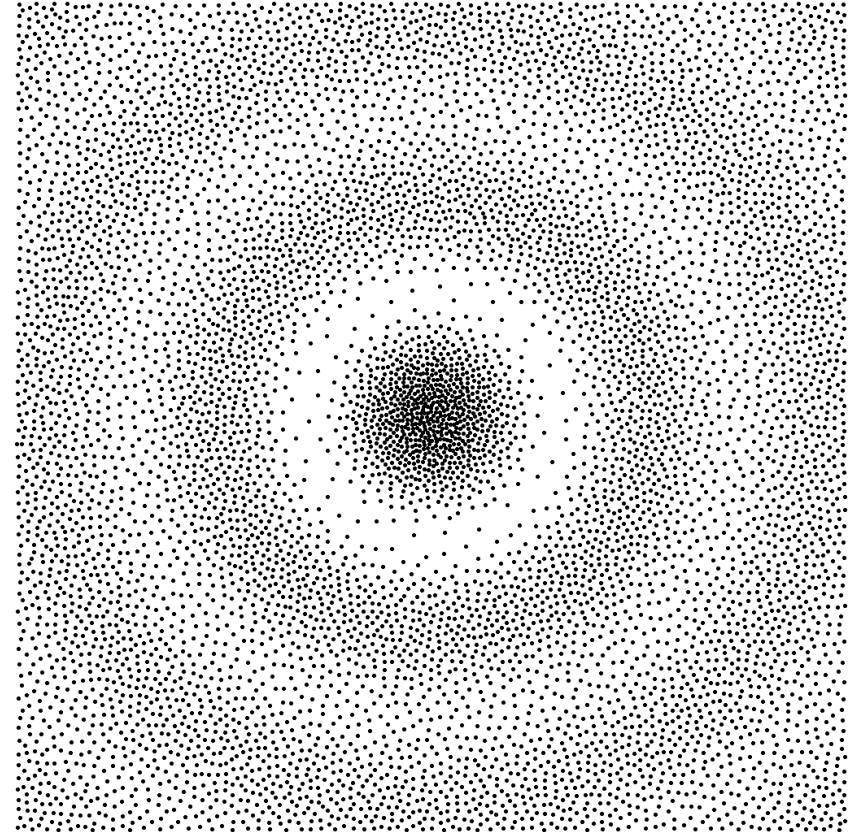


Náhodné rozložení bodů... ?

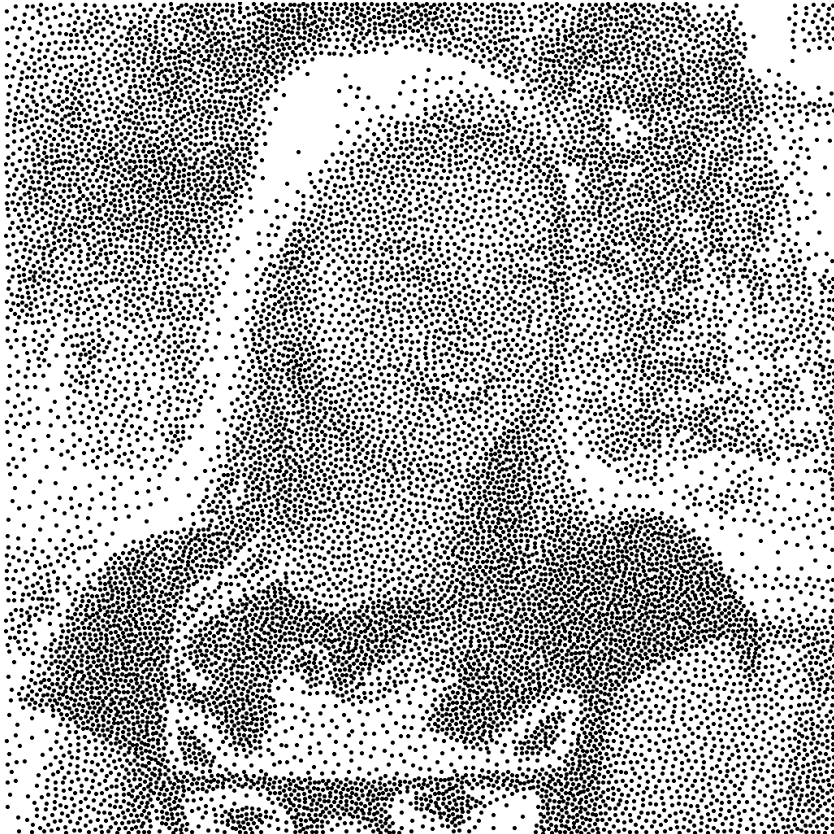


CCPD

Řízení hustotou pravděpodobnosti



Řízení hustotou pravděpodobnosti





Fyzikální zákony, sítnice oka...



Aplikace

Vzorkování pro **Monte-Carlo**, anti-aliasing

- rychlost, diskrepance, hustota

Tiskařství – tupování („stippling“), FM dithering

- hustota, spektrální vlastnosti, estetika

Simulace **přírodních jevů** (stromy, buňky...), hry

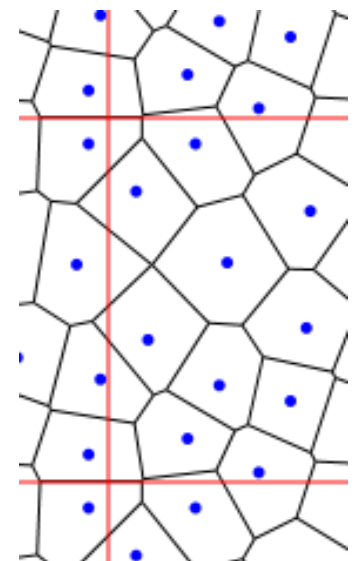
- spektrální vlastnosti, estetika, hustota
- deterministické chování

Design, architektura

- estetika, efektivita výroby (opakování vzorů)

Generování **sítí pro FEM**

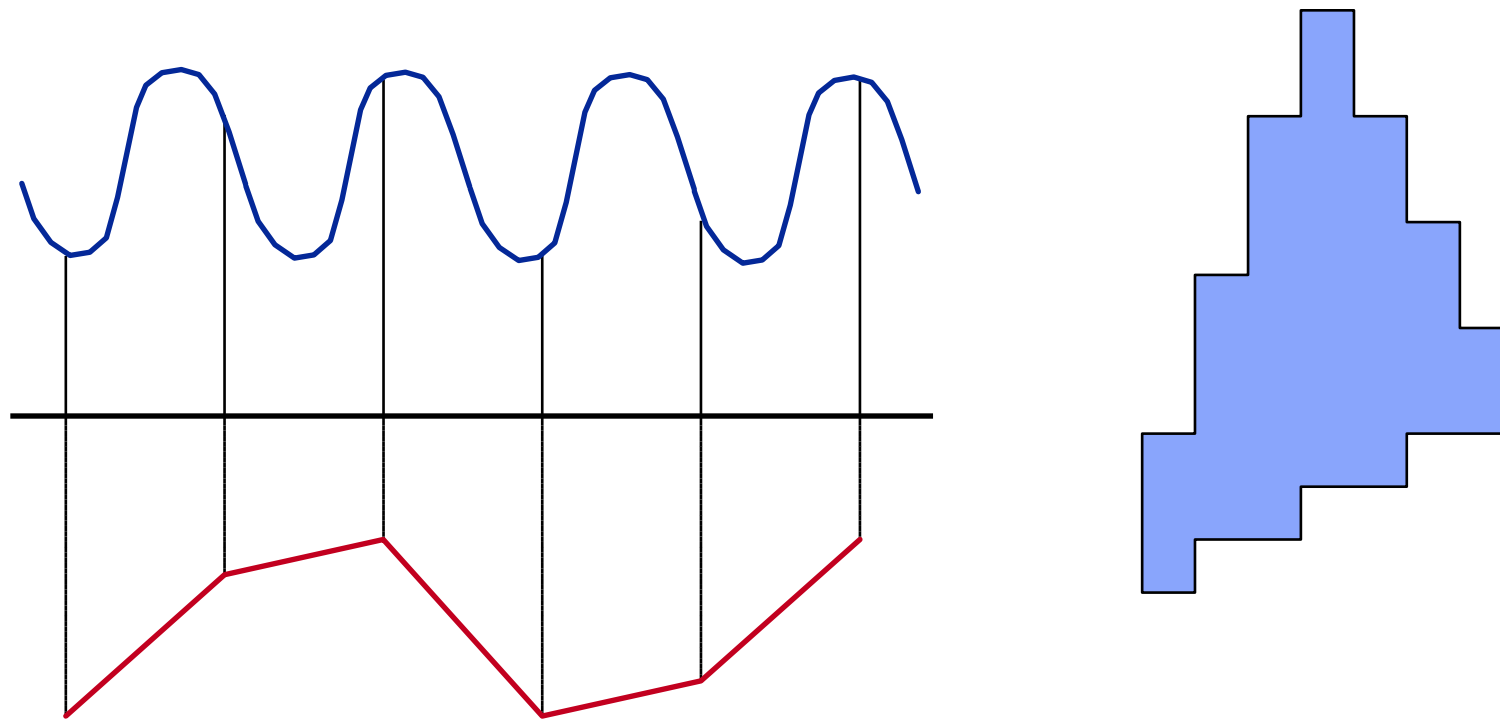
- diskrepance, hustota





Prostorový a časový alias

Alias – artefakt způsobený nedostatečným (pravidelným) vzorkováním





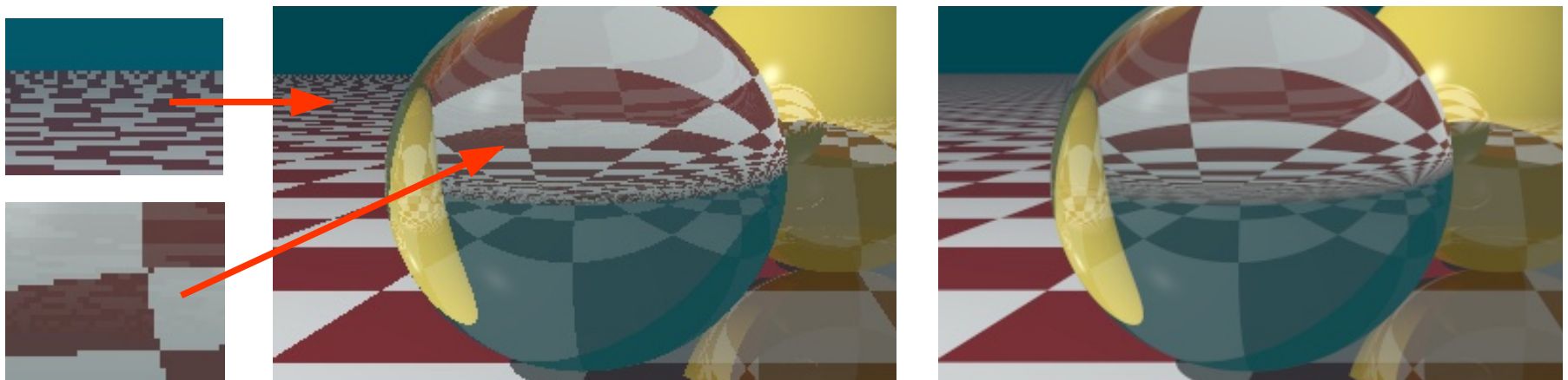
Prostorový alias

Zubaté obrysové čáry

- pravidelný hustý vzor (čáry nebo pruhy) na textuře mohou vést ke vzniku „Moiré efektu“

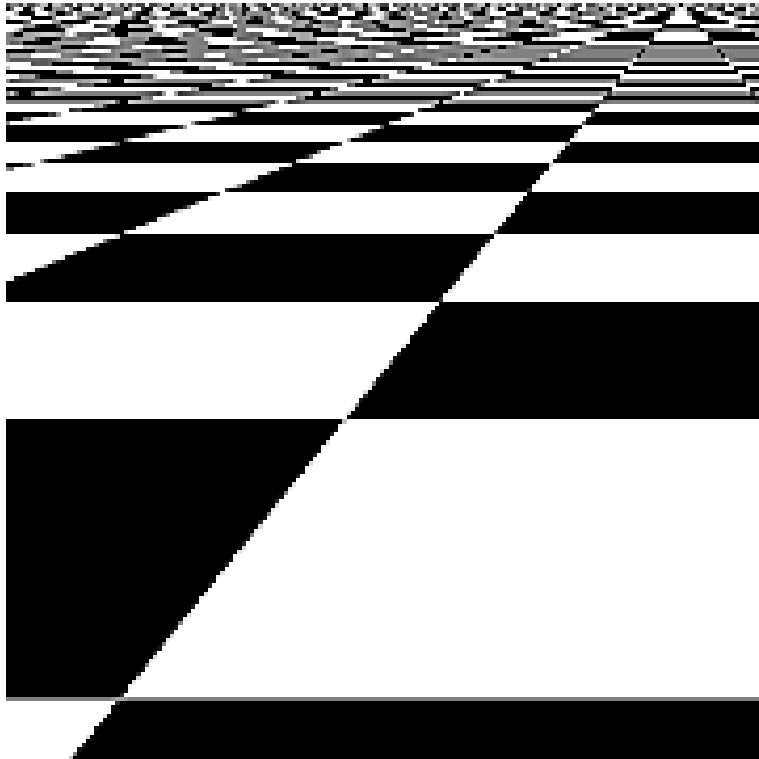
Interference periodických změn obrazu s pixelovým rastrem

- příklad – plaňkový plot v perspektivním zobrazení
- příliš jemná nebo velmi vzdálená pravidelná textura (šachovnice)

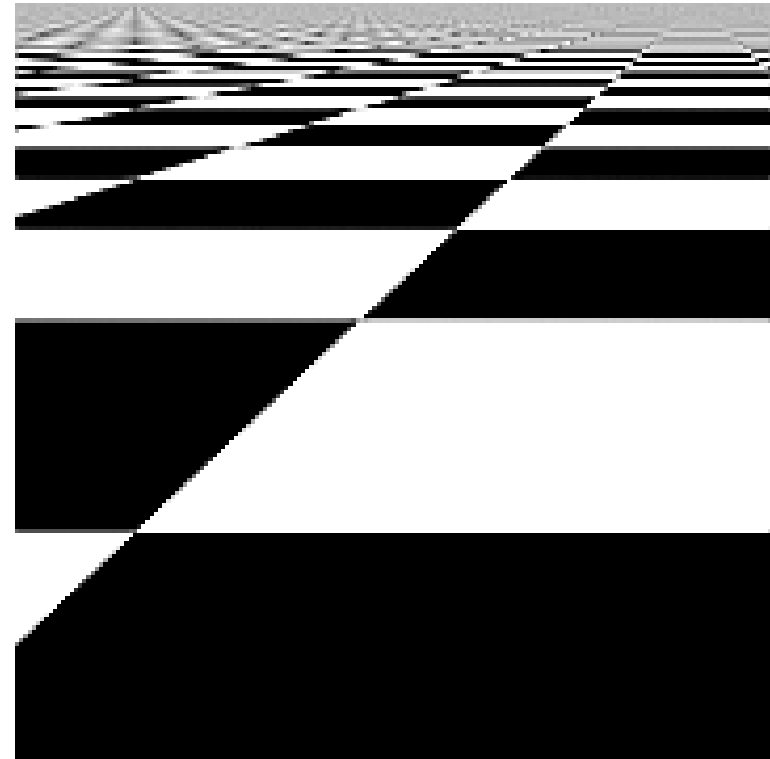




Prostorový alias – šachovnice



1 sample per pixel



256 spp (jittering)



Časový alias

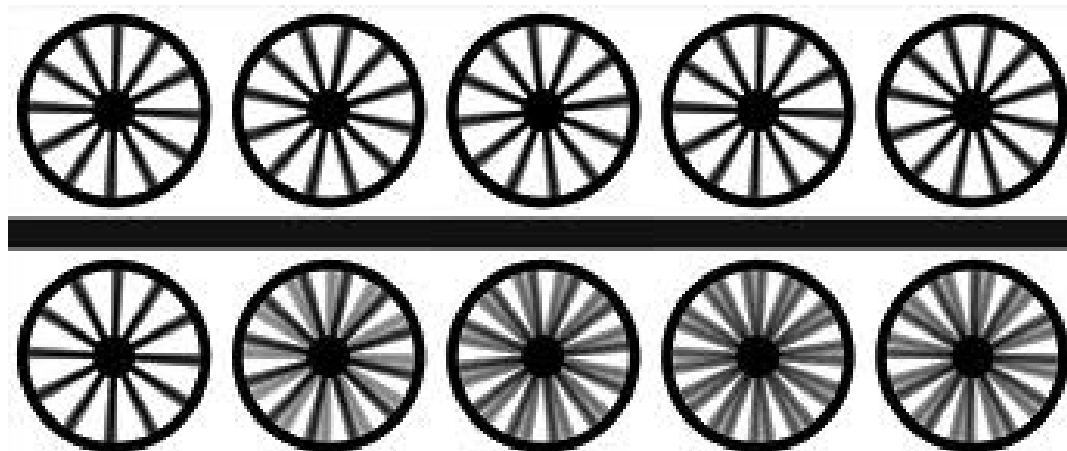
Projevuje se i v pomalých animačních pohybech

Blikající pixely na obrysu pohybujících se objektů

- celý objekt může blikat („popping“)

Interference periodického pohybu a snímkové frekvence

- otáčející-se kola → loukotě se zdánlivě zastavují nebo točí opačně...



© 2017, Tony Davis



Realita kolem nás

Lidský vizuální systém **netrpí aliasem**

Jen lehce se alias projevuje ve fotografii

Objekty **pod hranicí rozlišení senzoru** nejsou vykresleny v plném detailu (jsou rozmazané)

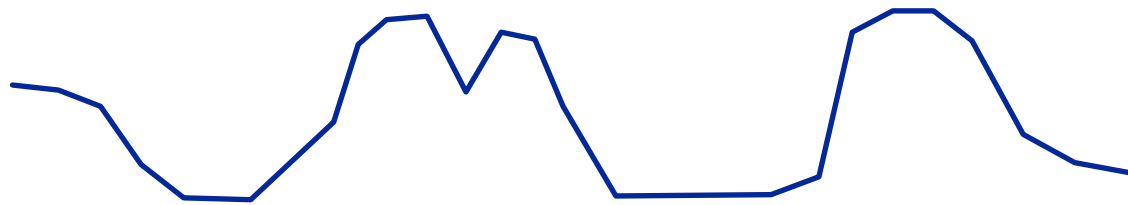
- plot pozorovaný z dálky je vnímán jako průměrná barva

Příliš rychle se pohybující objekty jsou vnímány **rozmazaně**

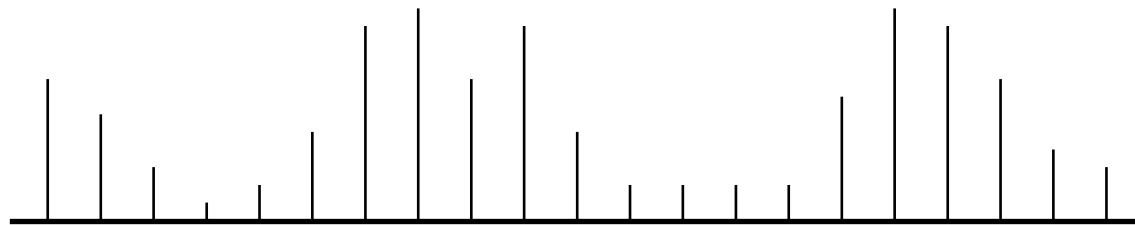


© 1984, Cook et al.

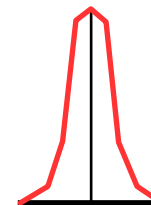
Snímání a rekonstrukce v rastrovém prostředí



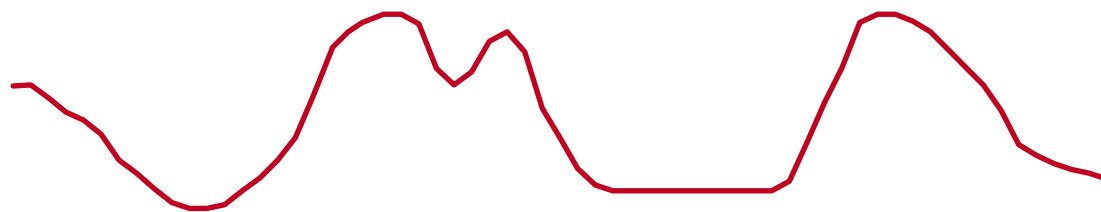
Originál
(obrazová funkce)



Vzorkování
(nebo výpočet)



Rekonstrukční filtr



Rekonstrukce
(rendering)



Vzorkování a rekonstrukce

Vzorkování obrazu nebo výpočet obrazové funkce

- vyšší frekvence by měly být před vzorkováním potlačeny/odstraněny
- filtr typu dolní propust (konvoluce – průměrování v okénku)
- syntéza obrazu může přímo redukovat vyšší frekvence (anti-aliasing pomocí supersamplingu)

Rekonstrukční filtr je určen výstupním zařízením

- např. sousední „pixely“ CRT monitoru se překrývaly
- LCD pixely se chovají jinak – jsou oddělené skoro dokonale



Anti-aliasing přes super-sampling

Obrazová funkce ve spojitém prostoru a s neomezeným spektrem

$f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Anti-aliasing filtr (funkce s omezeným nosičem)

$h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Barva pixelu $[i, j]$

$$I(i, j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot h(\mathbf{x} - \mathbf{i}, \mathbf{y} - \mathbf{j}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}$$



Jednoduchý model anti-aliasingu

Předpokládáme **obdélníkový filtr** a **čtvercový pixel**

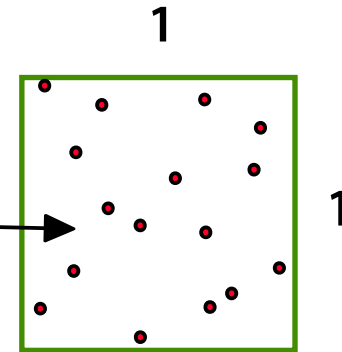
$$I(i, j) = \int_j^{j+1} \int_i^{i+1} f(x, y) \, dx \, dy$$

(integrální průměr obrazové funkce přes plochu pixelu)



Kvadratura („integrování“)

- 1 **Analytická** (přímo vzorečkem)
 - umíme to jen výjimečně...
- 2 **Numerické řešení pomocí vzorkování**
 - konečná sada vzorků $[x_i, y_i]$
 - odhad integrálu vzorcem



$$I(i, j) = \frac{\sum_k f(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \cdot h(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)}{\sum_k h(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)}$$

- stochastické vzorkování – **Monte-Carlo metody**



Vzorkovací metody

Vzorkování je a mapování: $k \rightarrow [x_k, y_k]$

- vzorek je vybírán z dané 2D oblasti („doména“)
 - » obvykle čtverec, obdélník nebo kruh
- vzorkování ve vyšších dimezních (třeba i $D > 8$)

Požadované **vlastnosti** vzorkování

- rovnoměrná pravděpodobnost v doméně (uniformita)
- větší pravidelnost není žádoucí (interference)
- efektivní výpočet
- možnost determinismu (např. pro paralelismus)



Jak hodnotit rozložení bodů v rovině?

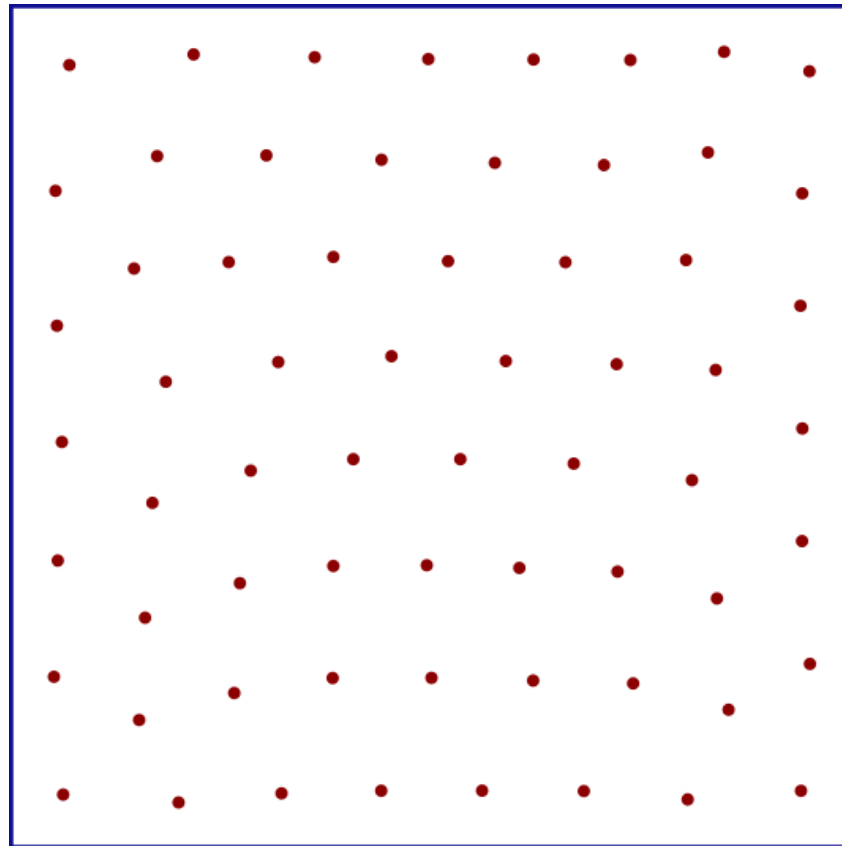
Rovnoměrnost pokrytí: **diskrepance**

Míra nahodilosti?

Estetika?

Lloydův algoritmus

„Centroidal Voronoi“
skalární kvantizace
1982



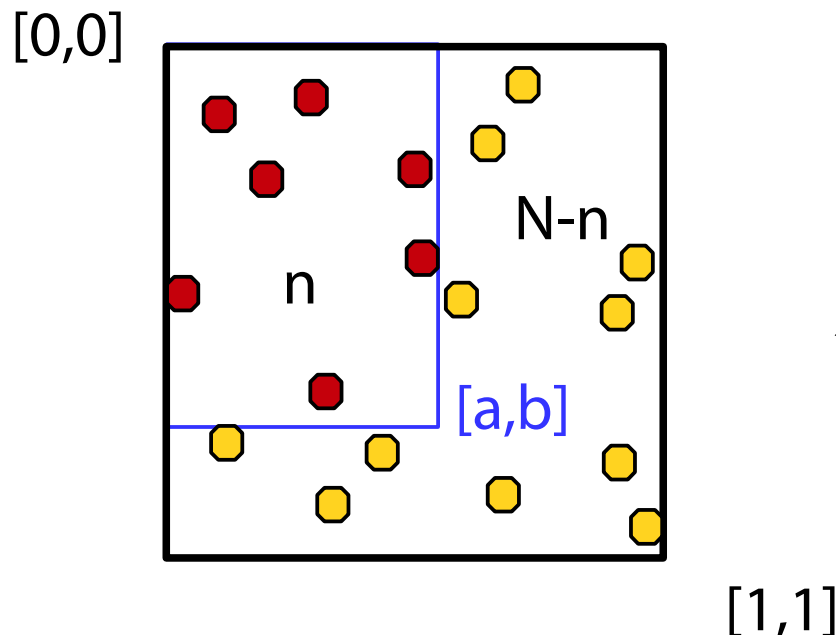


Diskrepance

Míra rovnoměrnosti pokrytí domény sadou vzorků

Monte-Carlo integrace

- **Zaremba 1968** zavádí pojem diskrepance (ukotvené levé horní rohy obdélníků)



$$d(a, b) = \left| ab - \frac{n}{N} \right|$$

$$D_\infty = \max_{a, b \in [0, 1]} d(a, b)$$



Jiné formy diskrepance

Střední kvadratická hodnota místo maxima

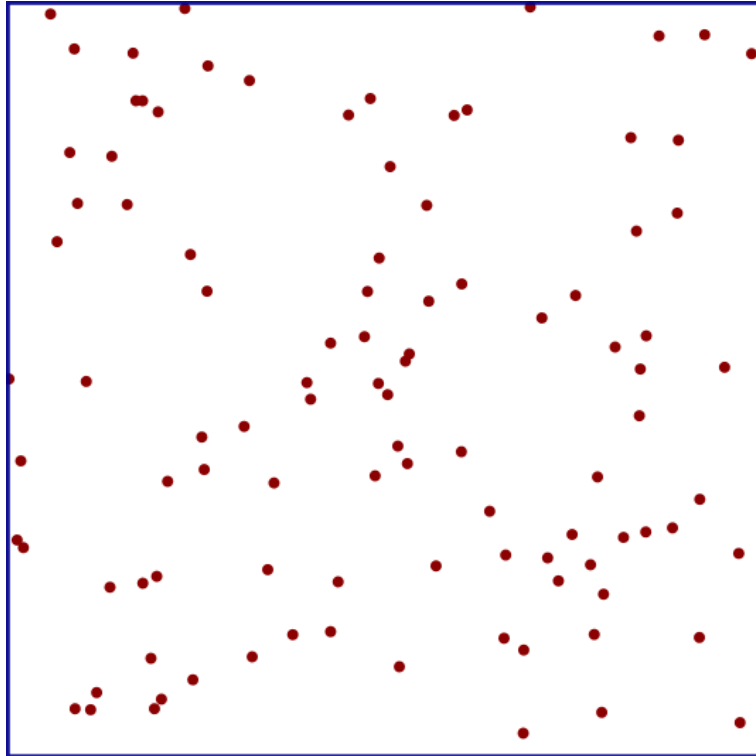
$$D_2 = \iint d(a, b)^2 da db$$

Stroud 1971 navrhuje počítat přes všechny obdélníky

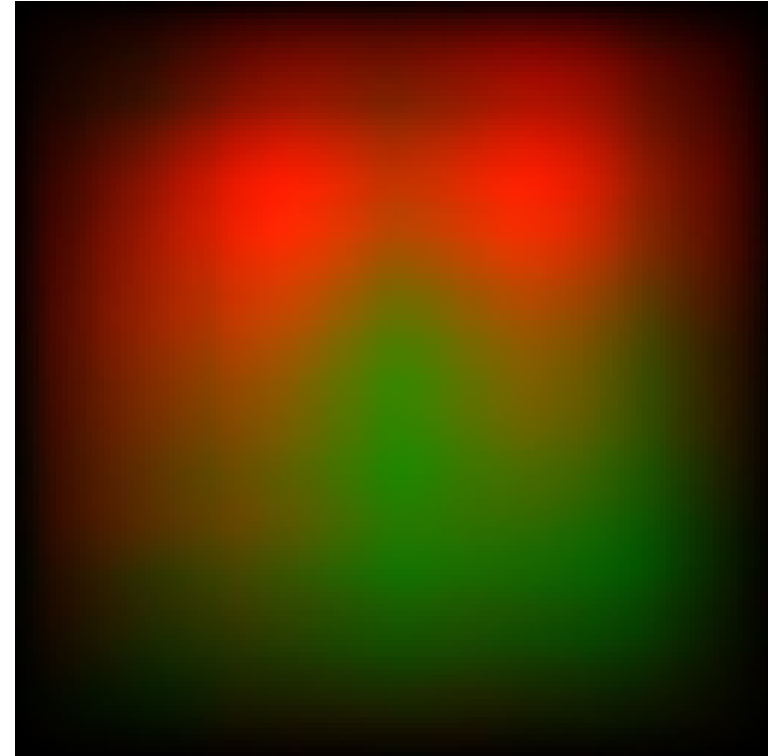
$$d(a, b, c, d) = \left| (a-c)(b-d) - \frac{n}{N} \right|$$



Visualizace diskrepance



random



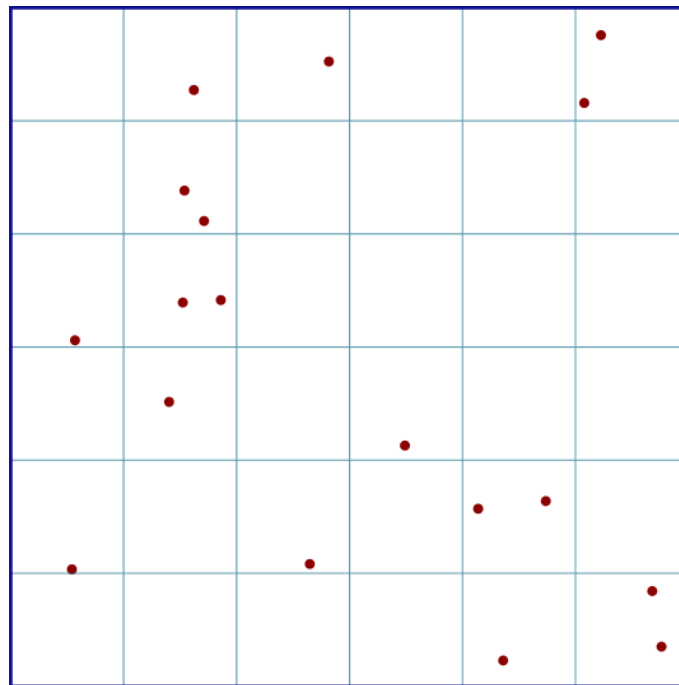
Dr-Cr

Shluky!



Jsou přirozené?

- „zákon řídkých jevů“ („Law of Rare Events“)
- Poissonovo rozdělení s malou hodnotou μ



$$\mu = 0.5$$

$$c_0 = 23$$

$$c_1 = 8$$

$$c_2 = 5$$



Spektrální charakteristiky

Hodnocení míry pravidelnosti

- přítomnost nežádoucích vzorů
- výskyt shluků

Spektrální analýza se objevuje při hodnocení kvality pŕltónování v tiskařství

- již Allebach 1977
- detailní použití: Ulichney, Digital Halftoning, 1987

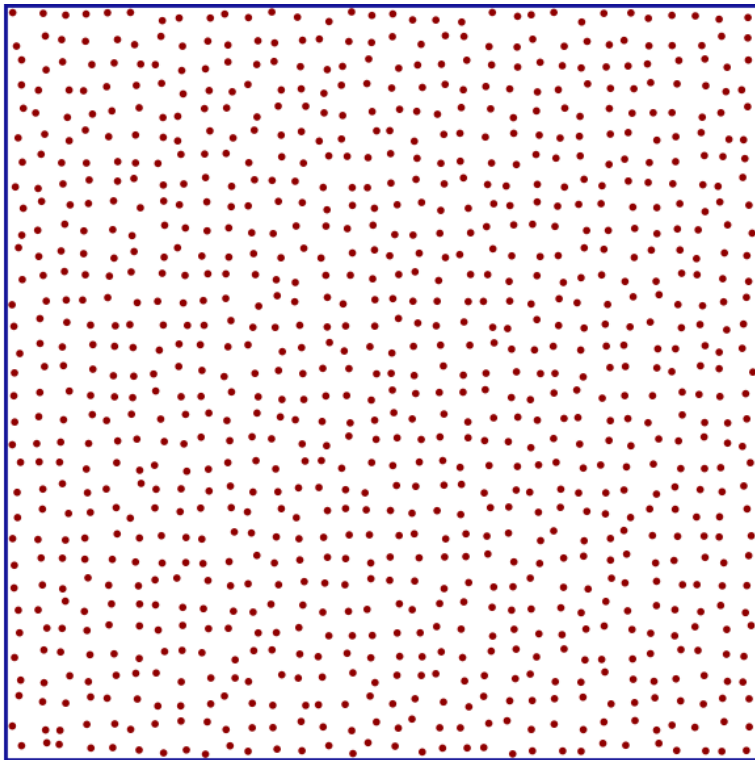
Frekvenční spektrum – **Fourierova transformace**

- **periodogram** – již Schuster 1898
- průměrování periodogramů – Bartlett 1948

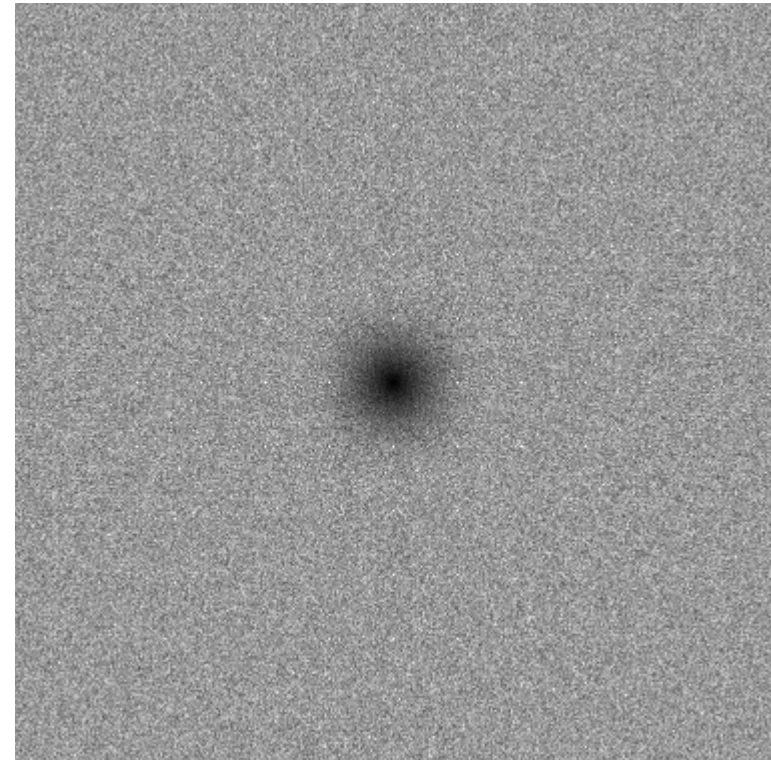


Příklady spektrální analýzy

Fourierova transformace



semi-jittering

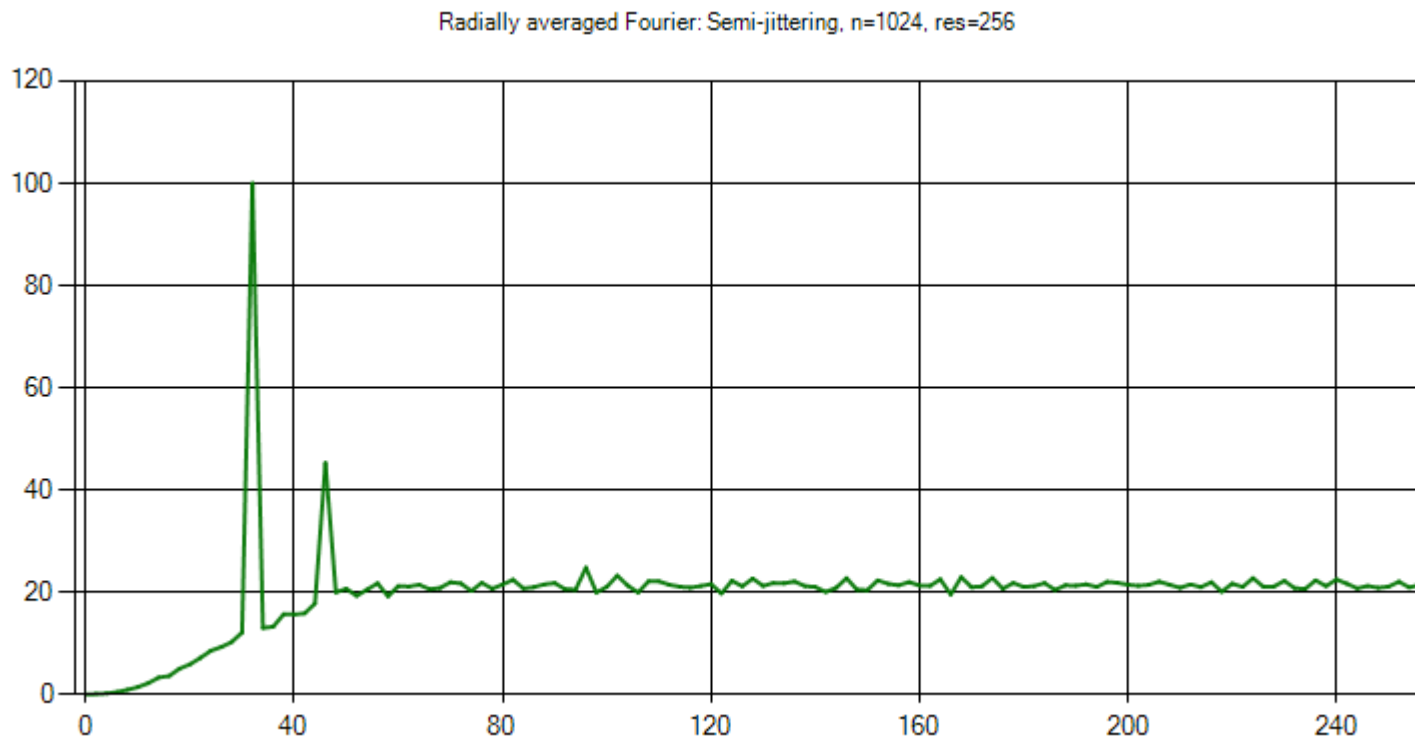




Příklady spektrální analýzy

Radiálně průměrované spektrum

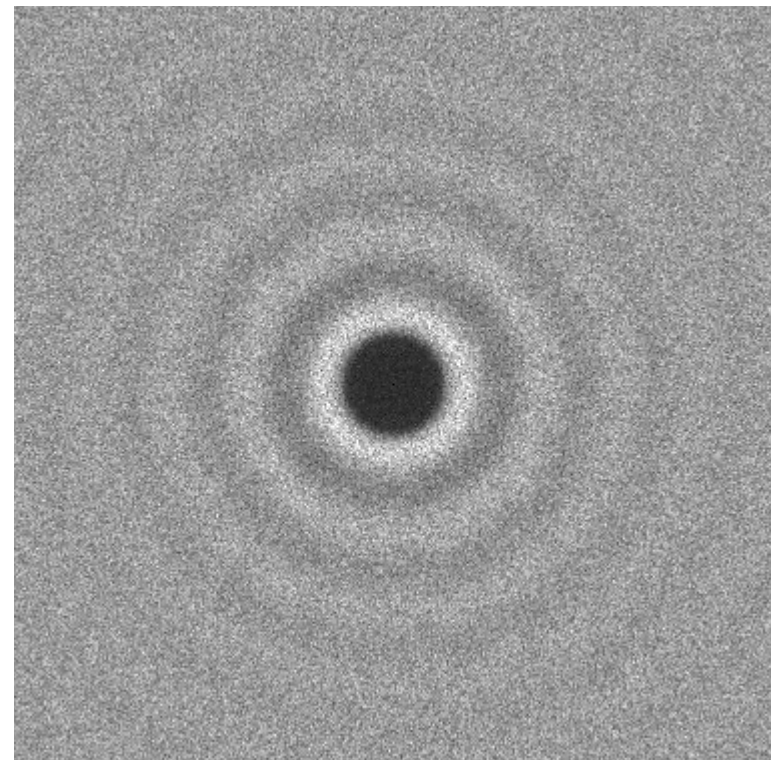
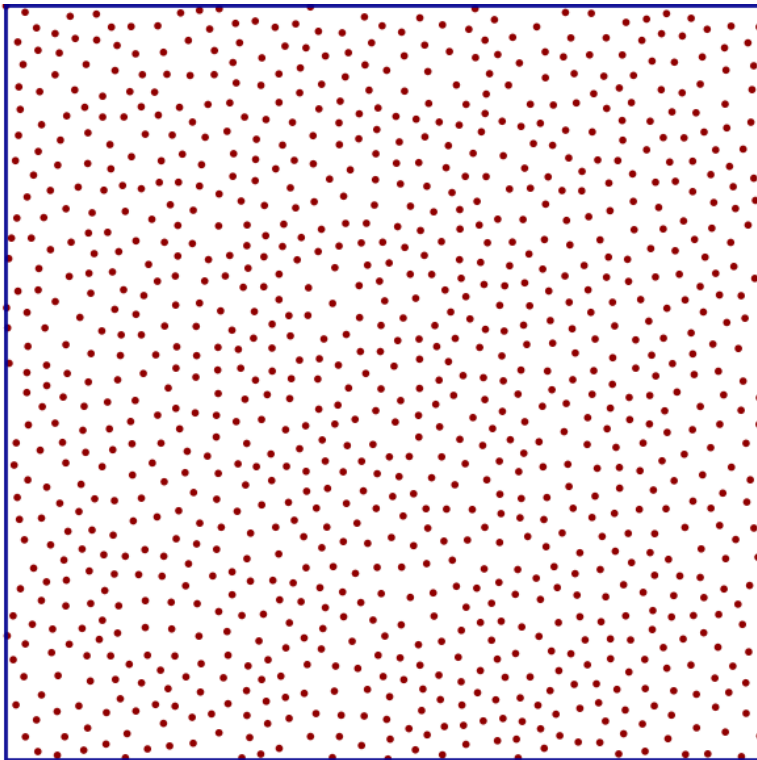
- hodnocení radiální symetrie
- redukce nízkých frekvencí (chceme „modrý šum“)





„Pěkné“ spektrum

Vlastnosti „modrého šumu“ (Ulichney 1987)



Mitchell

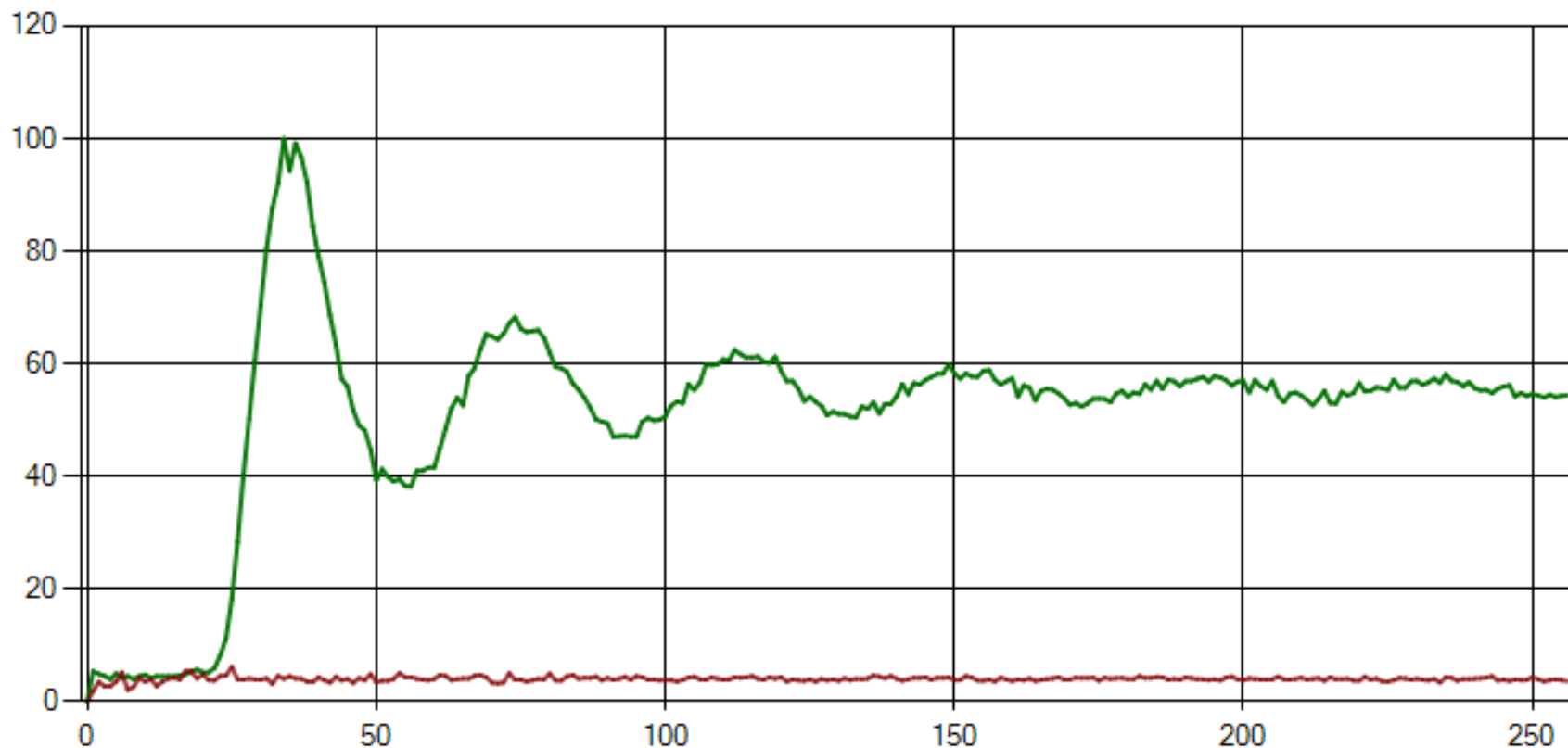
„Pěkné“ spektrum



Radiálně průměrované spektrum

- červený graf – radiální rozptyl (izotropie spektra)

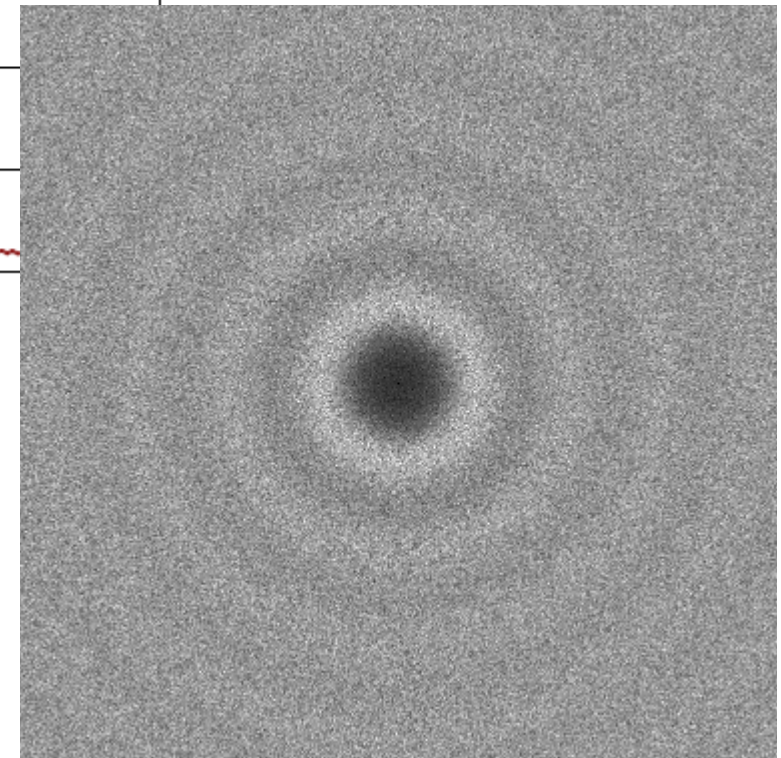
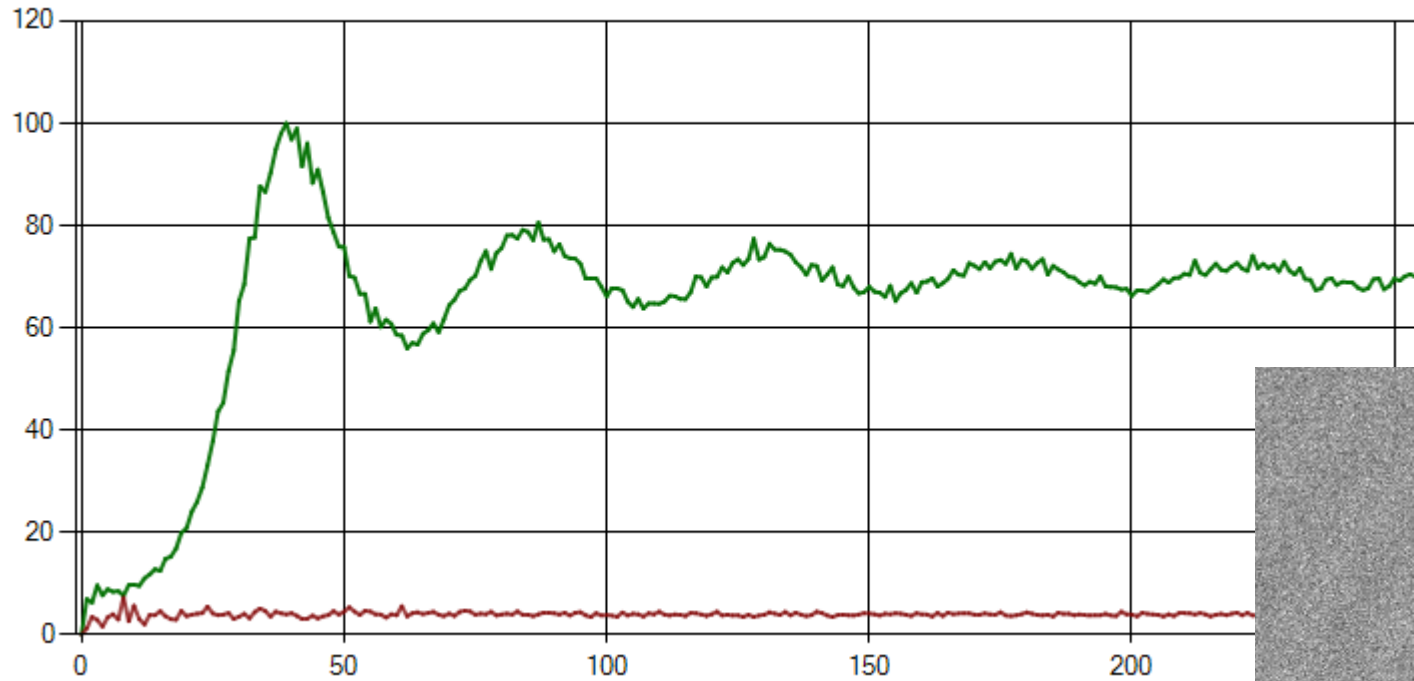
Radially averaged Fourier: Mitchell, inst=10, n=1024, res=256



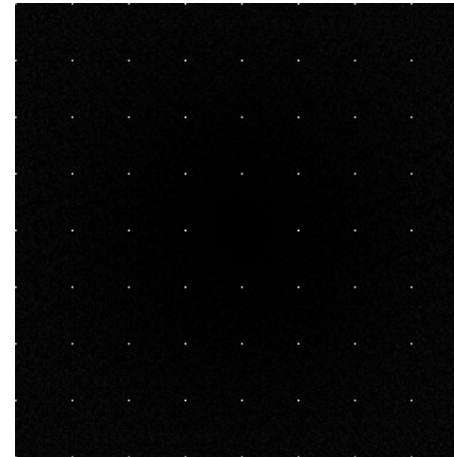
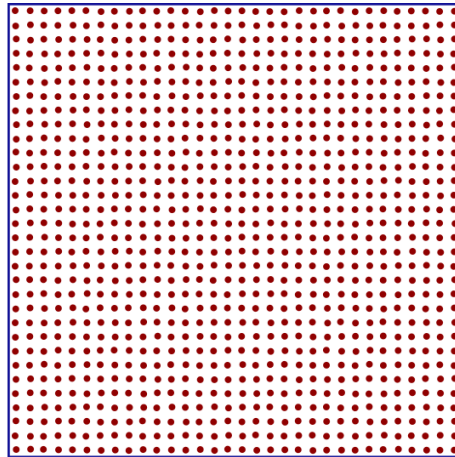


Jiné „pěkné“ spektrum

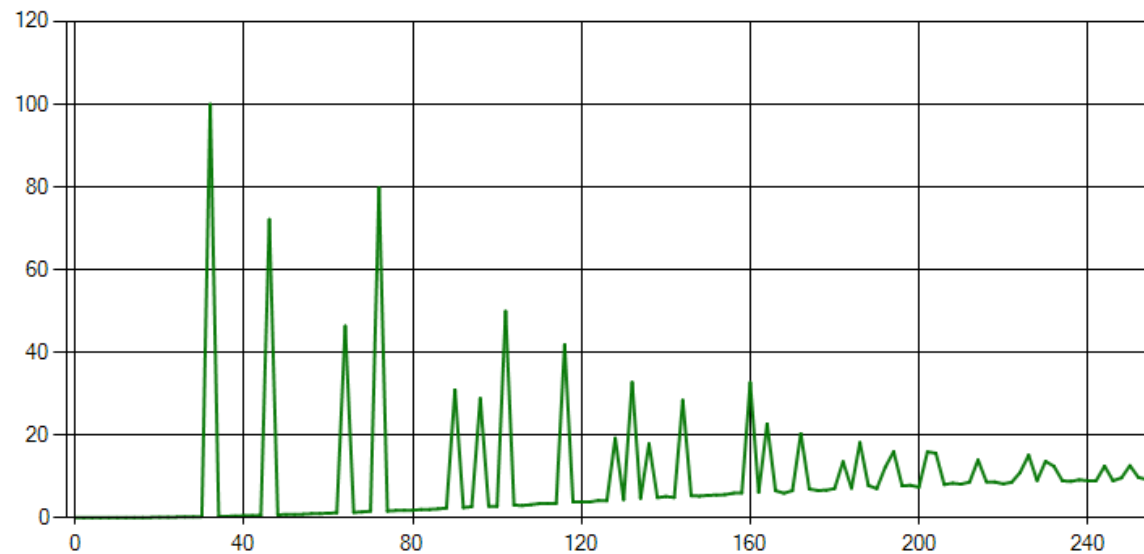
Radially averaged Fourier: Poisson-disk, inst=10, n=1024, res=256



Příliš velká pravidelnost

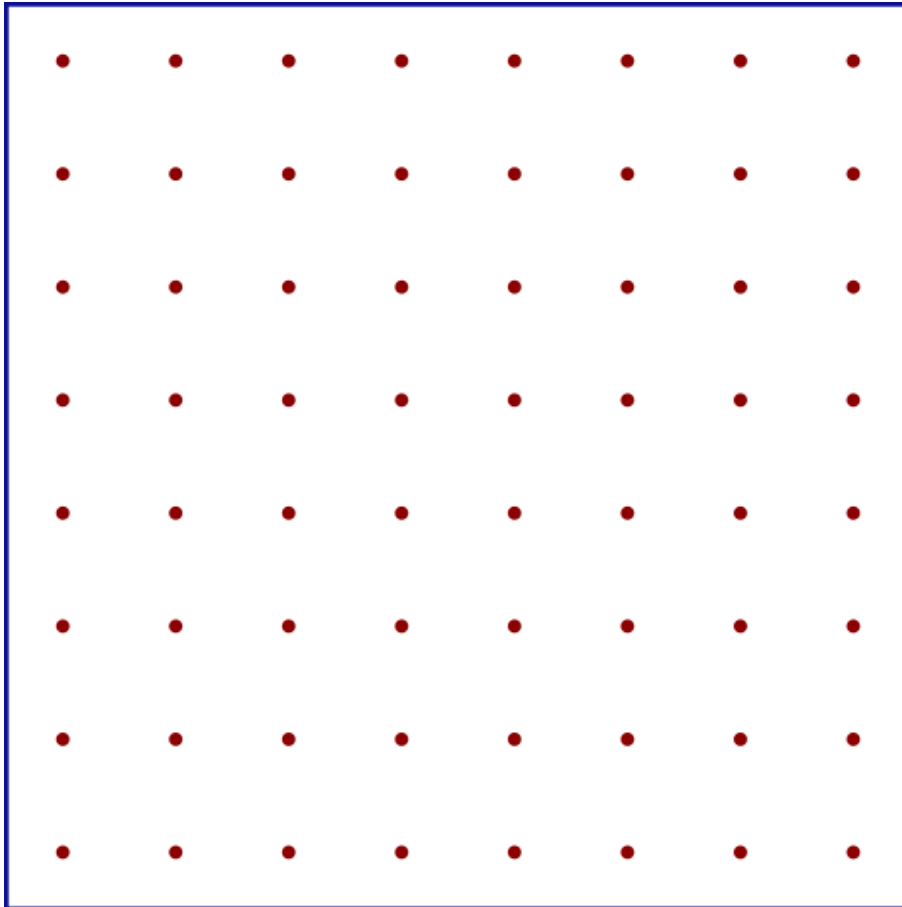


Radially averaged Fourier: Semi-jittering, n=1024, res=256





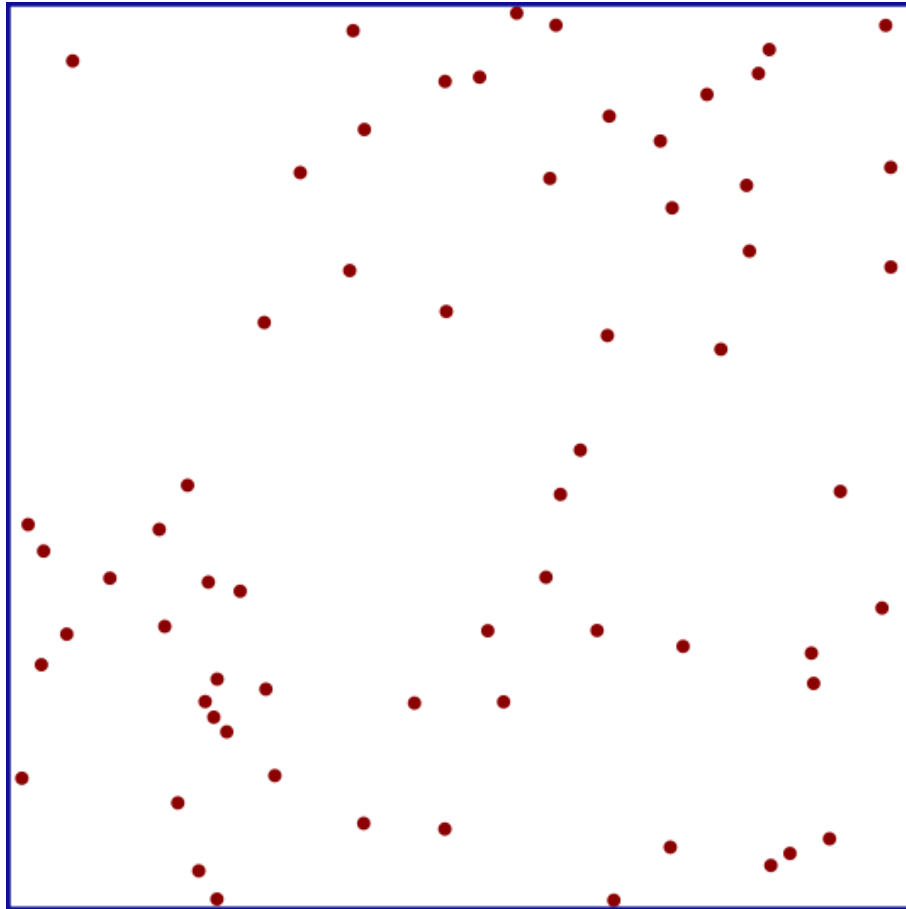
Pravidelný rastr



- + diskrepance
- + jednoduchost
- pravidelnost
- interference
- nepokrývá doménu



Náhodné vzorkování (Poisson)

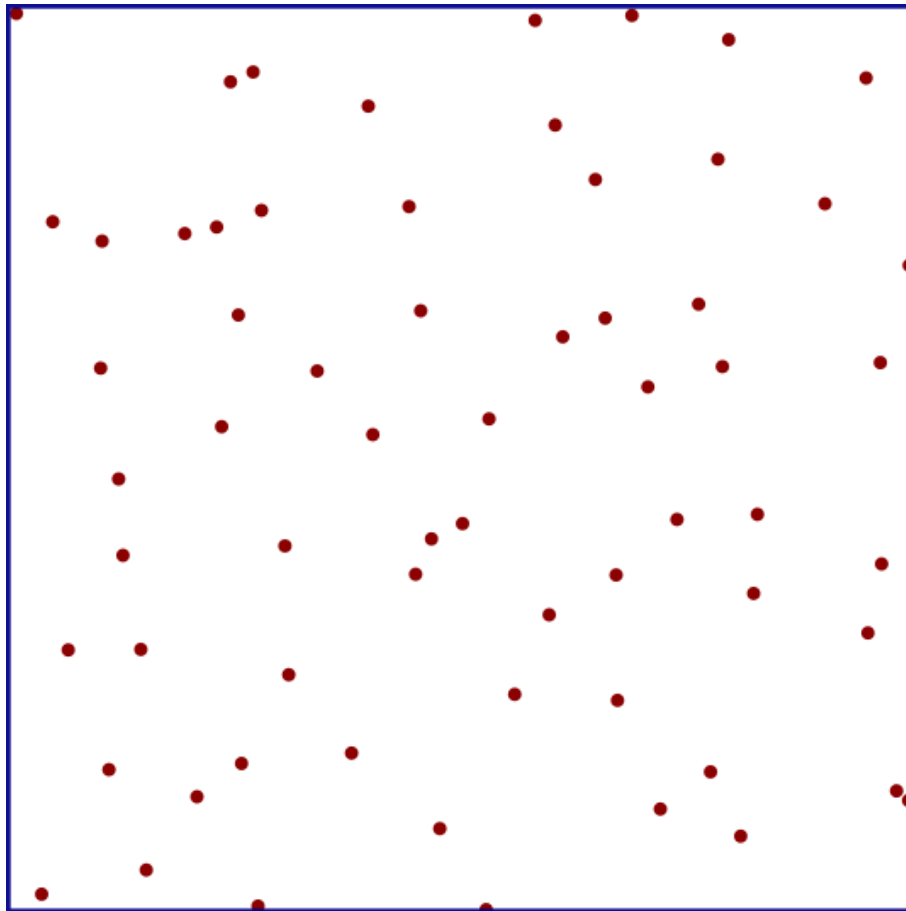


- + nepravidelnost
- + jednoduchost
- + lze řídit hustotou
- + pokrývá doménu
- diskrepance (shluky)

Nezávislé realizace
vhodné náhodné veličiny



Jittering (roztřesení)

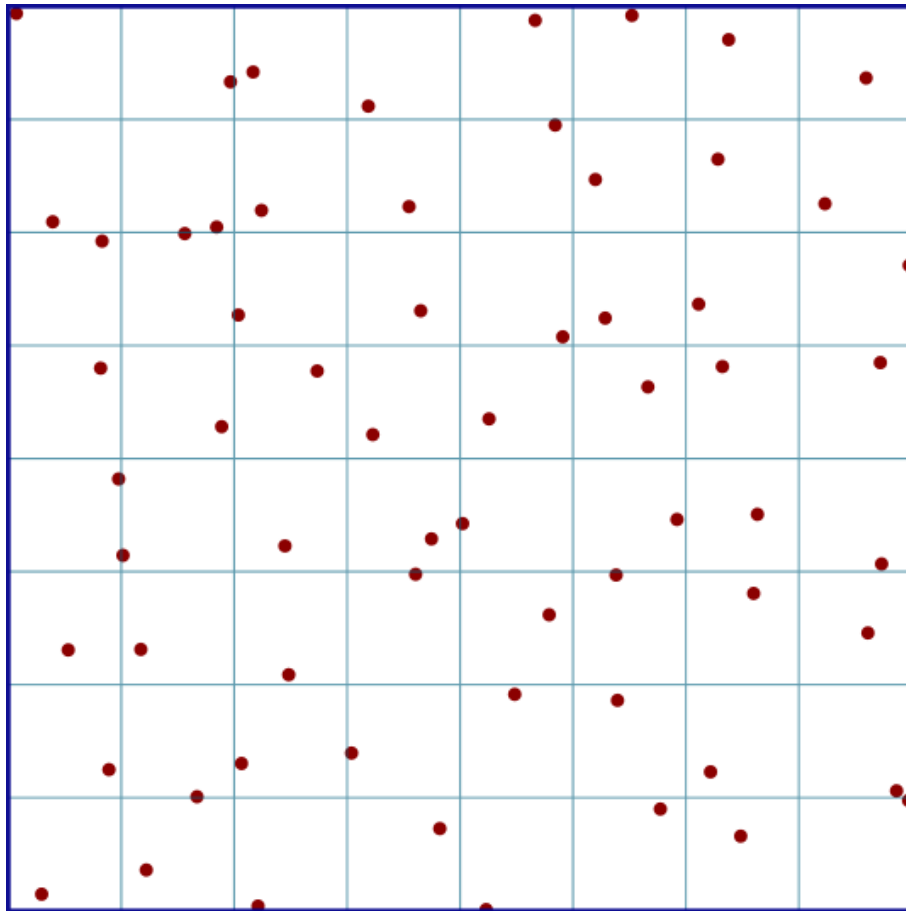


- + nepravidelnost
- + jednoduchost
- + diskrepance
- + pokrývá doménu
- nelze snadno řídit hustotou

„Stratified sampling“
ve statistice...

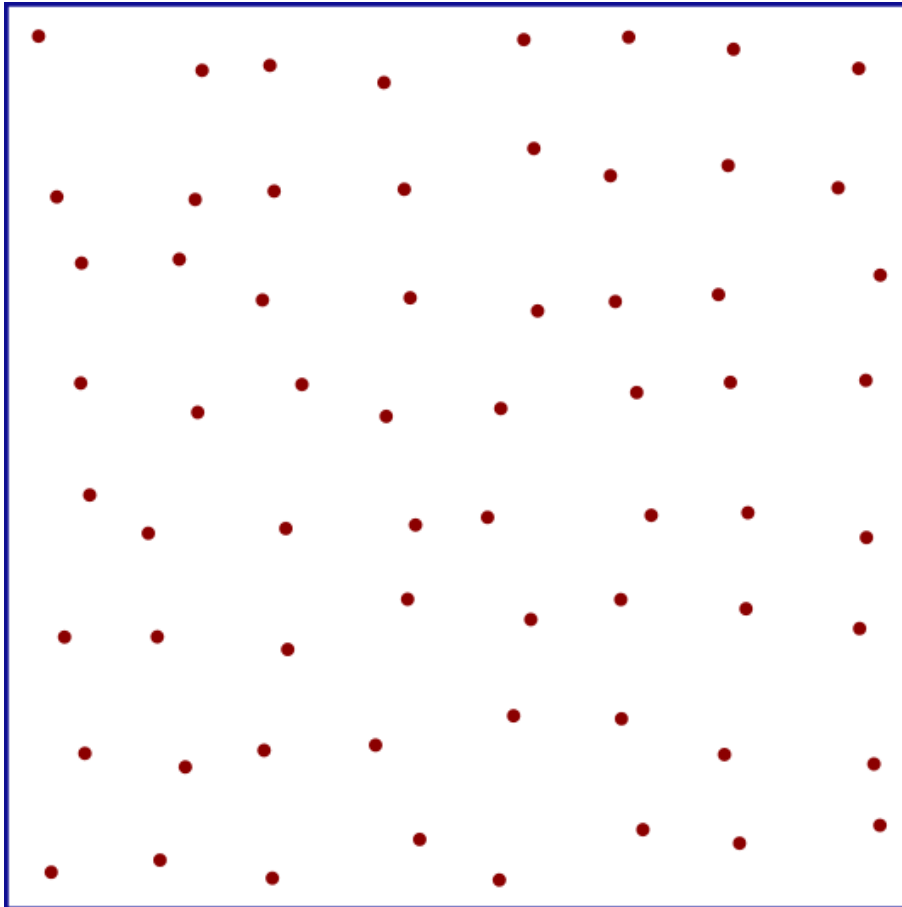


Jittering (roztřesení)



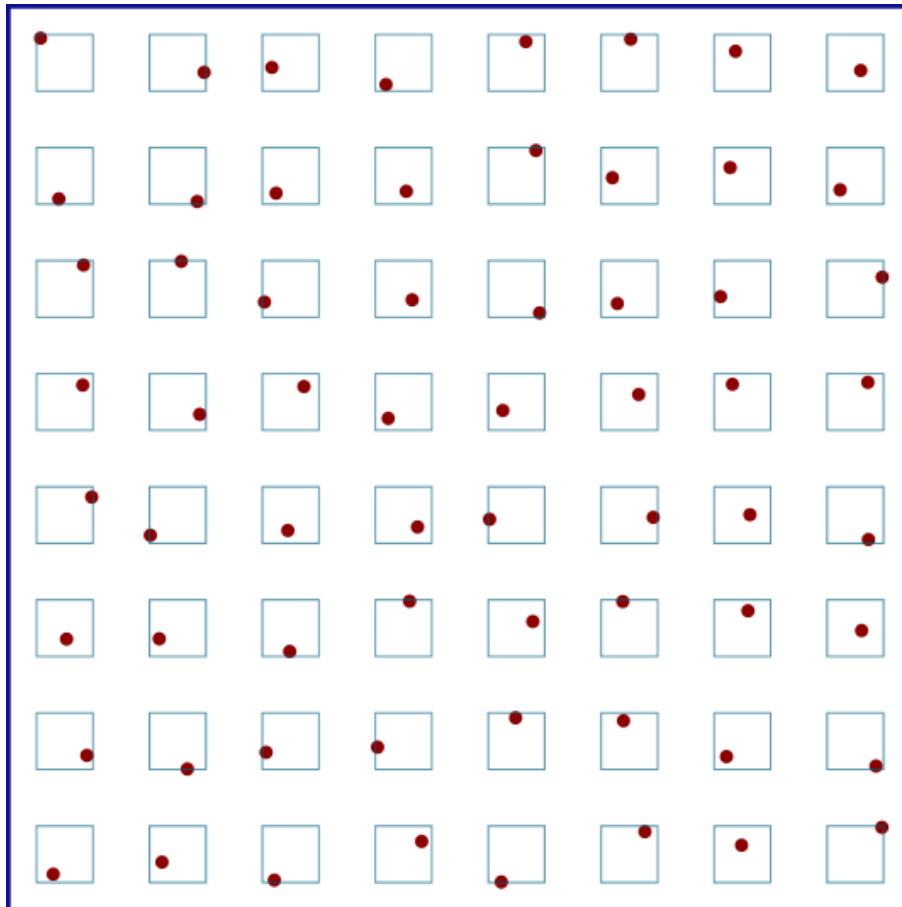
Subintervaly mohou být libovolné (stejný obsah)

Semi-jittering



- + jednoduchost
- + diskrepance
- částečná pravidelnost
- nepokrývá doménu
- nelze snadno řídit hustotou

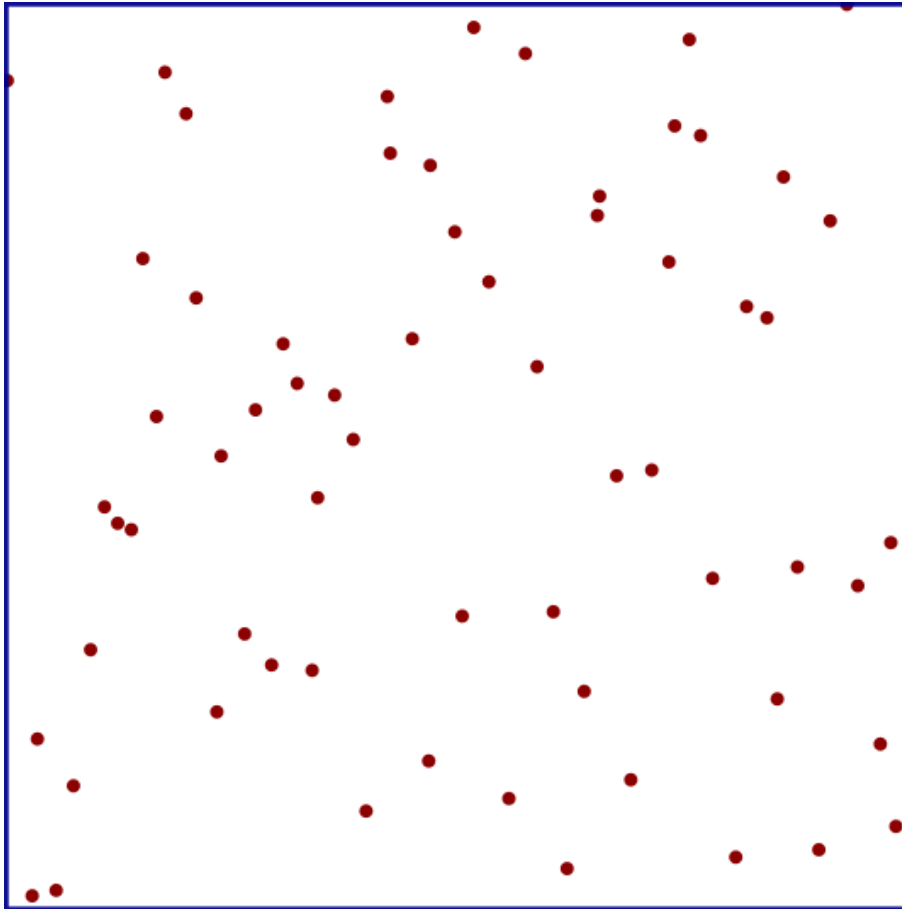
Semi-jittering



Amplitudy roztřesení
mohou být i jiné



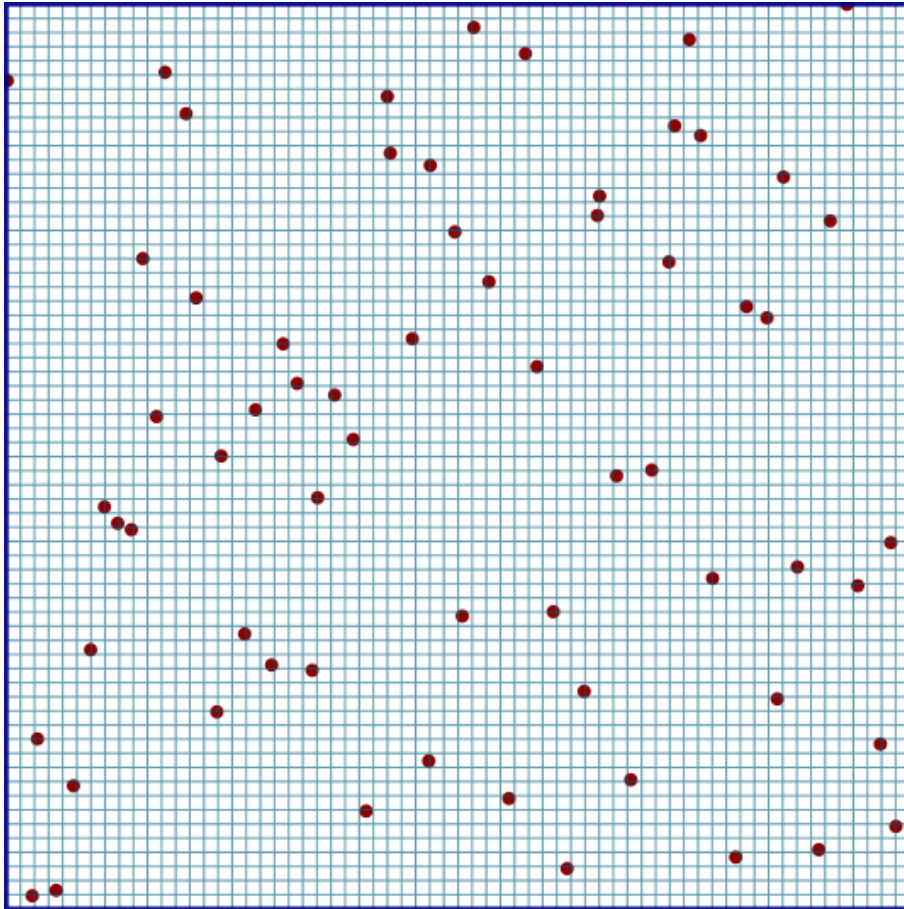
N-věží („N rooks“)



- + nepravidelnost
- + pokrývá doménu
- trochu horší diskrepance (shluky)

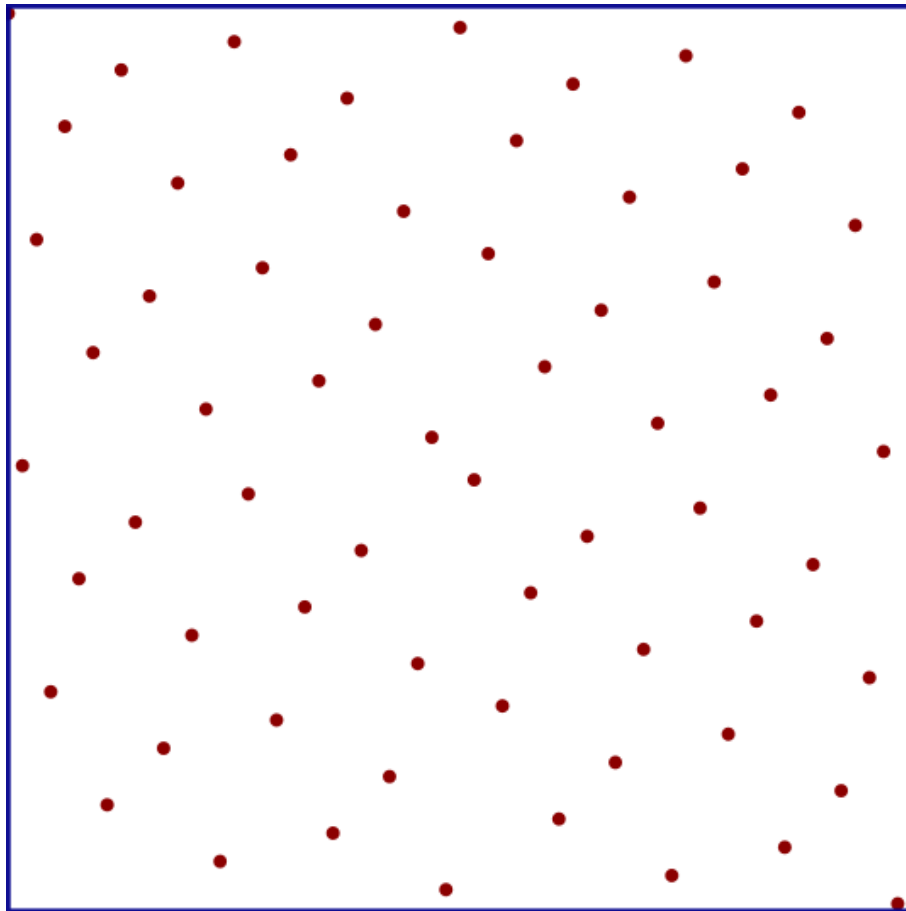


N-věží („N rooks“)



V každém řádku i sloupci
právě jeden vzorek...

Hammersley



- + výborná diskrepance
- + deterministické
- + velmi rychlý výpočet
- nelze zahušťovat
- špatné spektrum

Na podobném principu je založena i Haltonova sekvence...



Deterministické sekvence

Na podobném principu jsou založeny

- Halton, Hammersley, Larcher-Pillichshammer

Pro prvočíslo b necht' je kladné přirozené číslo n vyjádřeno pomocí b -ární reprezentace

$$n = \sum_{k=0}^{L-1} d_k(n) b^k$$

Pak je definováno číslo v intervalu $[0,1)$

$$g_b(n) = \sum_{k=0}^{L-1} d_k(n) b^{-k-1}$$



Halton, Hammersley

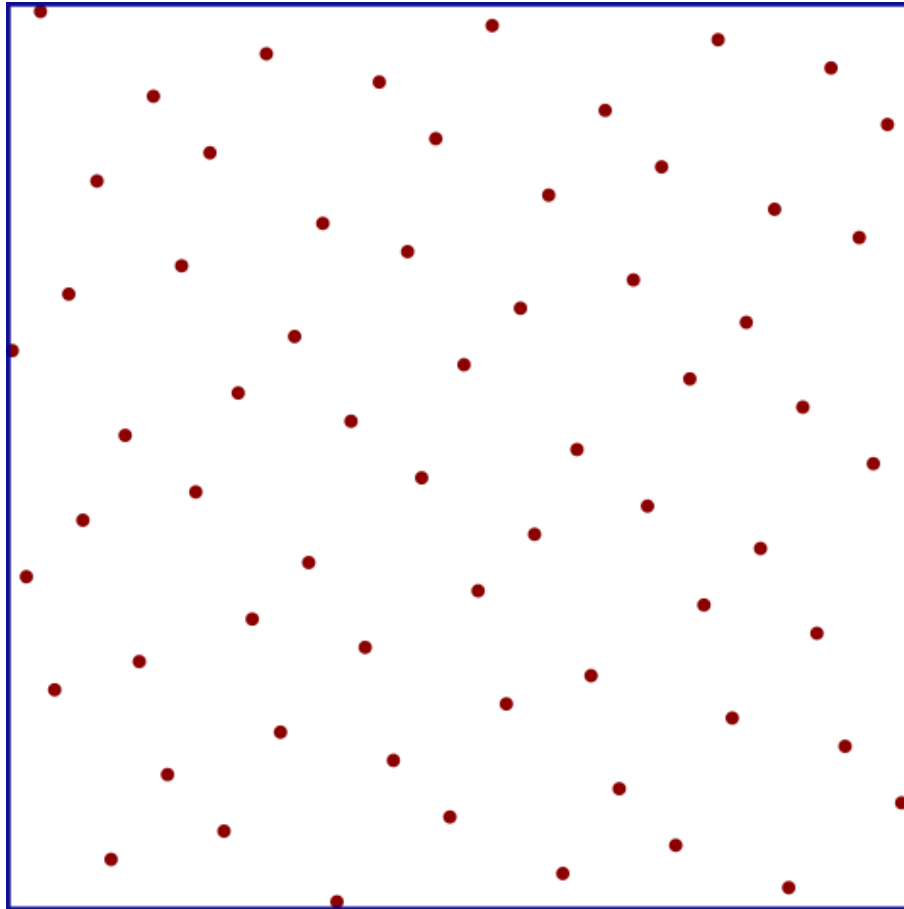
Slavná Haltonova sekvence (např. $b_1=2$, $b_2=3$)

$$x(n) = \left[g_{b_1}(n), g_{b_2}(n) \right]$$

Hammersley sekvence (např. $b=2$)

$$x(n) = \left[\frac{n}{N}, g_b(n) \right]$$

Larcher-Pillichshammer

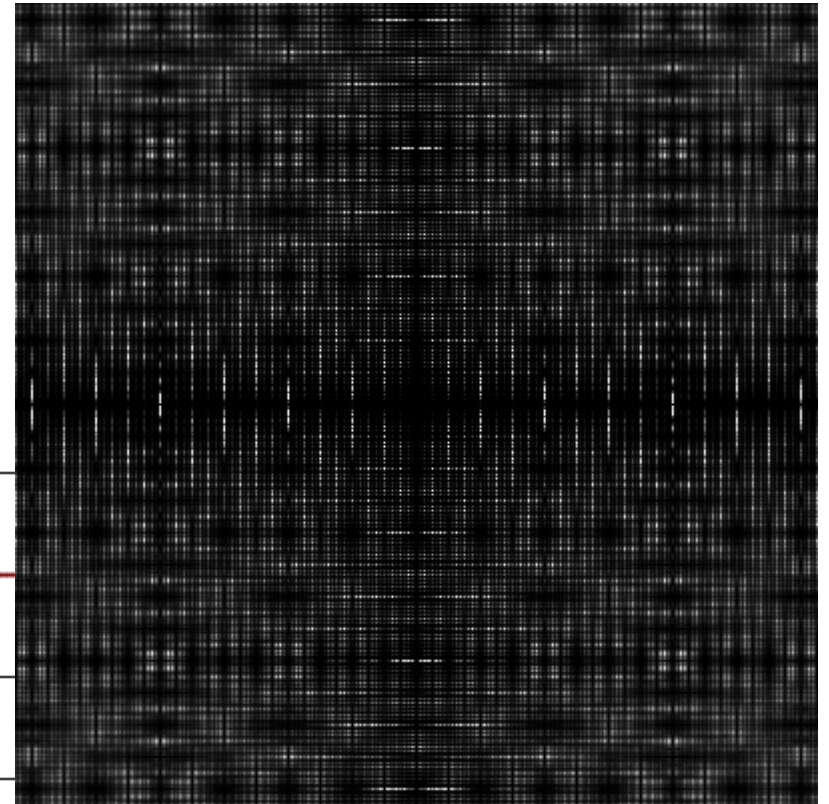
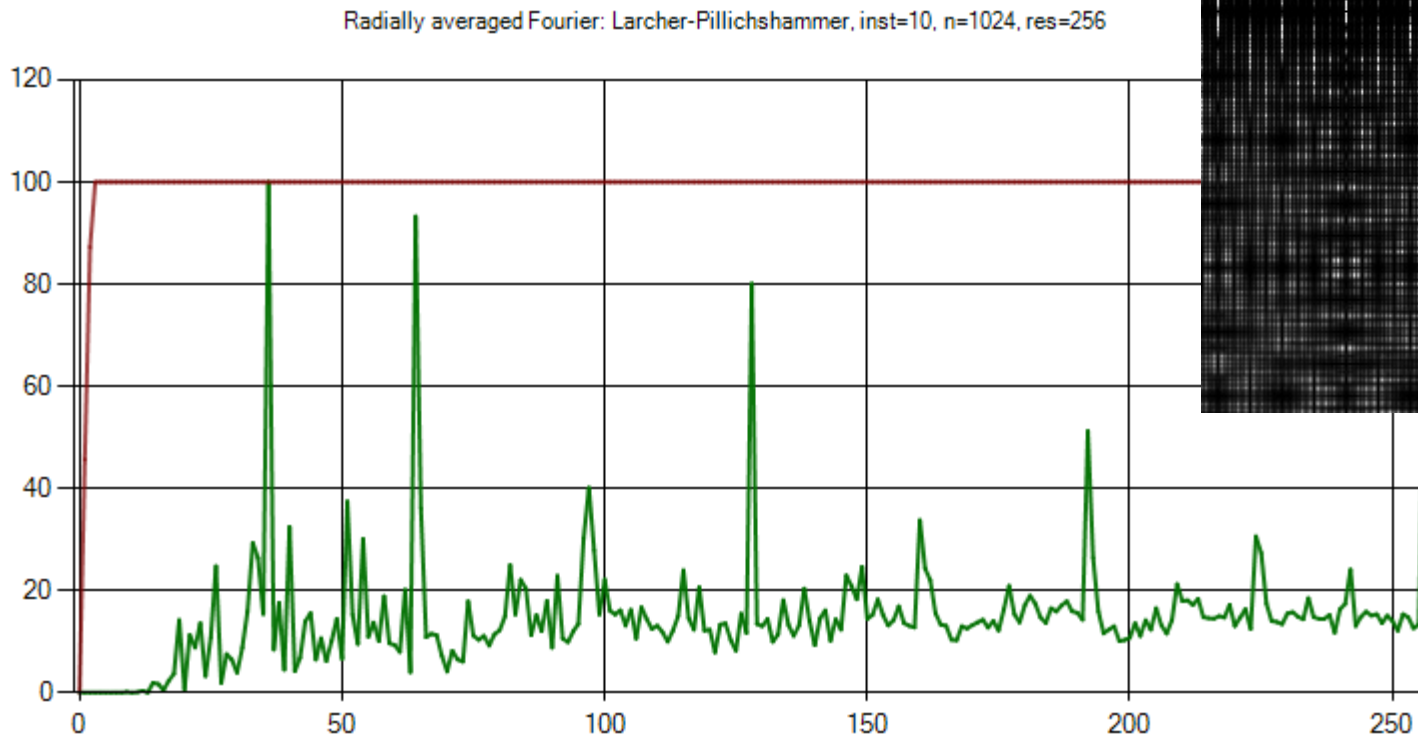


- + výborná diskrepance
- + deterministické
- + velmi rychlý výpočet
- + lze randomizovat
- nelze zahušťovat
- špatné spektrum

Jako Haltonova sekvence,
ale s operací XOR

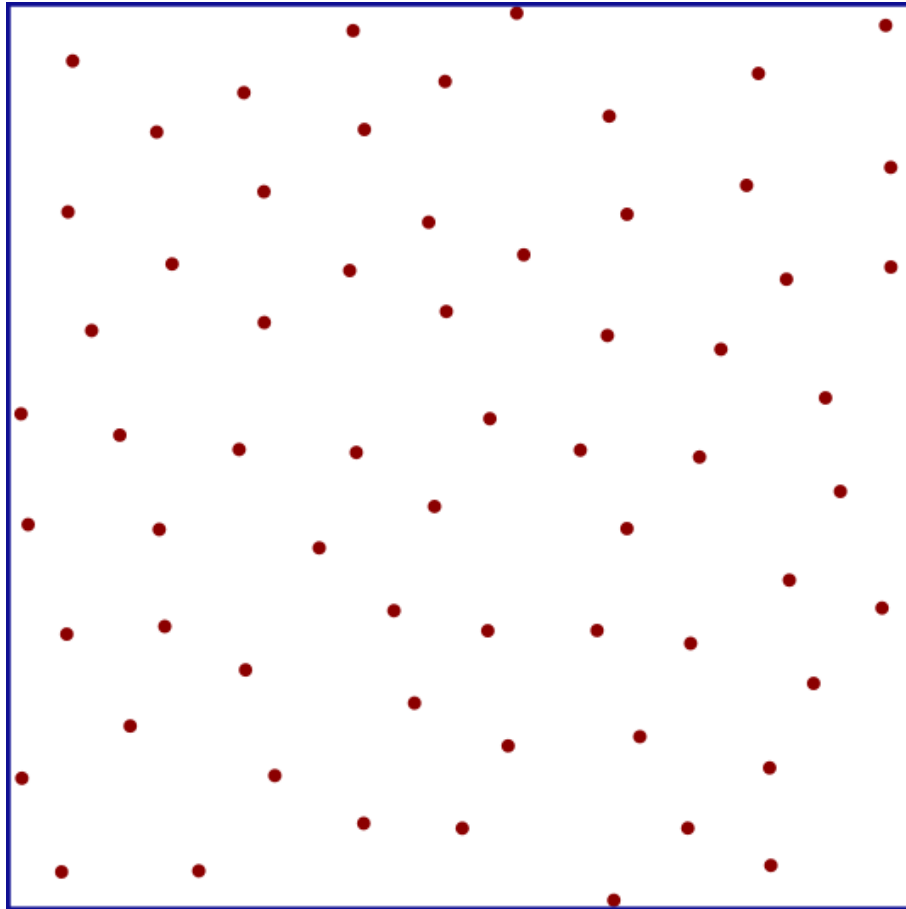


Pravidelnosti ve spektru





Poissonovo diskové vzorkování

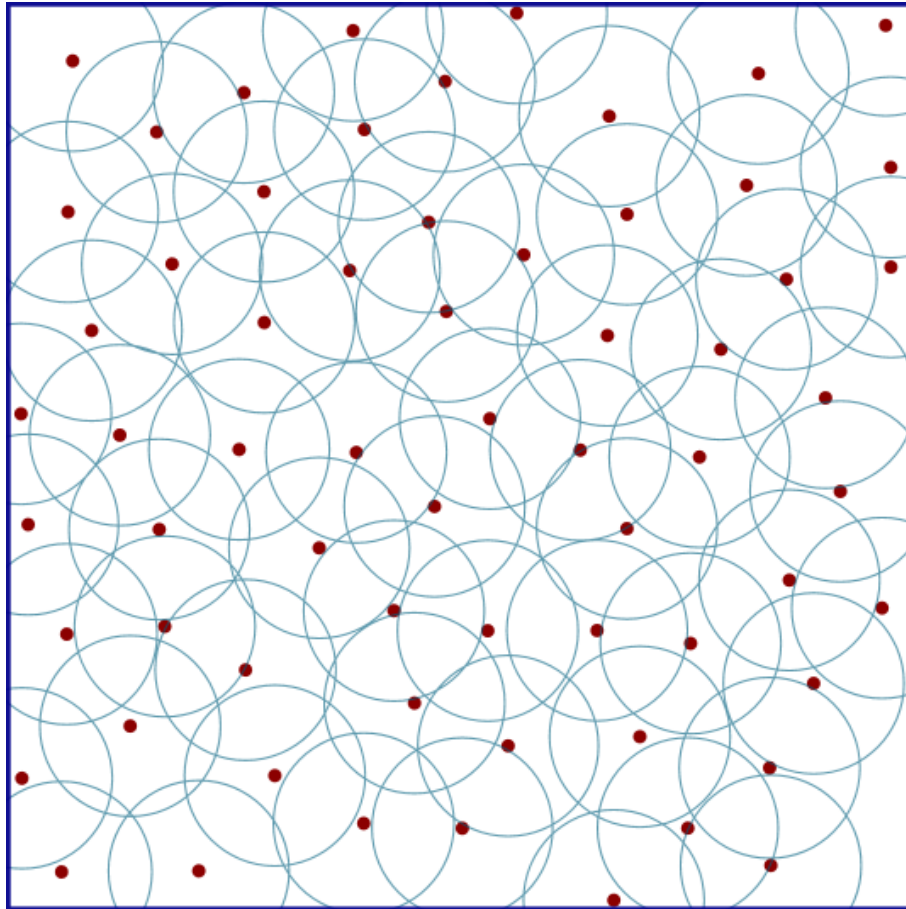


- + nepravidelnost
- + estetika
- + diskrepance
- + pokrytí domény
- + lze řídit hustotou
- pomalé
- obtížné nastavení D

Dva vzorky nesmějí být blíže než D



Poissonovo diskové vzorkování



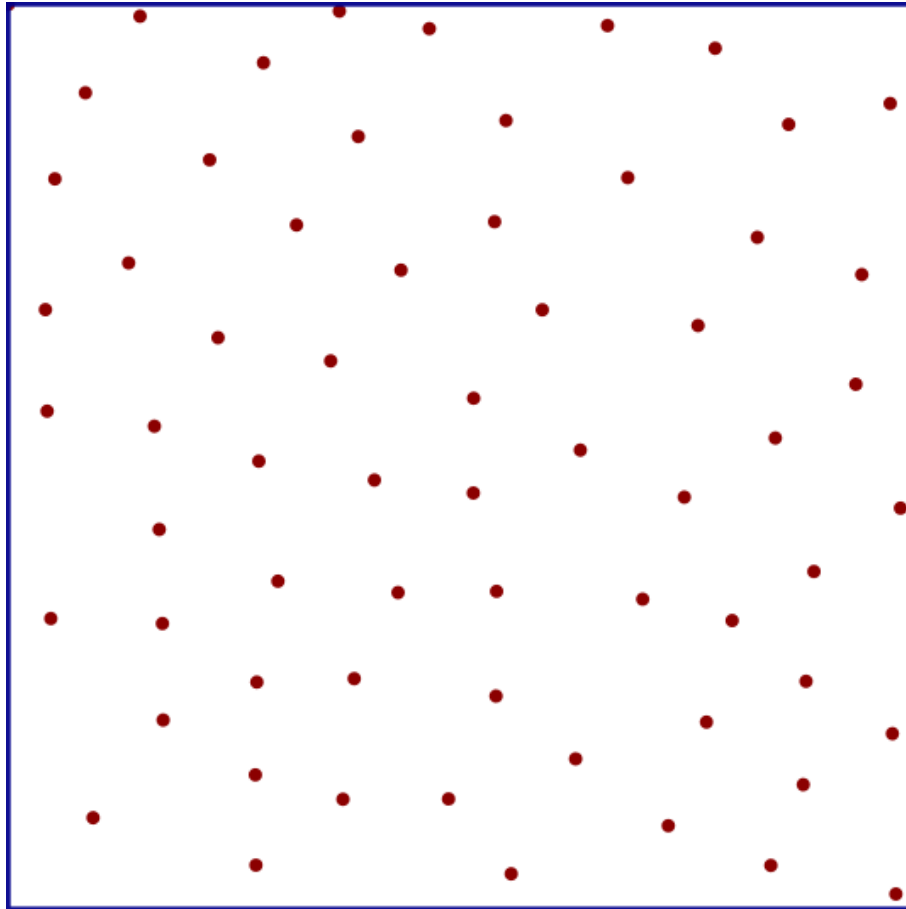
Algoritmus:

vrhání šipky s kontrolou vzdálenosti
(„dart-throwing with rejection“)

$$D = 0.1$$



Mitchellův algoritmus



- + jako Poisson-disk
- + inkrementální
- + nepotřebuje D
- velmi pomalý!

Algoritmus:

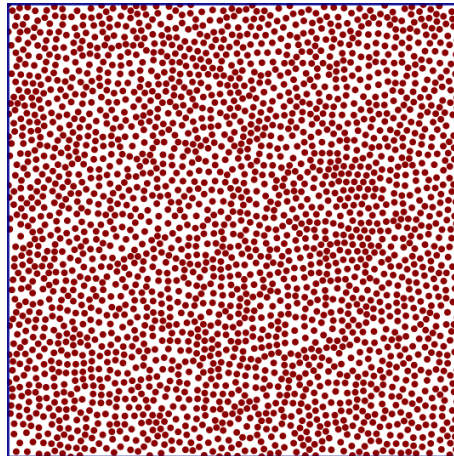
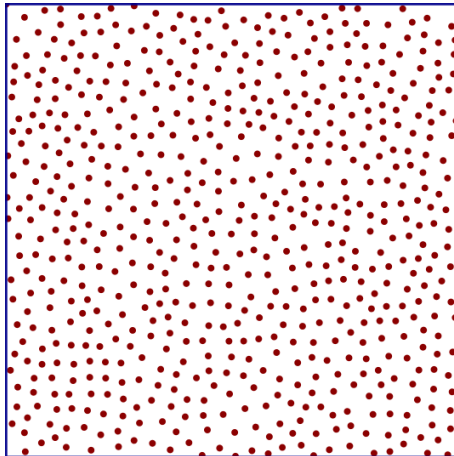
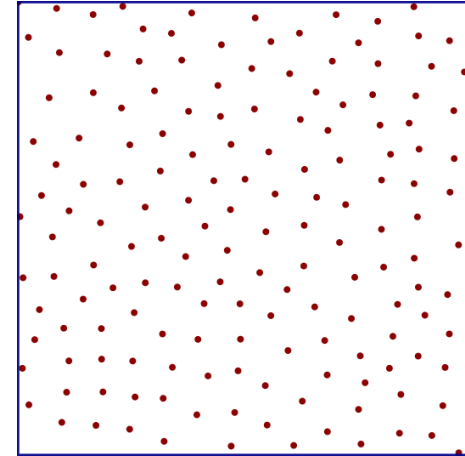
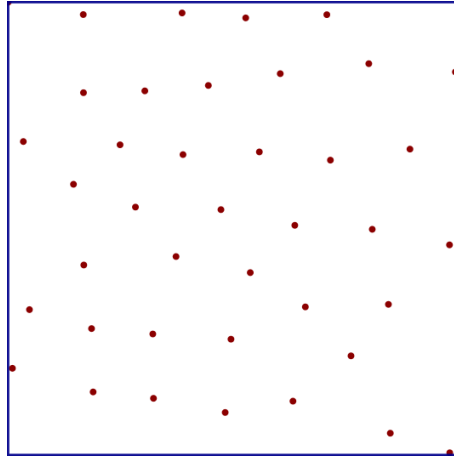
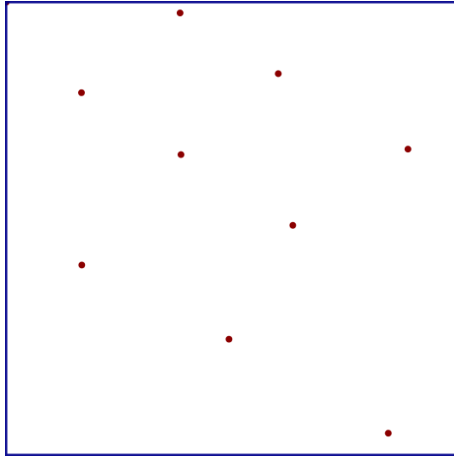
N -tý vzorek vybírám
z $N \cdot K$ kandidátů, přijmu
ten nejvzdálenější

$K > 5$

(větší K ... lepší kvalita)



Inkrementální ukázka



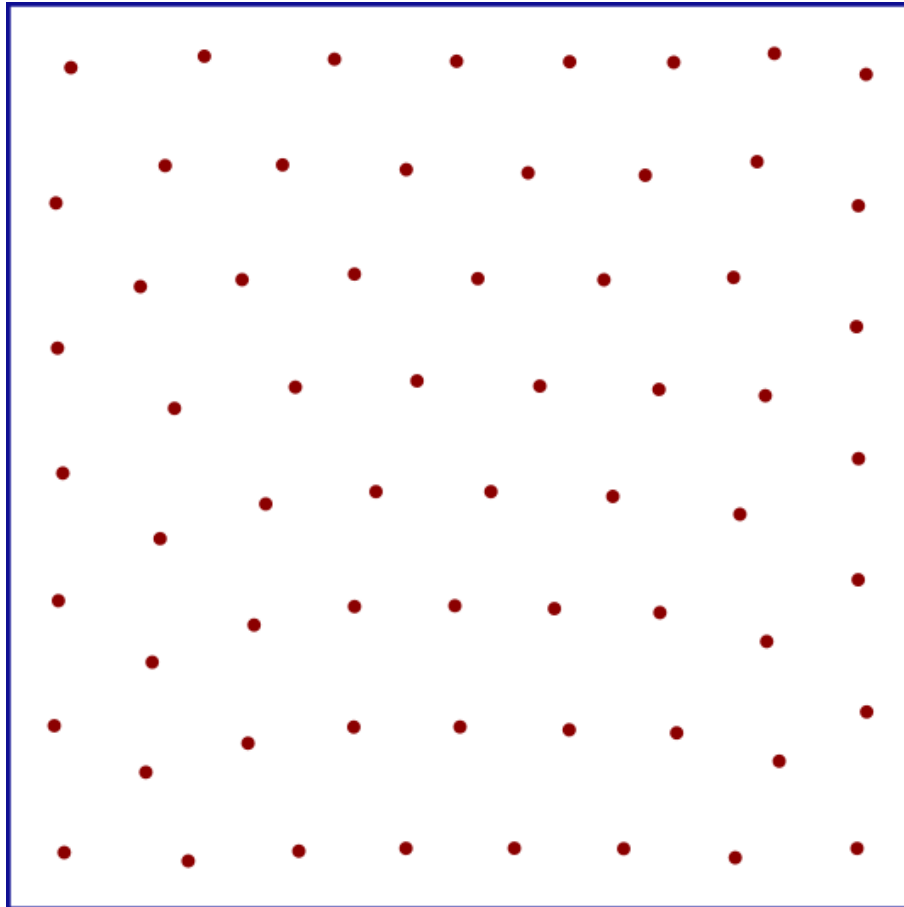
Počet vzorků:

10, 40, 160,
640, 2560

K = 10



Lloydův algoritmus



+ diskrepance

+ modrý šum

+ výborné pokrytí

- pomalý!

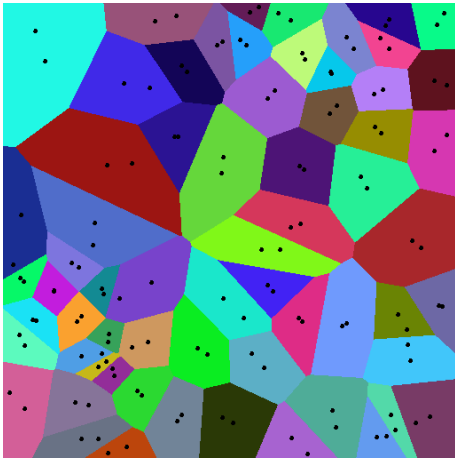
- pravidelnosti na konci
konvergence!

Algoritmus:

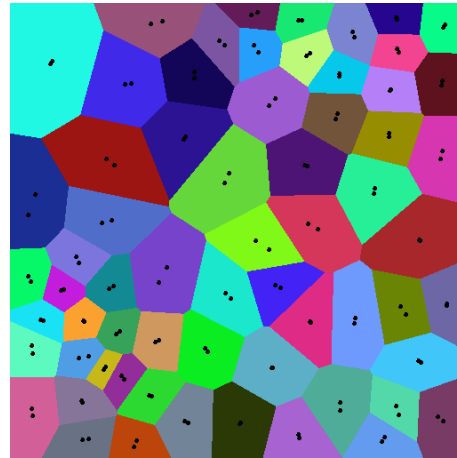
generátor každé Voronoi
buňky se posune do
těžiště své buňky + iterace



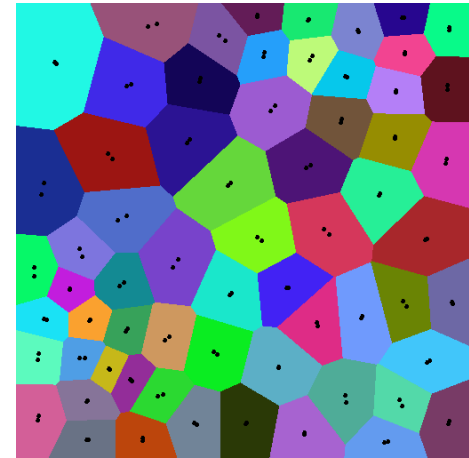
Lloyd – postup výpočtu



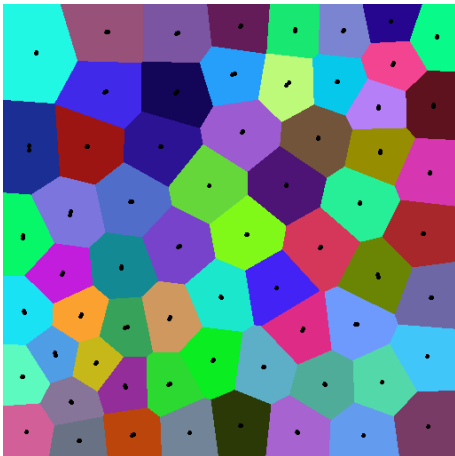
1



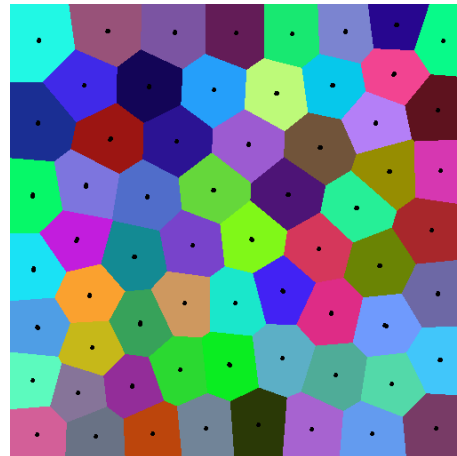
2



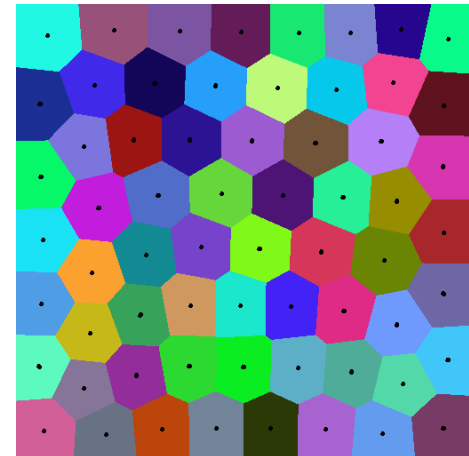
3



10



30

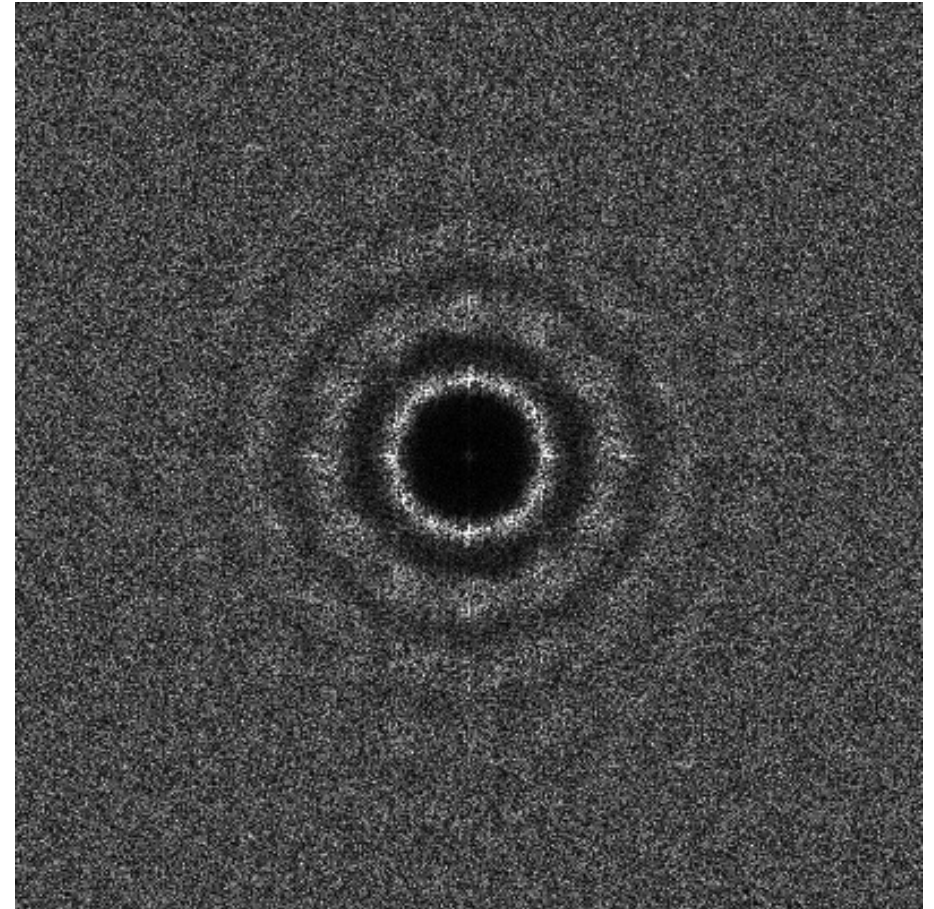
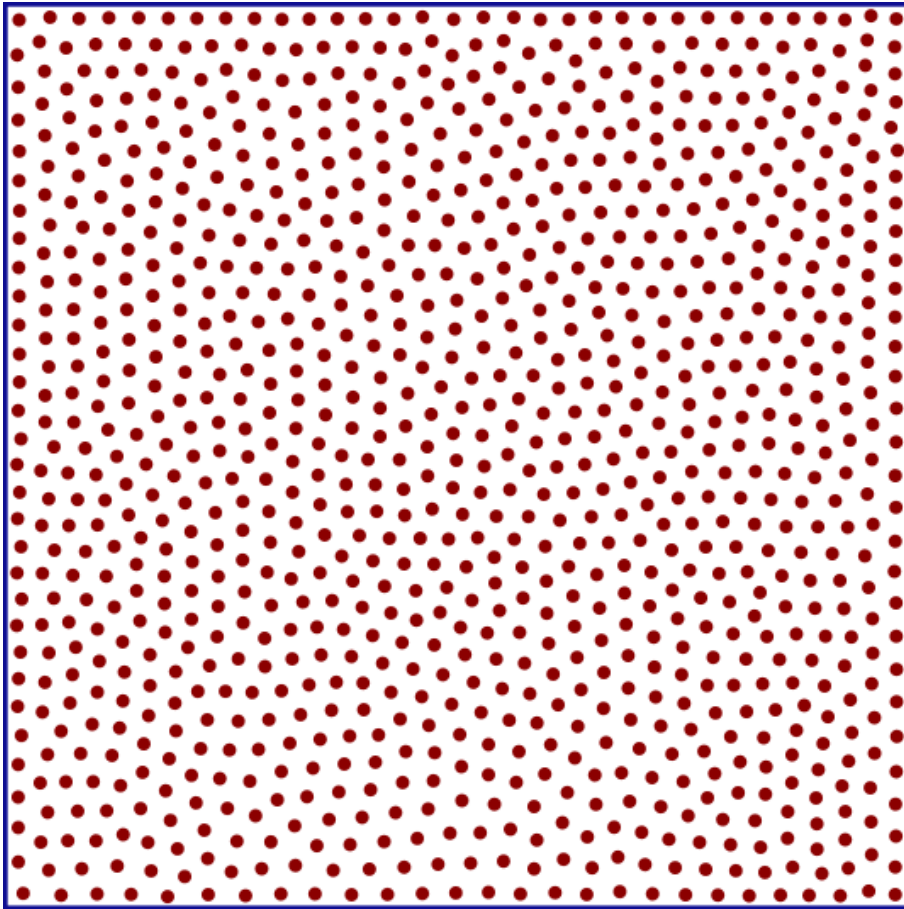


90



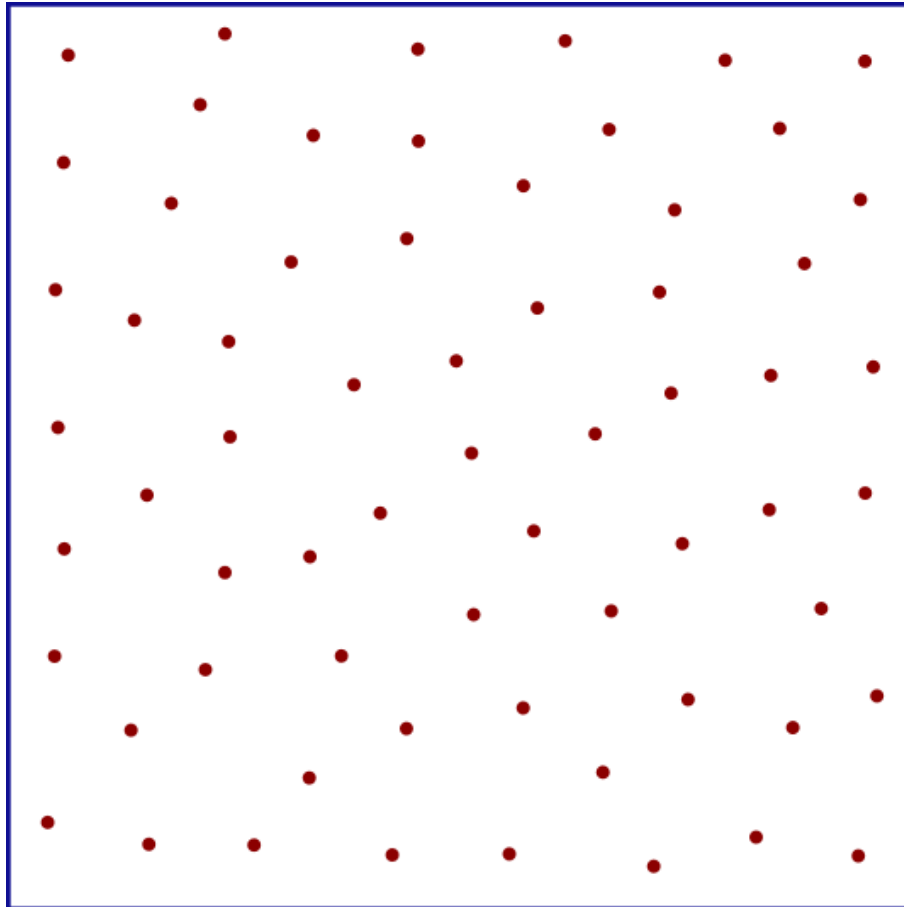
Pravidelnosti

Lloyd (Centroidal Voronoi), $N = 1024$, iterations = 100





Kapacitně omezené distribuce



- + diskrepance
- + modrý šum
- + výborné pokrytí
- + lze řídit distribucí
- pomalý (ale je známo množství urychlení)

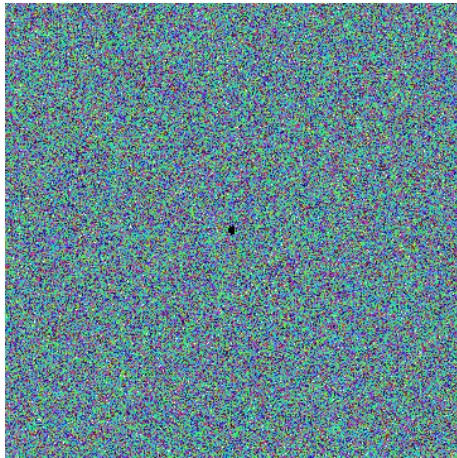
Vychází z Centr. Voronoi:
Aby nevznikaly pravidelnosti, zavádí se kapacitní omezení

CCPD

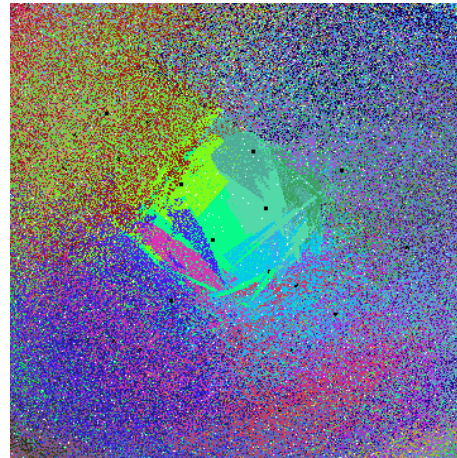
```
function CCPD( $N, K, pdf$ )      ▷ počet vzorků,  $K$ , hustota pravděp.  
     $Point[] S \leftarrow new Point[N]$       ▷ sada vzorků  
     $List<Point>[] P \leftarrow new List<Point>[N]$   ▷ a jejich body  
    for  $i \leftarrow 1, N$  do      ▷ inicializace  
        for  $k \leftarrow 1, K$  do  
             $P[i].add(pdf())$       ▷ bod vygenerovaný podle hustoty  $pdf$   
        end for  
         $S[i] \leftarrow CENTROID(P[i])$       ▷ těžiště seznamu bodů  
    end for  
    repeat      ▷ jedna zlepšující generace  
         $changed \leftarrow false$   
        for all  $i, j \leftarrow 1, N$  do  
             $List<Point> Ti \leftarrow CLOSER(P[i], S[j], S[i])$   
             $List<Point> Tj \leftarrow CLOSER(P[j], S[i], S[j])$   
            if  $Ti \neq \emptyset \wedge Tj \neq \emptyset$  then  
                 $changed \leftarrow true$       ▷ body se budou vyměňovat  
                repeat      ▷ výměna nejméně výhodných bodů  
                     $P[i].remove(Ti[0]); P[j].add(Ti[0]); Ti.deleteAt(0)$   
                     $P[j].remove(Tj[0]); P[i].add(Tj[0]); Tj.deleteAt(0)$   
                until  $Ti = \emptyset \vee Tj = \emptyset$   
                 $S[i] \leftarrow CENTROID(P[i])$       ▷ přepočítám těžiště  
                 $S[j] \leftarrow CENTROID(P[j])$   
            end if  
        end for  
    until  $\neg changed$   
    return  $S$   
end function
```



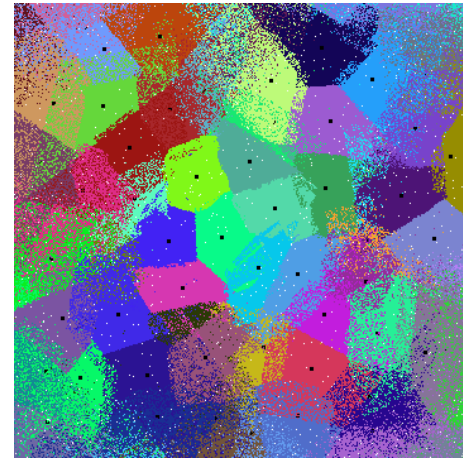
CCPD – postup výpočtu



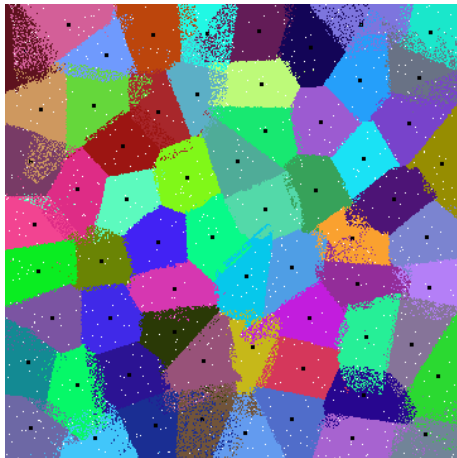
0



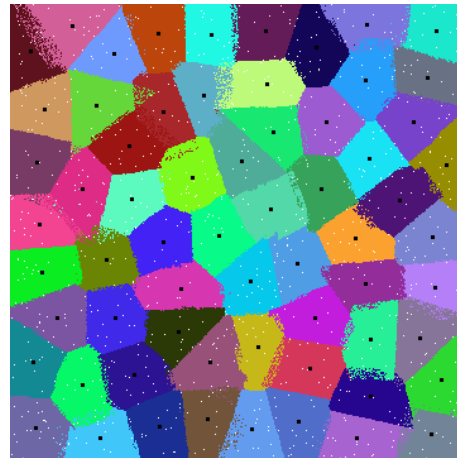
1



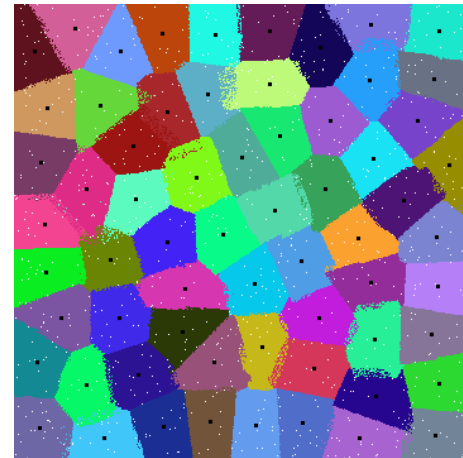
2



3



4



23



Porovnání metod – diskrepance

Průměrování přes 100 pokusů

- 1024 vzorků v sadě, vhodné nastavení parametrů jednotlivých vzorkování (někdy i více variant)
- Stroudova diskrepance (všechny obdélníky, RMS)
- průměrná diskrepance ($\cdot 10^{-3}$) a std. odchylka ($\cdot 10^{-6}$)

Lloydův algoritmus

- pro dobrý výsledek se musí zastavit před koncem konvergence (empiricky: generace 40)
- pro porovnání i výsledek z pokročilejšího stadia konvergence – cca Centroidal Voronoi (generace 400)

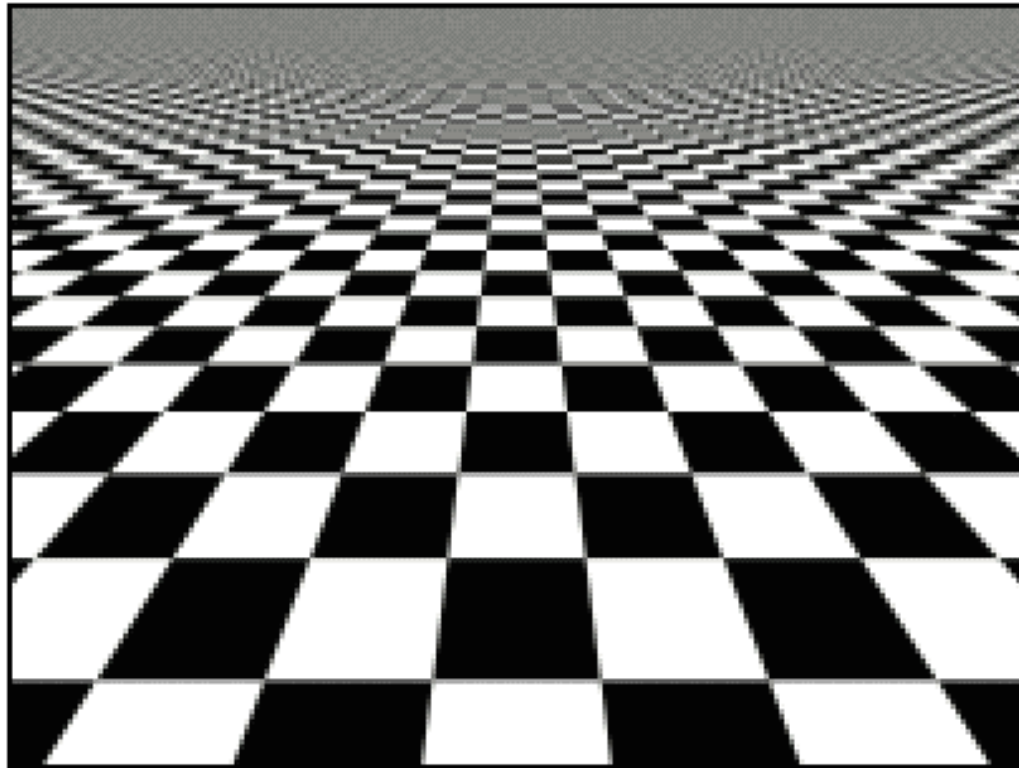


Porovnání metod – diskrepance

metoda	diskrepance	SD
Pravidelné	7.468	0.0
Hammersley *	0.811	0.0
Larcher-Pillichshammer *	0.811	0.0
Náhodné	8.941	2.5
Jittering	2.593	0.0
Semi-jittering	4.159	0.0
N věží	5.220	0.5
Poissonův disk	3.255	0.2
Mitchell	3.183	0.2
Lloyd (g=40)	6.400	2.5
Lloyd (g=400)	5.661	1.8
CCPD	2.154	0.0



Příklady anti-aliasingu – přesné řešení

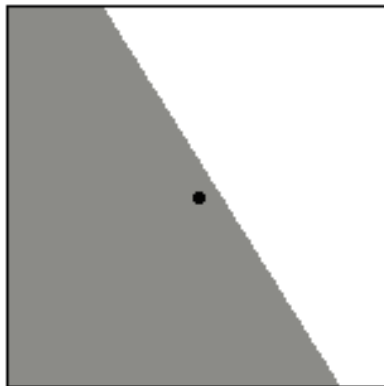
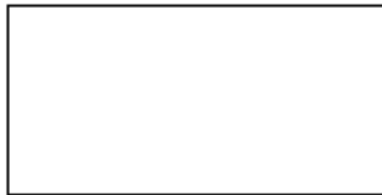


2500 spp (samples per pixel)

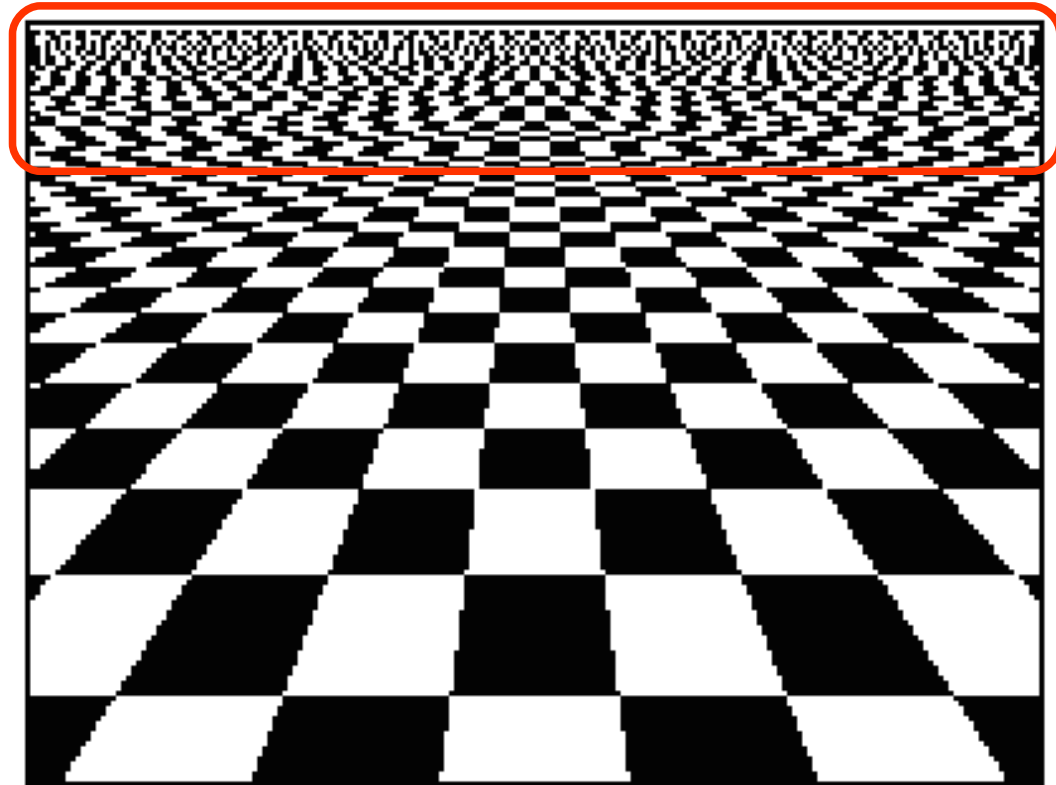


Příklad – 1spp

špatně

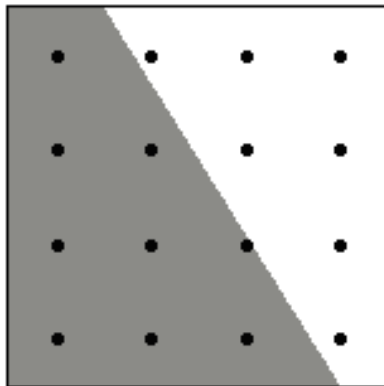


1 spp



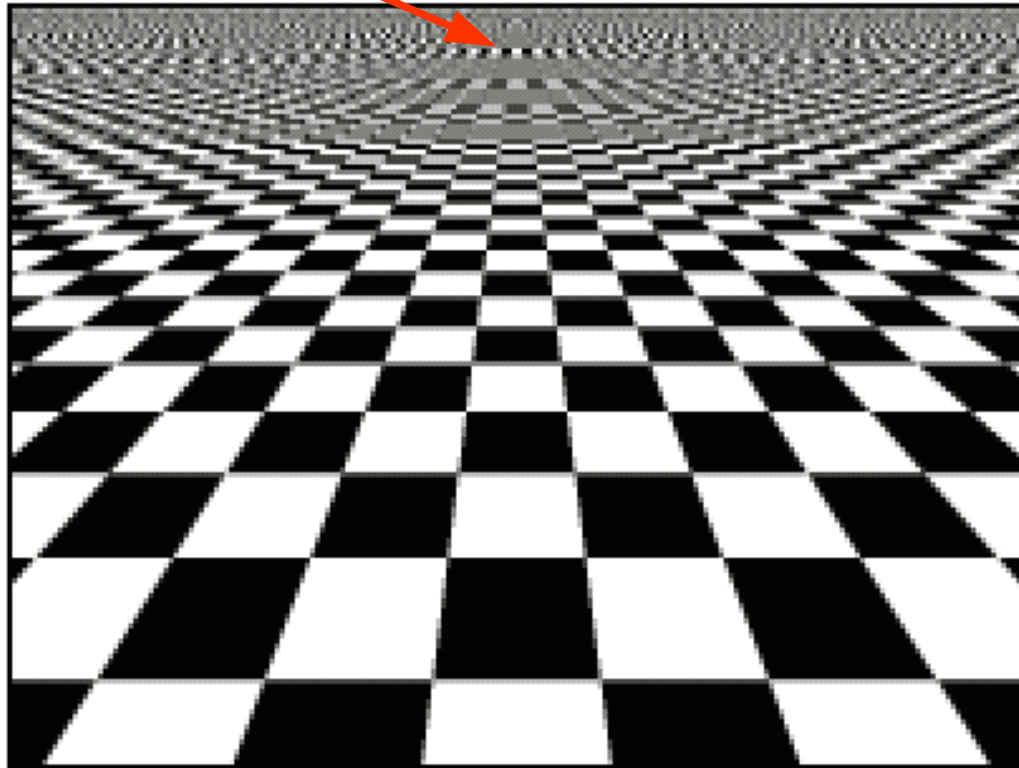


Příklad – pravidelné („regular“)



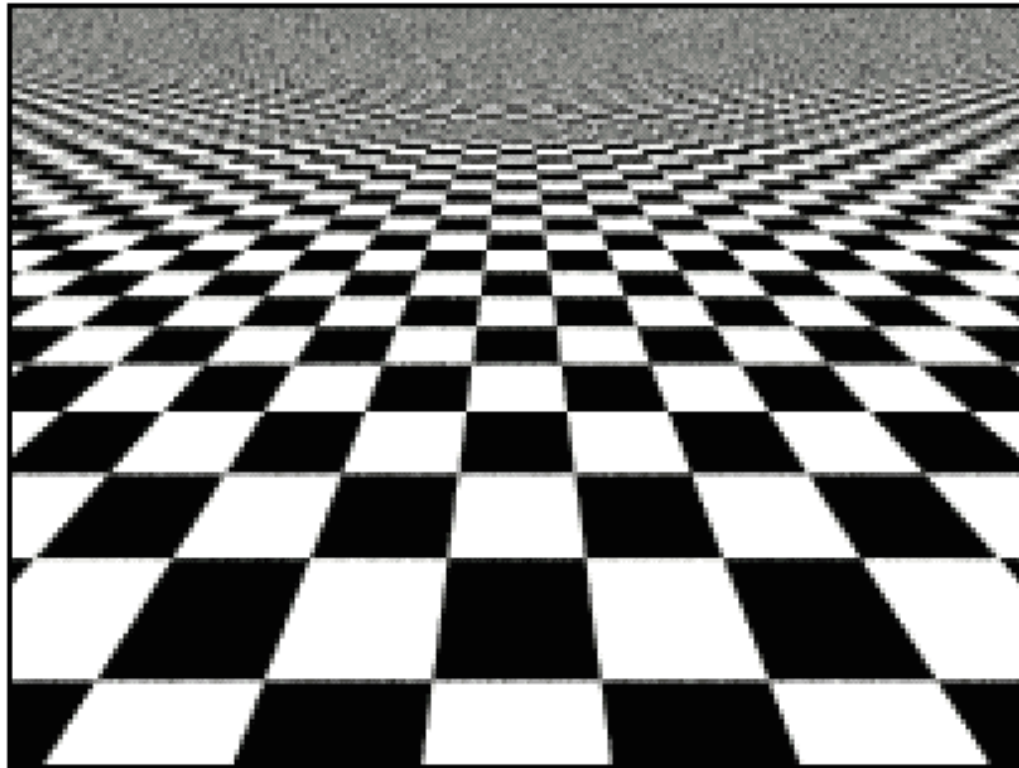
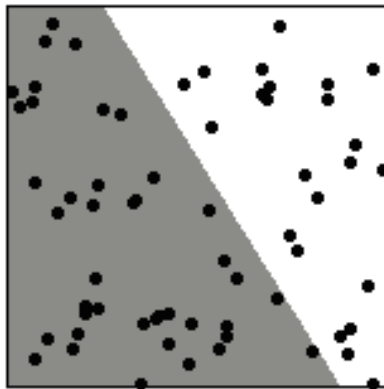
16 spp

špatně





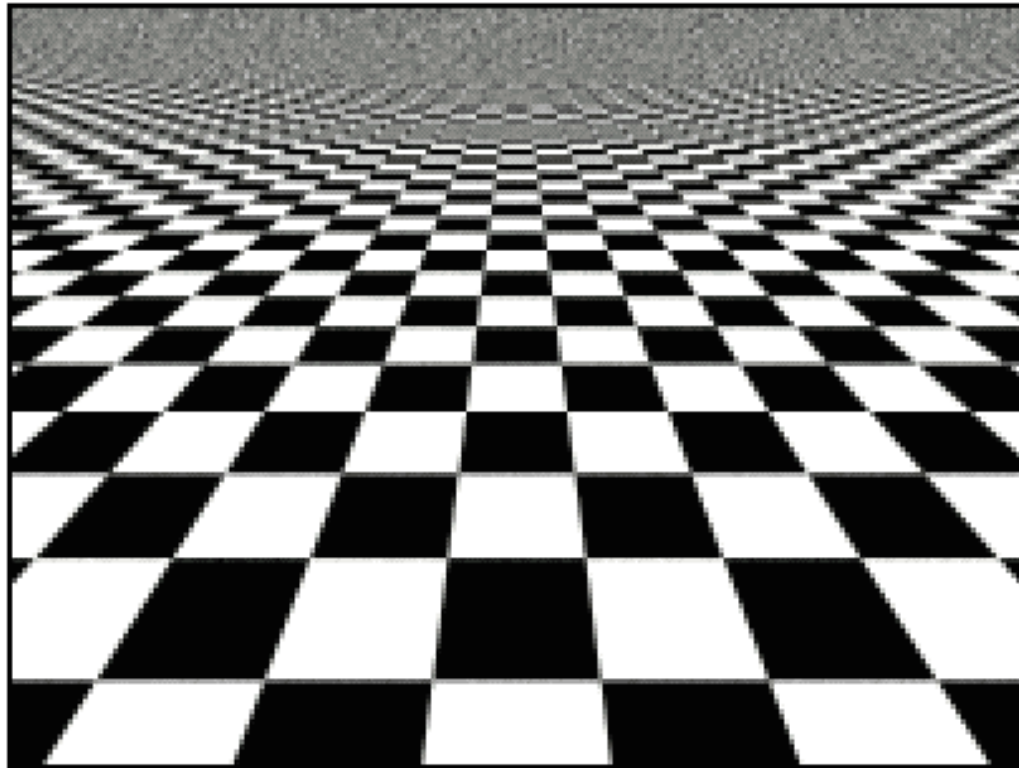
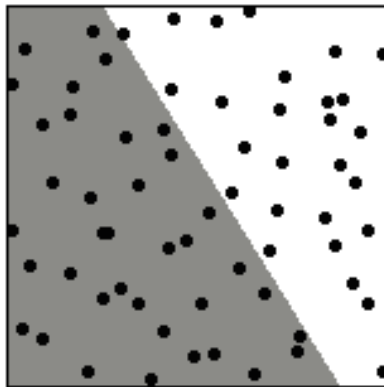
Příklad – náhodné (Poisson, random)



64 spp



Příklad – jittering

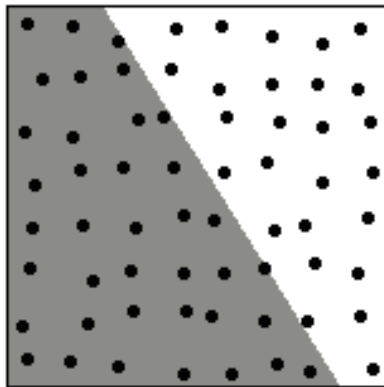


64 spp

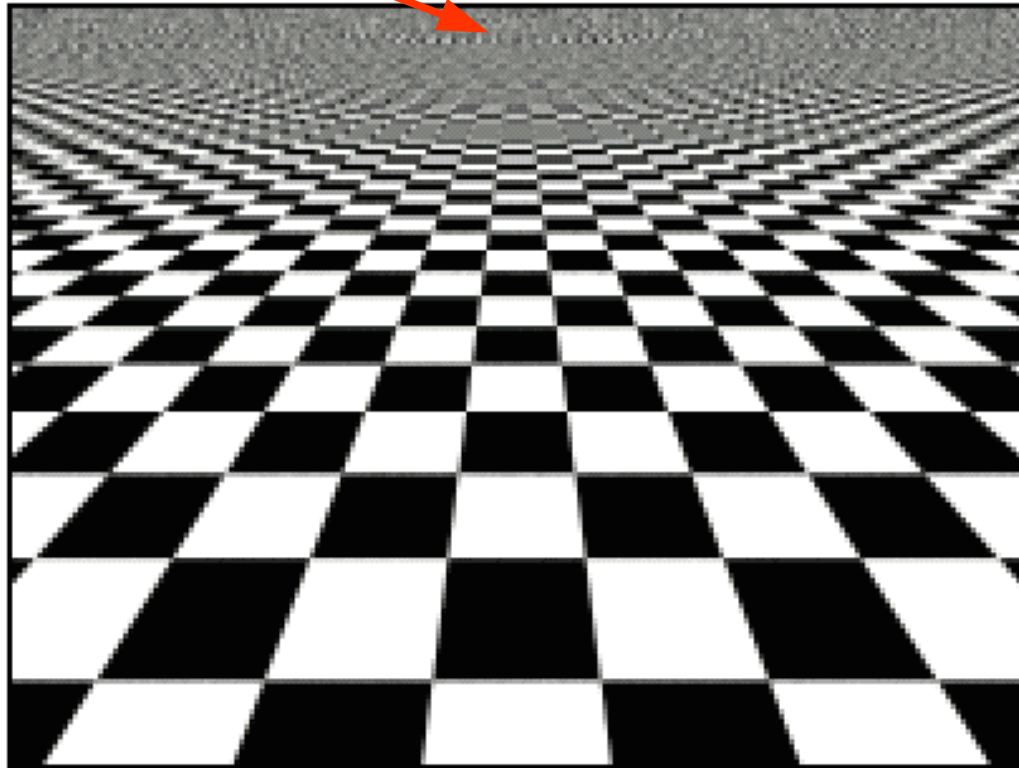


Příklad – semi-jittering

menší chyba

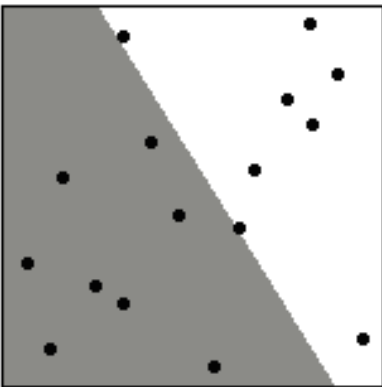


64 spp

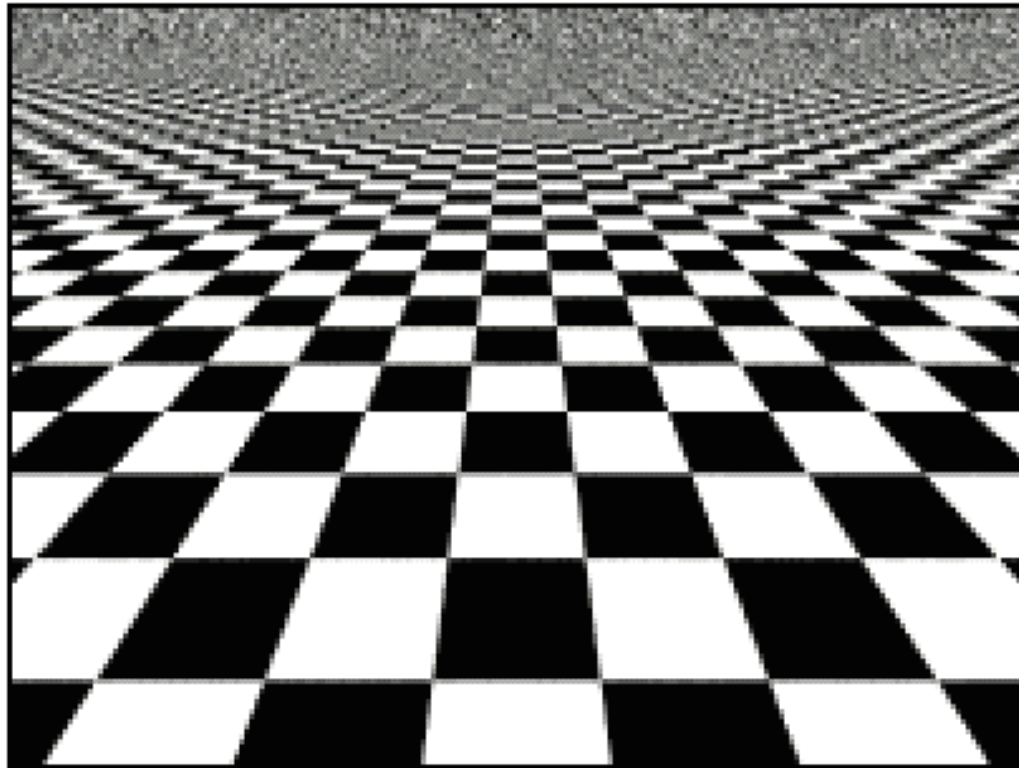




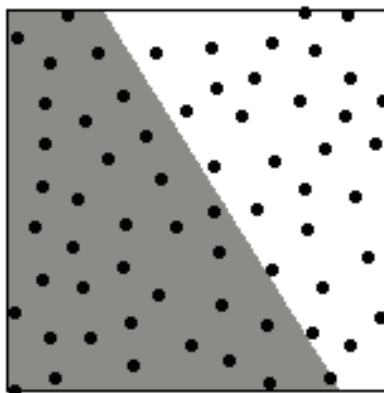
Příklad – N věží („N rooks“)



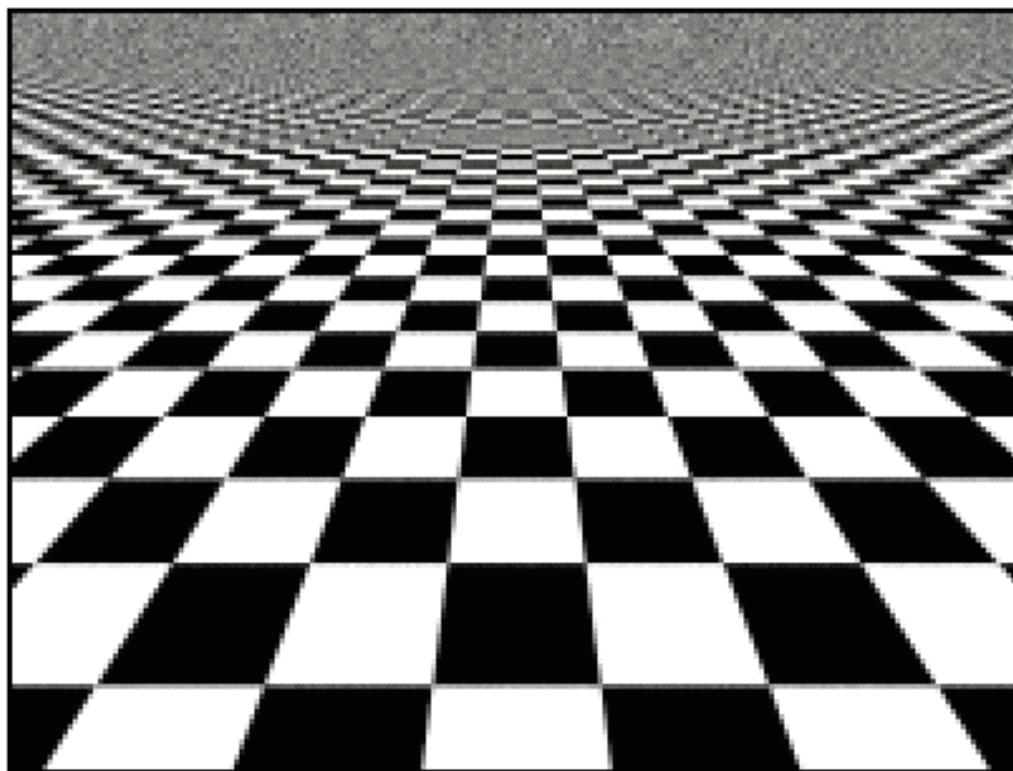
16 spp



Příklad – Poissonovo diskové vzorkování



64 spp





Adaptivní zjemňování

Vzorkování založené na **funkci důležitosti** (potenciálu) nebo **lokálním zájmu**

- některé regiony mohou mít **vyšší váhu** (vyšší pravděpodobnost)
- regiony s **vyšším rozptylem hodnot** by měly být vzorkovány hustěji
- pro zachování nestrannosti je nutné vyšší hustotu pravděpodobnosti **kompensovat** (dát ji do jmenovatele zlomku!)

„Důležitost“ nebo „zájem“ nemusí být **předem explicitně známy**

- algoritmus by se měl umět přizpůsobovat průběžným výsledkům (adaptivita)



Modifikace statických metod

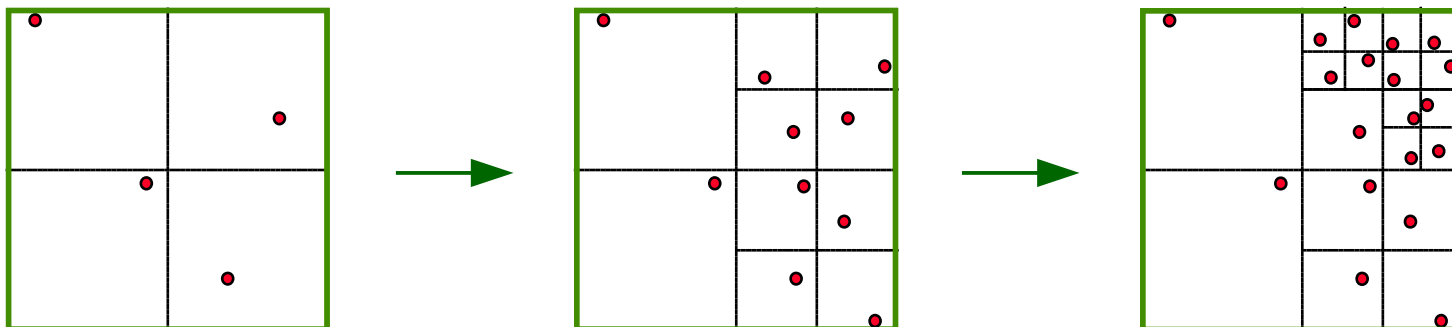
① Sondování

- výpočet malého počtu vzorků (2 až 5)
- **zjemňovací kritérium** na základě předchozích vzorků

② Fáze zjemňování

- vzorkování se zahušťuje v potřebných oblastech (kritérium)
- efektivita – využití všech vygenerovaných vzorků!

Skoro každé vzorkování lze takto **přeformulovat**





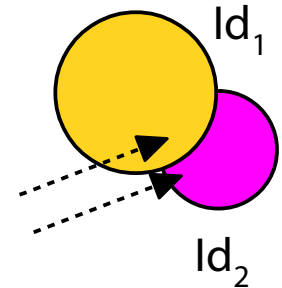
Zjemňovací kritéria

Funkční hodnoty (rozdíl, rozptyl, gradient)

- rozdíl mezi sousedními vzorky...

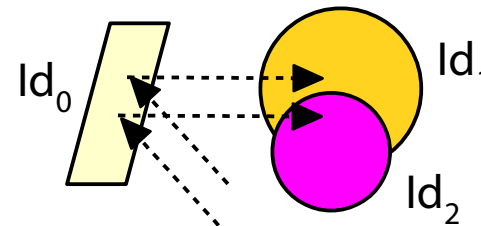
Id zasažených těles (jen pro Ray-tracing)

- vysoká priorita
- textury s opakujícími se vzory → „signature“



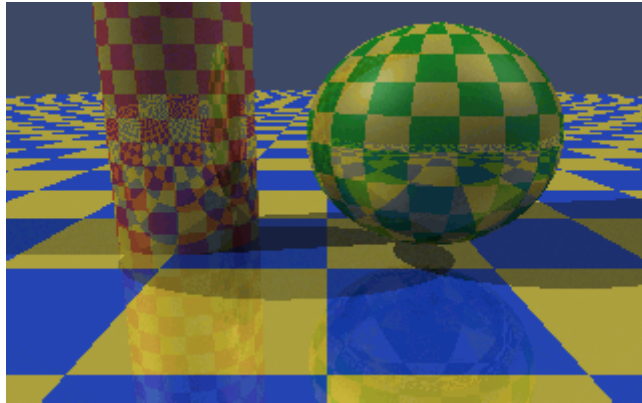
Strom výpočtu (rekurzivní ray-tracing)

- topologické porovnání celých nebo omezených stromů výpočtu
- **signatura stromu** – rekurzivní hashovací funkce (Id tělesa, signatura textury, světlo/stín...)

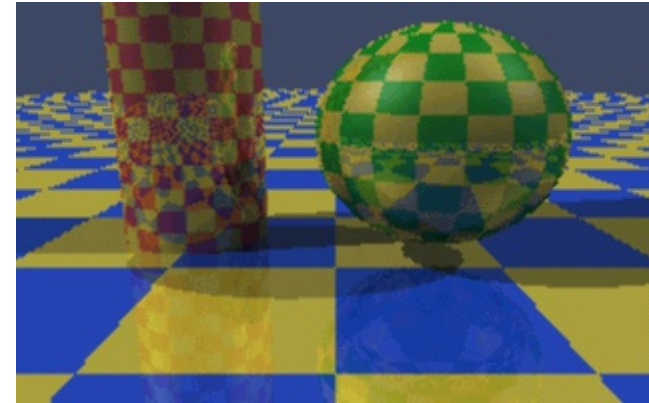




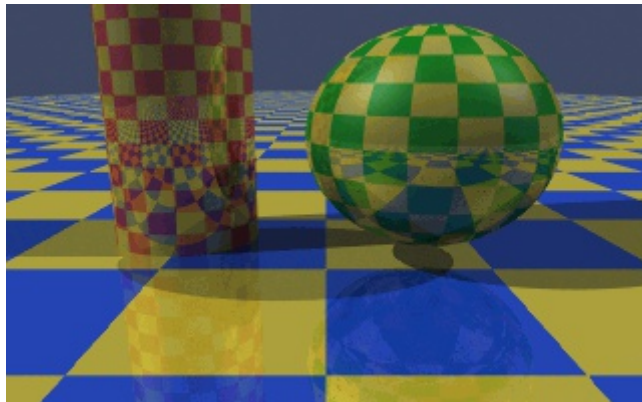
Příklad adaptivního vzorkování



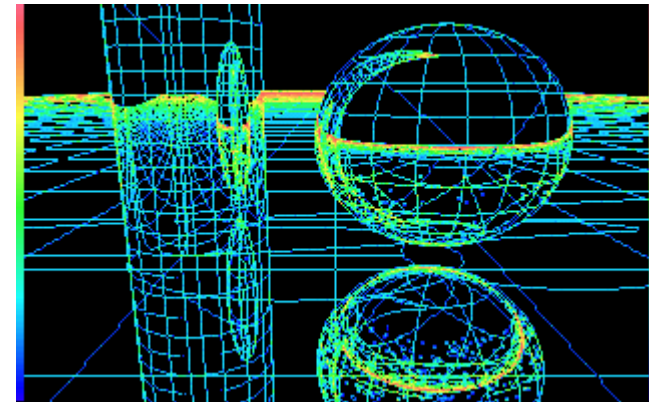
1 spp



1/2 spp



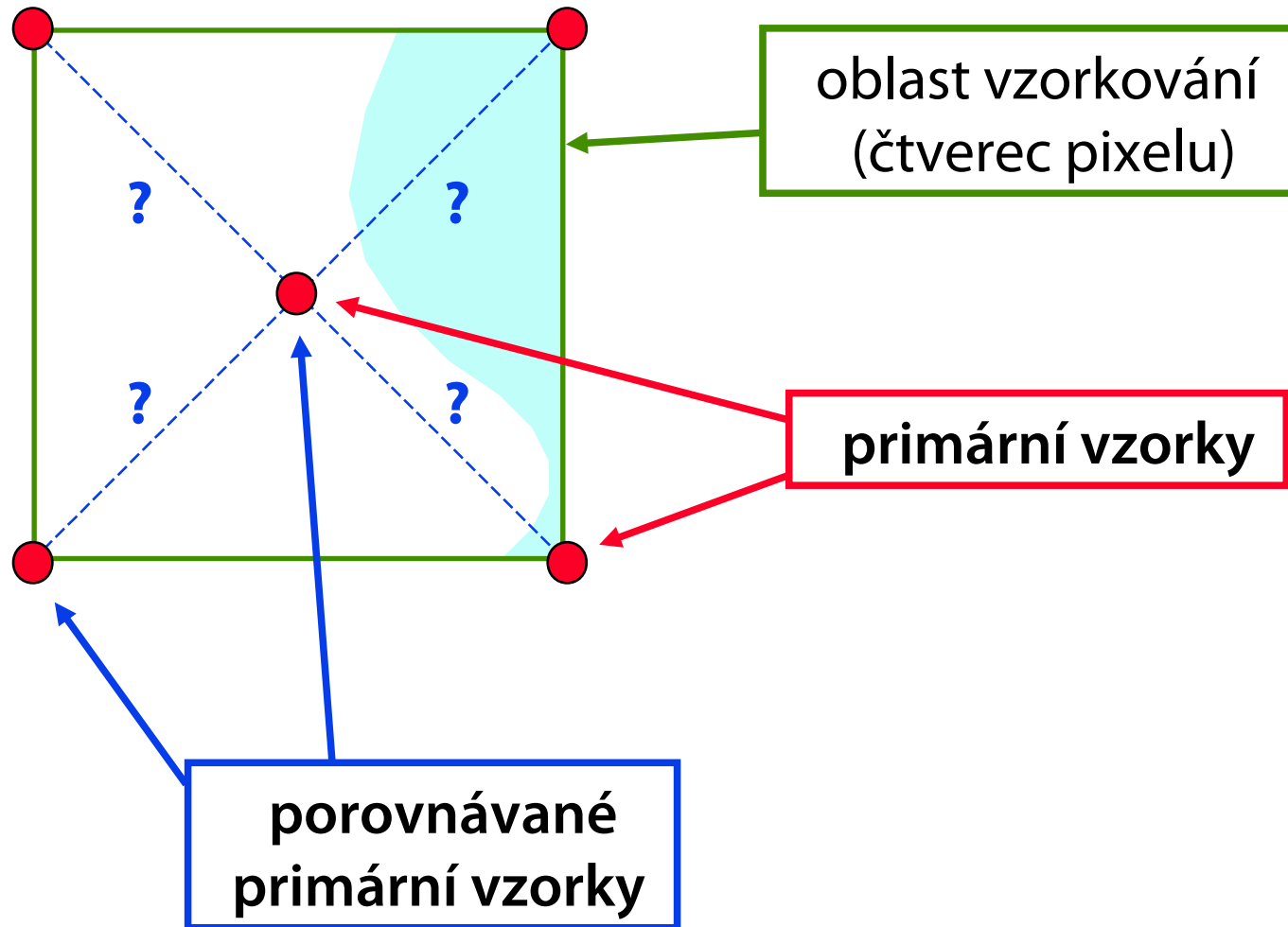
adaptivní



mapa zjemnění

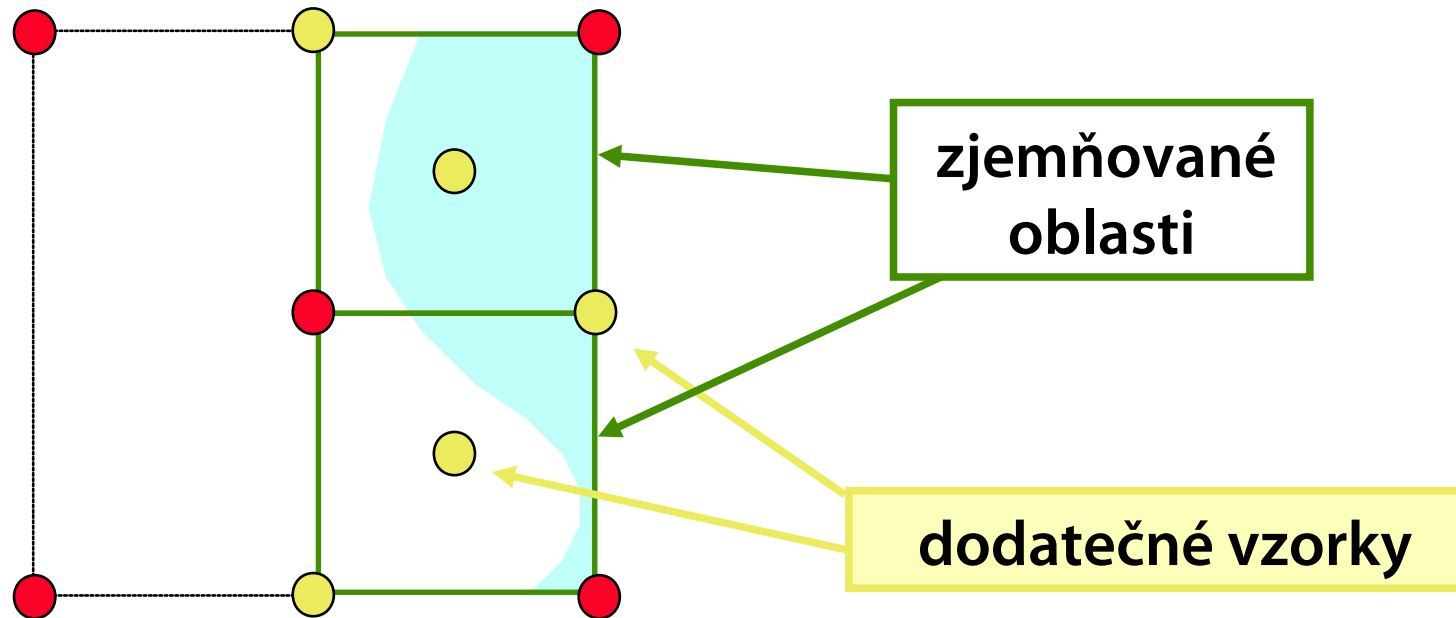


Rekurzivní zjemňování (Whitted)





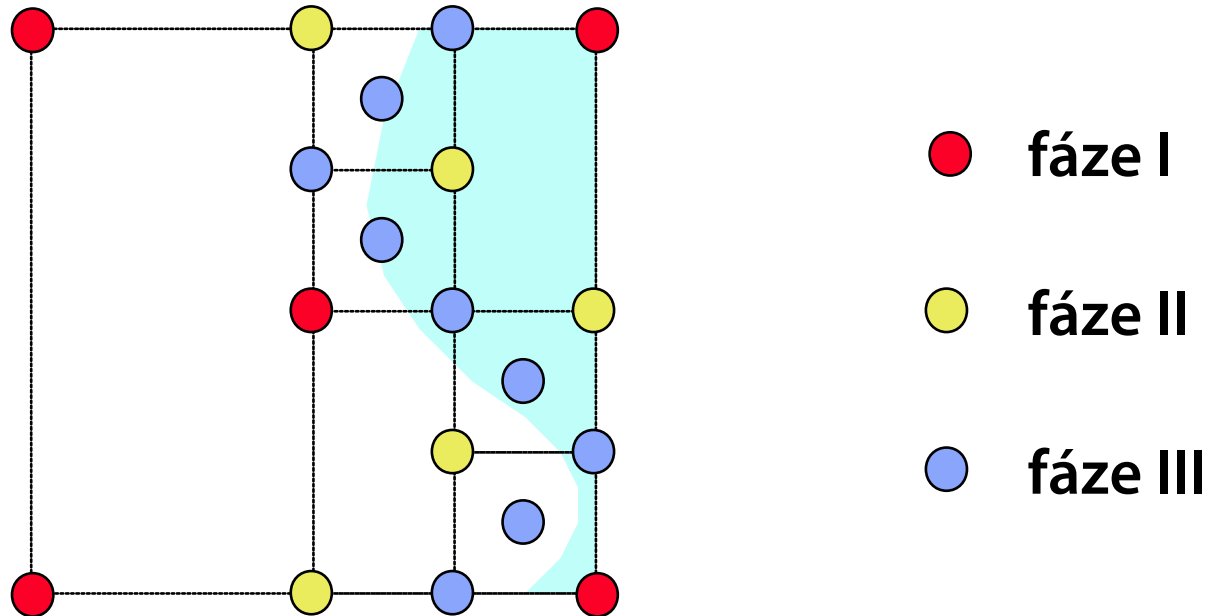
Fáze zjemňování



Stejná procedura se vykonává ve zjemněných oblastech **rekurzivně** (až do předem definované maximální úrovně)



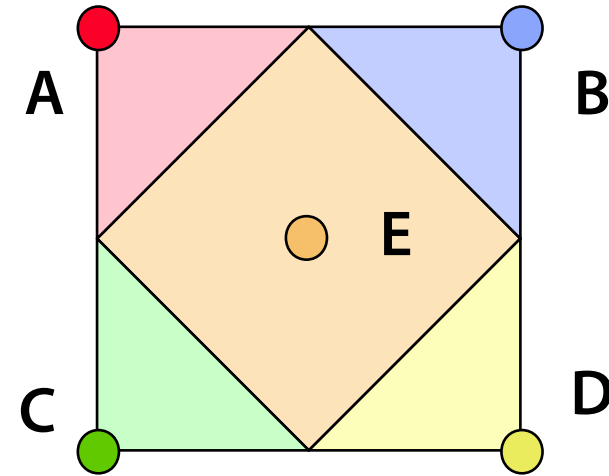
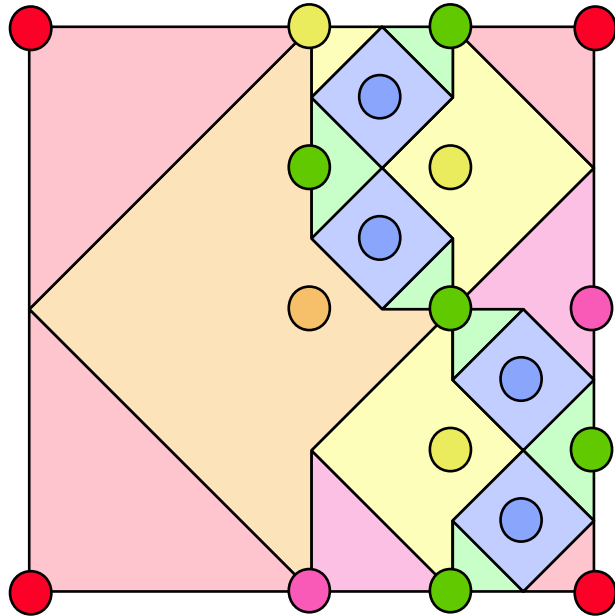
Výsledná sada vzorků



Vyhodnoceno: $5 + 5 + 9 = 19$ vzorků
(z potenciální množiny 41)



Vyhodnocení barvy pixelu



$$\frac{1}{2}E + \frac{1}{8}[A + B + C + D]$$

Jestliže se zjemňování **zastaví** v jistém čtverci,
jeho plocha je rozdělena do dvou trojúhelníků (diagonála)



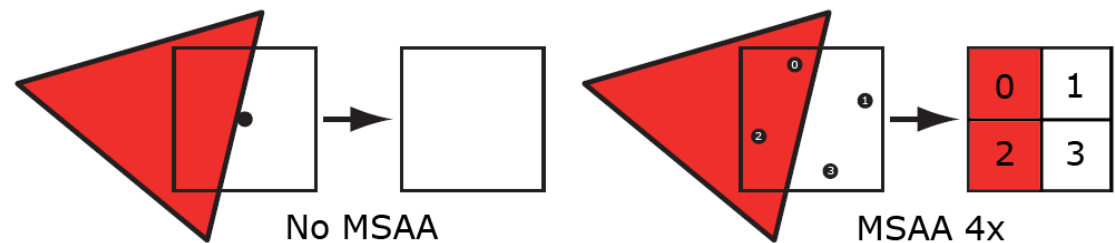
Anti-aliasing na GPU

SSAA (Supersample Anti-Aliasing)

- klasický super-sampling, plný počet vzorků na celé obrazovce

MSAA (Multisample Anti-aliasing)

- nevzorkují se oblasti, kde se barva nemění
- bývalo implementováno už ve fixed-pipeline GPU (4 vzorky)



Post-processing

- obrazovka se nakreslí bez anti-aliasingu
- **detekce ostrých hran** a aproximace anti-aliasingu (rozmazání)



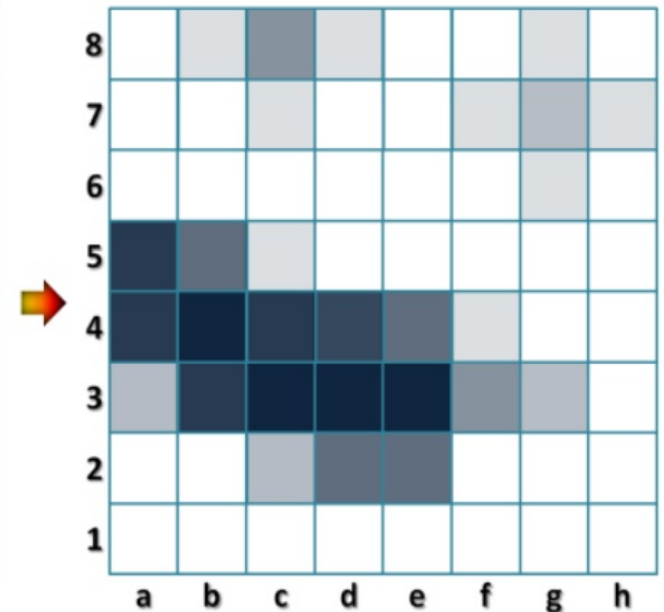
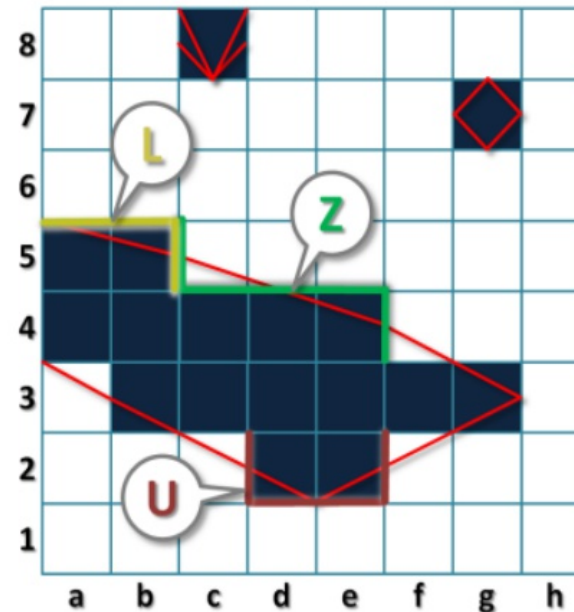
Anti-aliasing na GPU

MLAA (Morphological Anti-Aliasing)

- detekuje vzory na obrysu objektů, to umožní lépe odhadnout parametry hrany

SMAA

- MLAA → GPU



Z and U shape decomposition into L-shapes:



© 2010 J. Jimenez et al.



Anti-aliasing na GPU

TAA, TSAA (Temporal Anti-Aliasing)

- pro detekci hran využívá již hotových snímků
- jinak pracuje podobně jako předchozí metody, tj. rozmazává hrany...

Strojové učení (ML) pro Anti-aliasing

- jednoduché schéma (supervised learning) se nabízí
 - » naučím hlubokou neuronovou síť na dvojice
[GPU obrázek bez AA, kvalitní off-line obrázek s AA]
- už několik let se podobné metody zkoumají a začínají se prakticky nasazovat (DLAA, MLAA)



Literatura I

P. Shirley: *Discrepancy as a Quality Measure for Sample Distributions*, Eurographics 1991

J. Matoušek: *Geometric Discrepancy – An Illustrated Guide*, Springer, 2000

A. Lagae, P. Dutré: *A Comparison of Methods for Generating Poisson Disk Distribution*, CGF 08

M. Balzer et al.: *Capacity-Constrained Point Distributions: A Variant of Lloyd's Method*, SIGGRAPH 2009

D. P. Mitchell: *Spectrally optimal sampling for distribution ray tracing*, SIGGRAPH 1991

R. Ulichney: *Digital Halftoning*, MIT Press, 1987



Literatura II

Matt Pharr (ed.): *GPU Gems II*, Pearson Education, 2005

Hubert Nguyen (ed.): *GPU Gems III*, Addison Wesley, 2007

J. Jimenez et al.: *SMAA: Enhanced Subpixel Morphological Antialiasing*, Eurographics, 2012

The Danger Zone (MJP): *A Quick Overview of MSAA*, 2012
<https://therealmjp.github.io/posts/msaa-overview/>

Brian Karis (Epic Games): *High Quality Temporal Supersampling*, SIGGRAPH 2014 talk

James Archer: "Nvidia DLAA: How it works, supported games and performance vs DLSS", Rock, Paper, Shotgun, 2022