
Zobrazovací rovnice

© 1996-2001 Josef Pelikán
KSVI MFF UK Praha

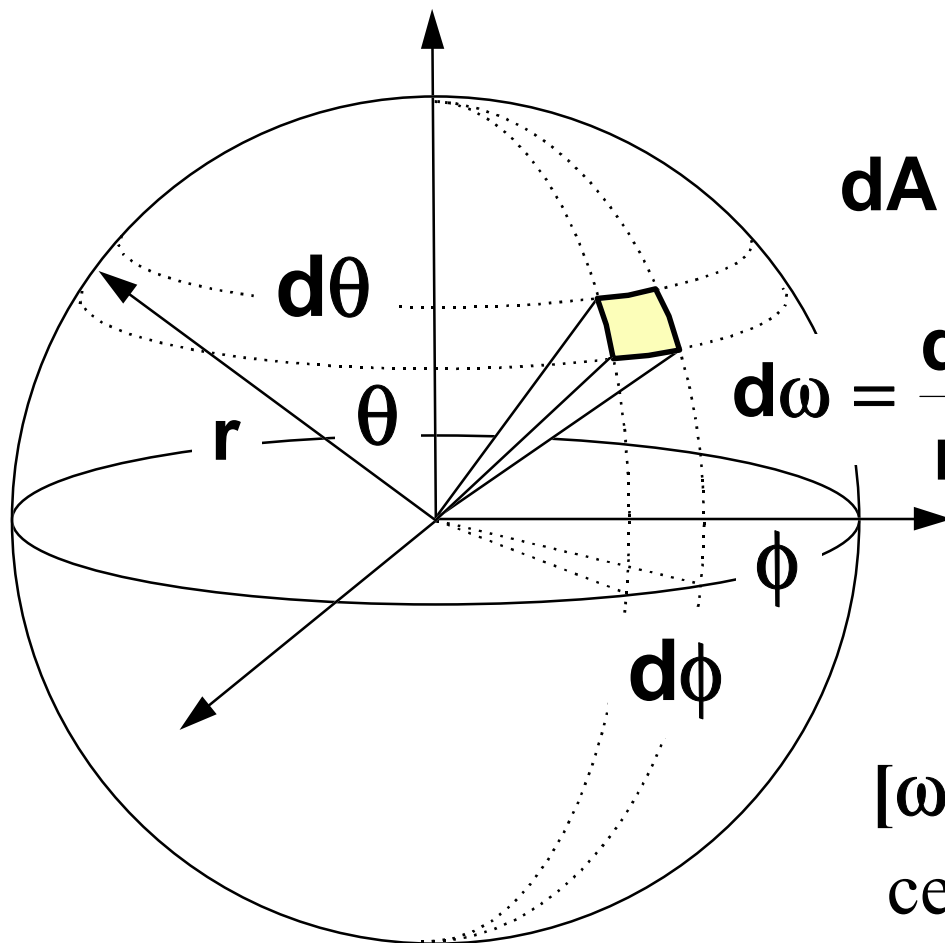
e-mail: Josef.Pelikan@mff.cuni.cz

WWW: <http://cgg.ms.mff.cuni.cz/~pepca/>

Základní radiometrické veličiny

- množství **energie** přijaté (emitované) nějakou částí plochy: Q_{in} (Q_{out}) [**Joul**]
- **výkon** přijímaný (emitovaný) nějakou částí plochy: Φ_{in} (Φ_{out}) [**Joul/sec = Watt**]
- přijímaná (emitovaná) **radiosita** (hustota výkonu na ploše): B_{in} (E , B_{out}) [**Watt/m²**]
- **intenzita** (hustota výkonu v prostorovém úhlu ω): $I = d\Phi/d\omega$ [**W/sr**]

Prostorové úhly



$$dA = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$d\omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

[ω] .. steradián (sr)

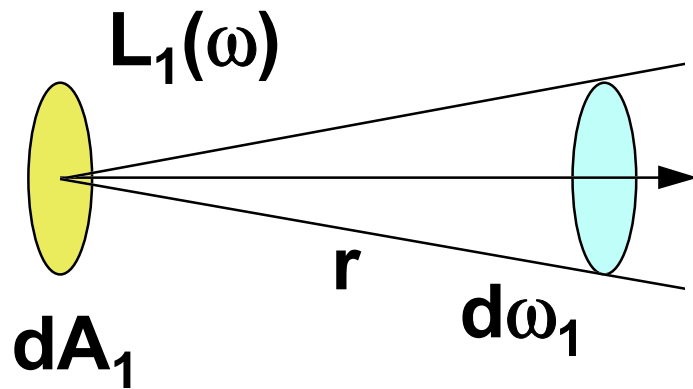
celá sféra má 4π sr

Radiance

- přijímaná (emitovaná) **radiance** ve směru úhlu ω : $L_{in}(\omega)$ ($L_e(\omega)$, $L_{out}(\omega)$) [$W/(m^2 \square sr)$]

$$L_{out}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial A \partial \omega \cos \theta}$$
$$= \frac{\partial B_{out}}{\partial \omega \cos \theta}$$
$$= \frac{\partial I}{\partial A \cos \theta}$$

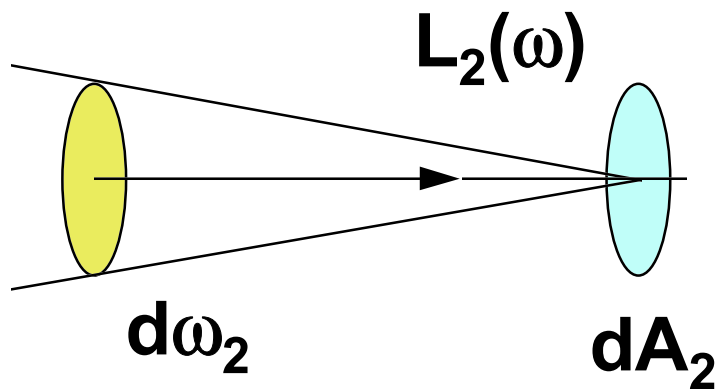
Zákon zach. energie v paprsku



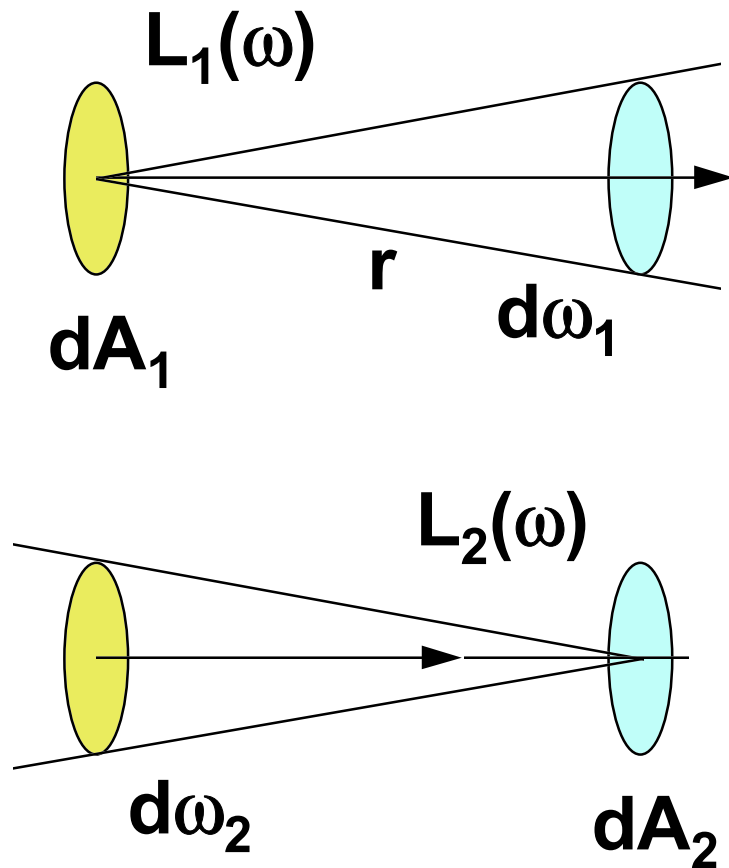
$$L_1 d\omega_1 dA_1 = L_2 d\omega_2 dA_2$$

emitovaný
výkon

přijímaný
výkon



Zákon zach. energie v paprsku



$$L_1 d\omega_1 dA_1 = L_2 d\omega_2 dA_2$$

$$\underline{T} = d\omega_1 dA_1 = d\omega_2 dA_2 =$$
$$= \frac{dA_1 dA_2}{r^2}$$

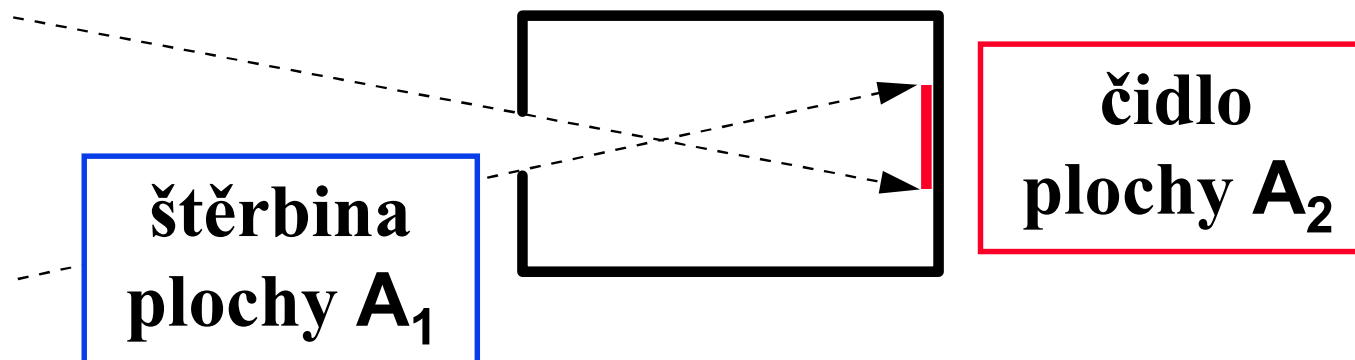
kapacita paprsku

$$L_1 = L_2$$

paprsek ... radiance L

Měření světla

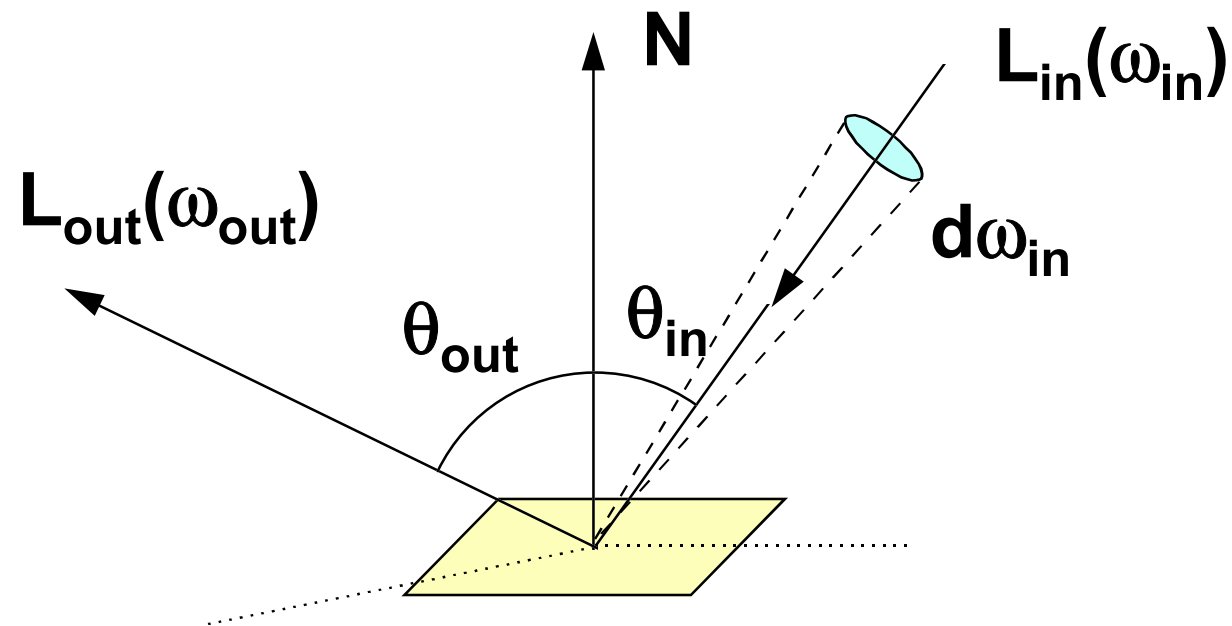
- ➔ **naměřená veličina je přímo úměrná radianci viditelné části scény**



$$\underline{R} = \int_{A_2} \int_{\Omega} L_{in}(\mathbf{A}, \omega) \cdot \cos \theta \, d\omega \, dA = \underline{L_{in}} \cdot T$$

BRDF (lokální fce odrazivosti)

(“bidirectional reflectance distribution function”)



$$\mathbf{f}(\omega_{in} \rightarrow \omega_{out}) = \frac{\partial \mathbf{L}_{out}(\omega_{out})}{\mathbf{L}_{in}(\omega_{in}) \cdot \cos \theta_{in} \cdot \partial \omega_{in}} \quad [\text{sr}^{-1}]$$

Helmholtzův zákon, ..

- ➔ pro **reálné** povrchy těles (vyhovující fyzikálním zákonům) platí:

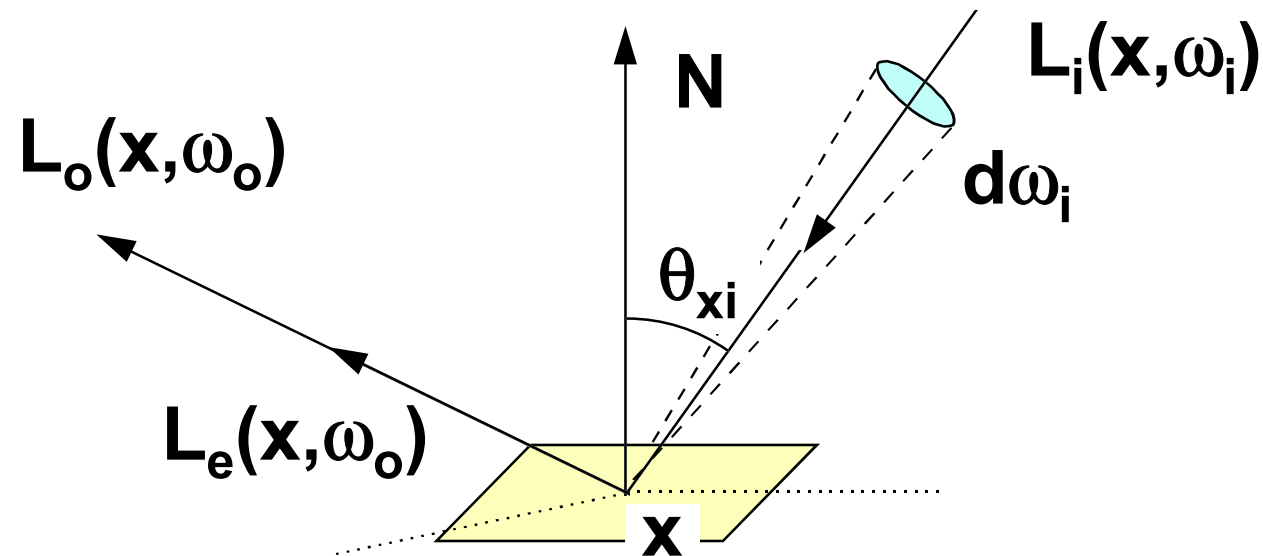
$$\mathbf{f}(\omega_{\text{in}} \rightarrow \omega_{\text{out}}) = \mathbf{f}(\omega_{\text{out}} \rightarrow \omega_{\text{in}})$$

- ➔ obecná **BRDF** nemusí být **isotropní** (invariantní k otočení kolem normály)
 - kovové povrchy leštěné v jednom směru, ..

$$\mathbf{f}(\theta_{\text{in}}, \phi_{\text{in}}, \theta_{\text{out}}, \phi_{\text{out}}) \neq \mathbf{f}(\theta_{\text{in}}, \phi_{\text{in}} + \phi, \theta_{\text{out}}, \phi_{\text{out}} + \phi)$$

Lokální rovnice (OVTIGRE)

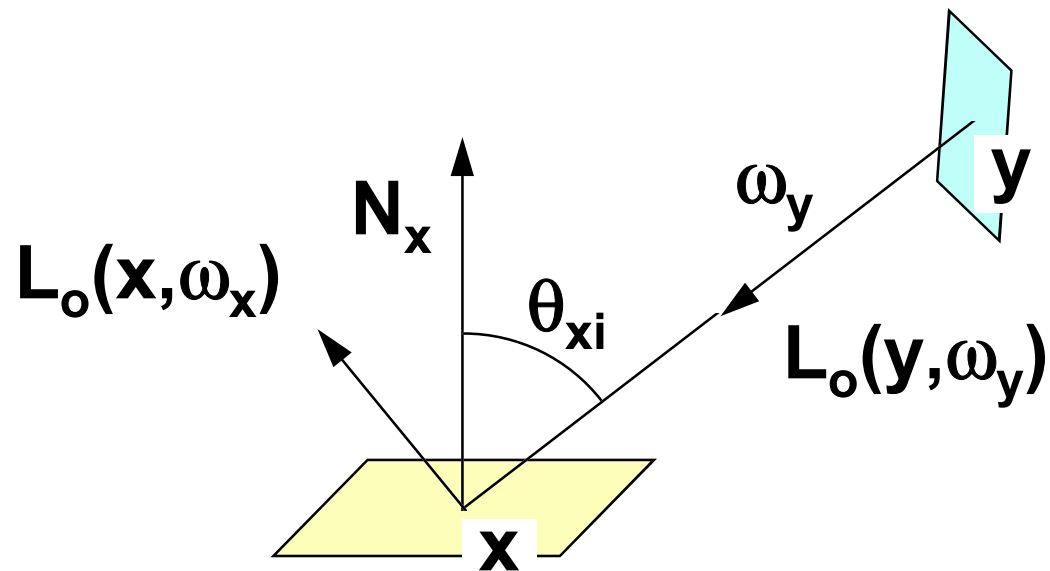
(“outgoing, vacuum, time-invariant, gray radiance equation”)



vlastní vyzařování

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot L_i(\mathbf{x}, \omega_i) \cdot \cos \theta_{xi} d\omega_i$$

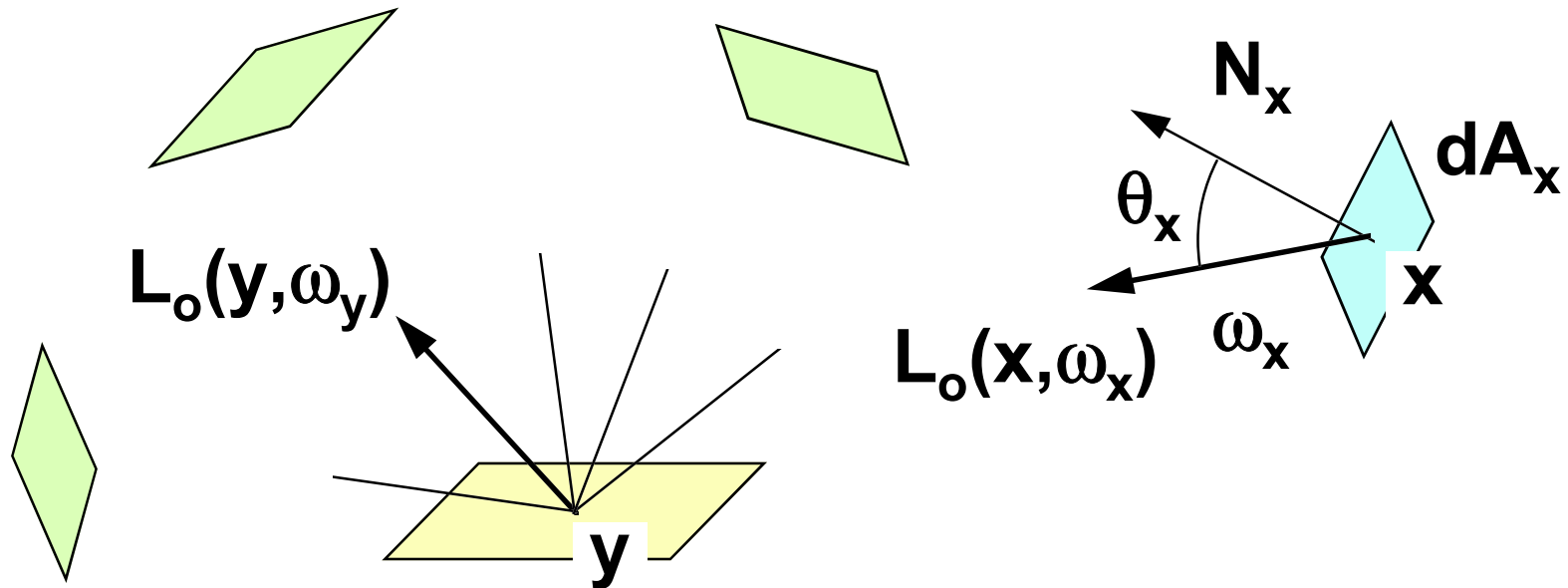
Radiance přijímaná z plochy



$$\begin{aligned} L_o(\mathbf{x}, \omega_x) &= \\ &= L_e(\mathbf{x}, \omega_x) + \int_{\Omega_x^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_y \rightarrow \omega_x) \cdot L_o(\mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_{xi} \, d\omega_y \end{aligned}$$

GRDF (globální fce odrazivosti)

(“global reflectance distribution function”)



$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) = \frac{\partial^2 L_o(\mathbf{y}, \omega_y)}{L_o(\mathbf{x}, \omega_x) \cdot \cos \theta_x \cdot \partial A_x \partial \omega_x} \quad [\text{m}^{-2}\text{sr}^{-1}]$$

Rekurentní definice GRDF

První odraz:

Diracův impuls

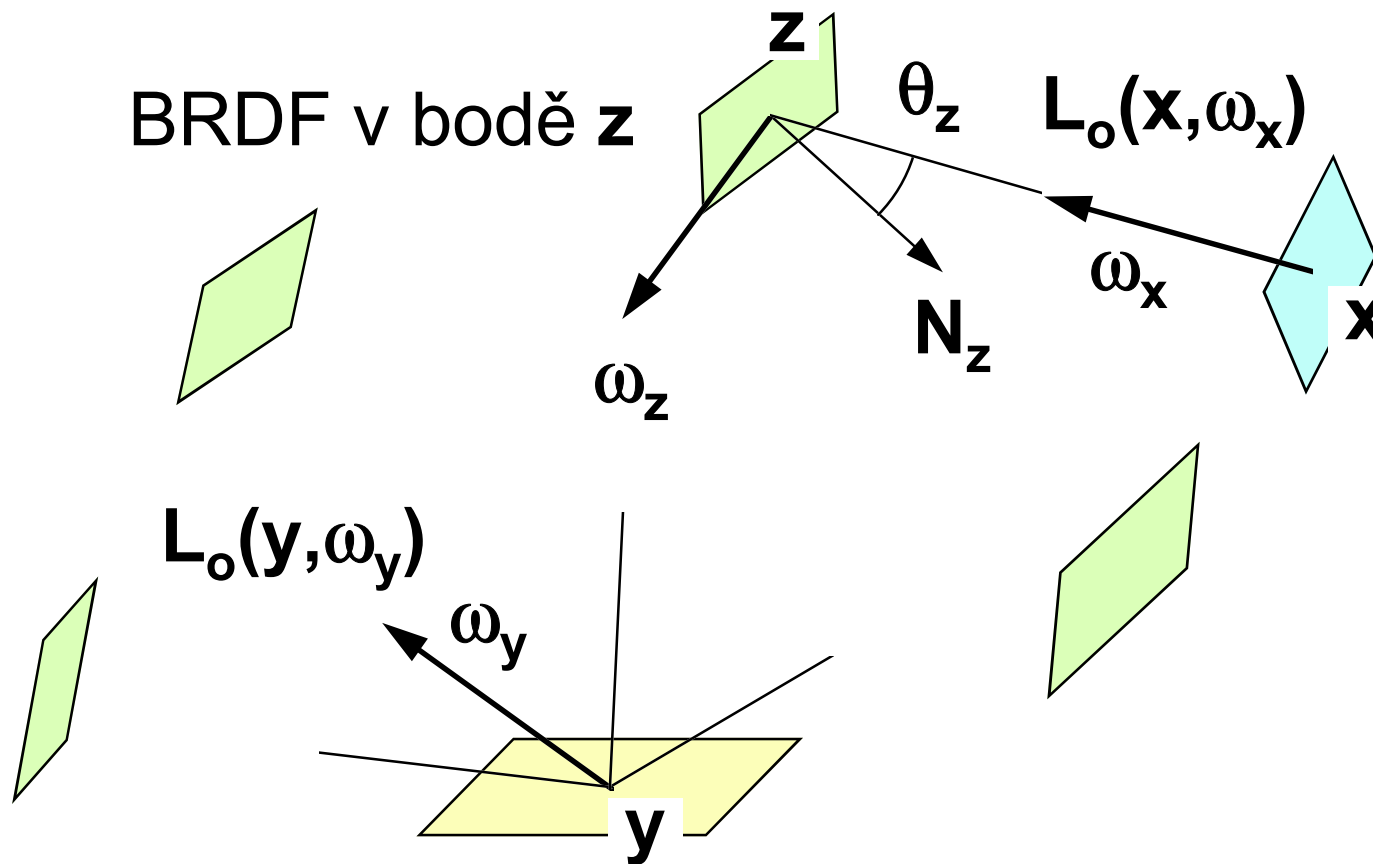
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) = \delta(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{y}, \omega_y) + \int_{\Omega_z} \mathbf{f}(\mathbf{z}, \omega_x \rightarrow \omega_z) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{z}, \omega_z \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_z \, d\omega_z$$

integrál přes směry vycházející z bodu \mathbf{z}

$$\int_A \int_{\Omega_x} \delta(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_x \, d\omega_x \, dA_x = 1$$

Rekurentní definice GRDF

První odraz:



Rekurentní definice GRDF

Poslední odraz:

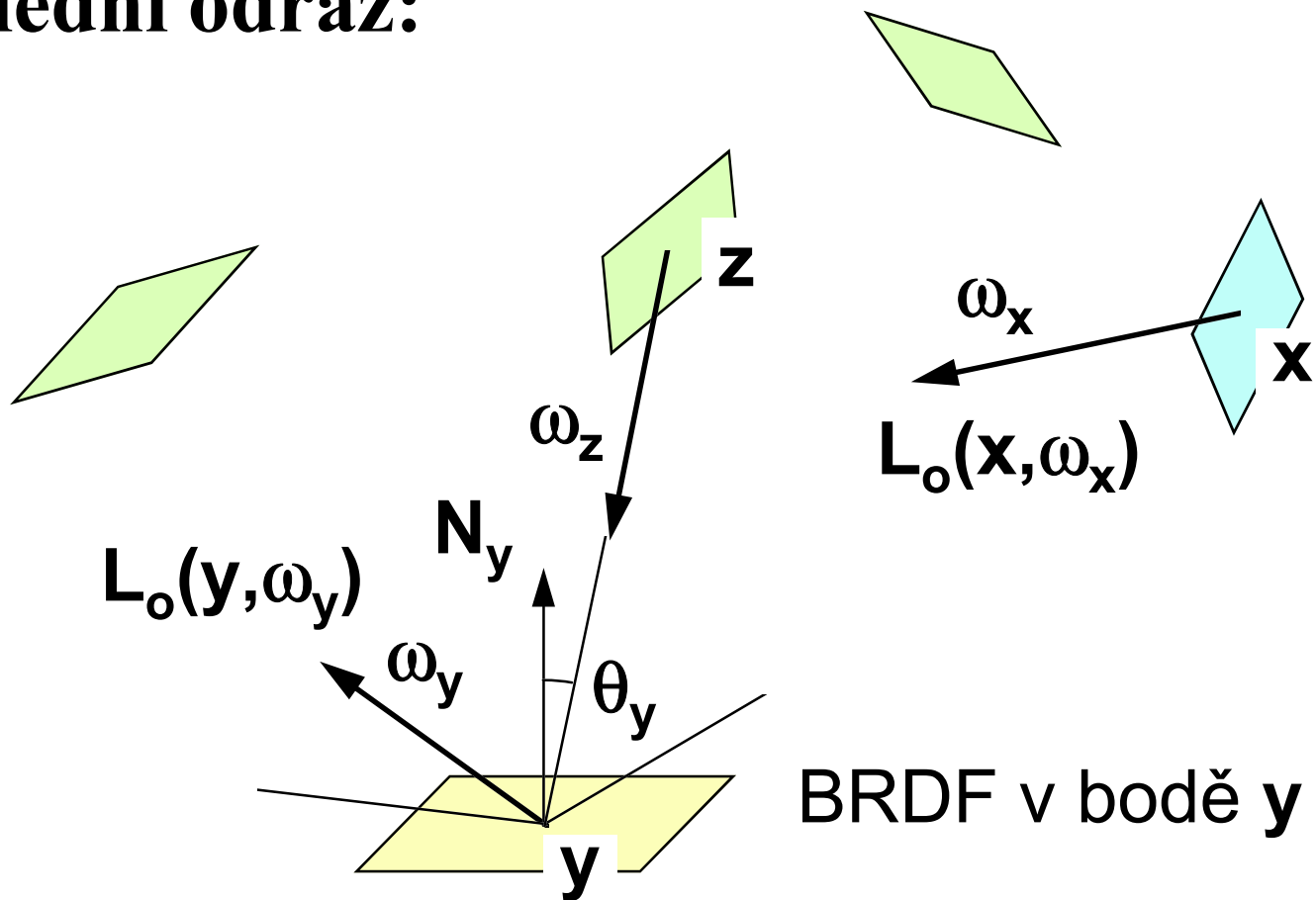
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) = \underline{\delta(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{y}, \omega_y)} +$$
$$+ \int_{\underline{\Omega_y^{-1}}} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega_z \rightarrow \omega_y) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \mathbf{z}, \omega_z) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_z$$

integrál přes směry přicházející do bodu y

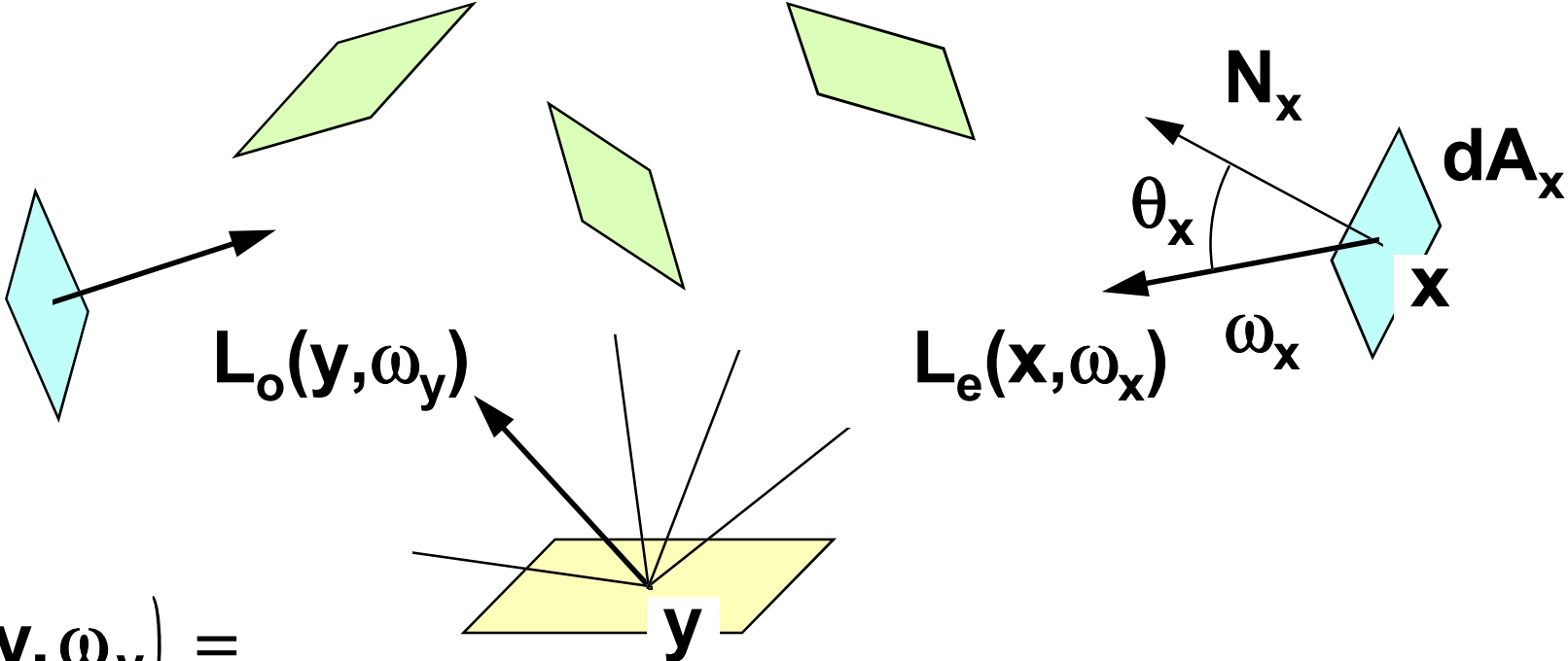
$$\int_A \int_{\Omega_y} \delta(\mathbf{x}, \omega_x, \mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_y \, d\omega_y \, dA_y = 1$$

Rekurentní definice GRDF

Poslední odraz:



Globální rovnice (s GRDF)



$L_o(\mathbf{y}, \omega_y) =$

$$= \int_A \int_{\Omega_x} L_e(\mathbf{x}, \omega_x) \cdot F(\mathbf{x}, \omega_x \rightarrow \mathbf{y}, \omega_y) \cdot \cos \theta_x \, d\omega_x \, dA_x$$

Řešení zobrazovacích rovnic

➔ **zpětné sledování paprsku** (T. Whitted, '80)

- počítá pouze s nejvýznamnějšími příspěvky odráženými difusně (stínovací paprsky) a zrcadlově (odražený a lomený paprsek)
- nepostihuje nepřímé měkké osvětlení, měkké stíny, ..

➔ **radiační metoda** (C. Goral, '84)

- zanedbává směrovost odrazu
- řešení metodou konečných prvků
- nezobrazuje lesklé odrazy světla

Stochastické metody

- ➔ **distribučované sledování paprsku** (R. Cook, '86)
 - odhad lokálního integrálu metodou Monte Carlo
 - vzorkování prostorového úhlu
 - počítá měkké odrazy, stíny, hloubku ostrosti, ..
- ➔ **sledování cesty** (“path tracing”, J. Kajiya, '86)
 - odhad globálního integrálu metodou Monte Carlo
 - výpočet náhodné cesty (“náhodné procházky”), jednosměrné i obousměrné varianty
 - postihuje nepřímé osvětlení vyšších řádů

Konec

Další informace:

- **E. Lafortune: *Mathematical Models and Monte Carlo Algorithms for Physically Based Rendering***, PhD thesis, KU Leuven, 11-28
- **A. Glassner: *Principles of Digital Image Synthesis***, Morgan Kaufmann, 1995, 871-882