Lineární transformace

© 1995-2001 Josef Pelikán

KSVI MFF UK Praha

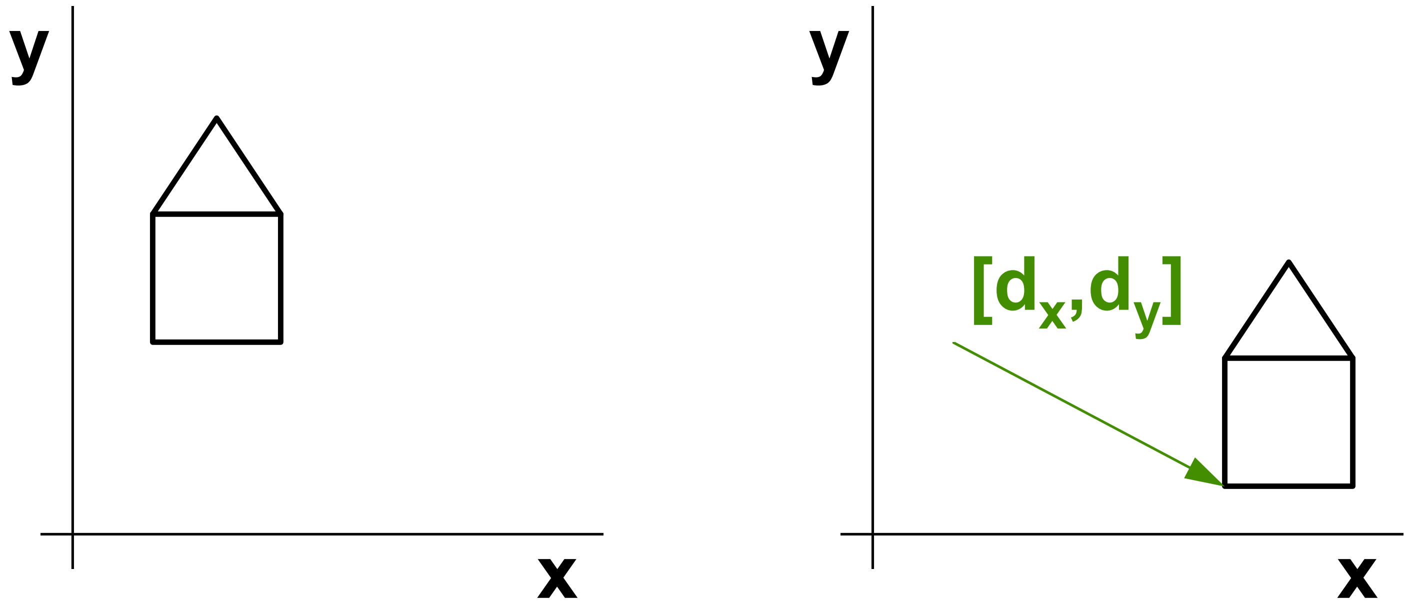
e-mail: Josef.Pelikan@mff.cuni.cz

WWW: http://cgg.ms.mff.cuni.cz/~pepca/

Požadavky:

- **běžně používané transformace:**
  – posunutí, otočení, zvětšení/zmenšení, zkosení, ..
  – rovnoběžná i perspektivní projekce
- snadná a **efektivní implementace**
  – výpočty se provádějí masově (běžně i 10^6 transformací najednou)
- **zvláštní operace**:
  – zřetězení jednoduchých transformací, výpočet inverzní transformace, ...

Posunutí v rovině



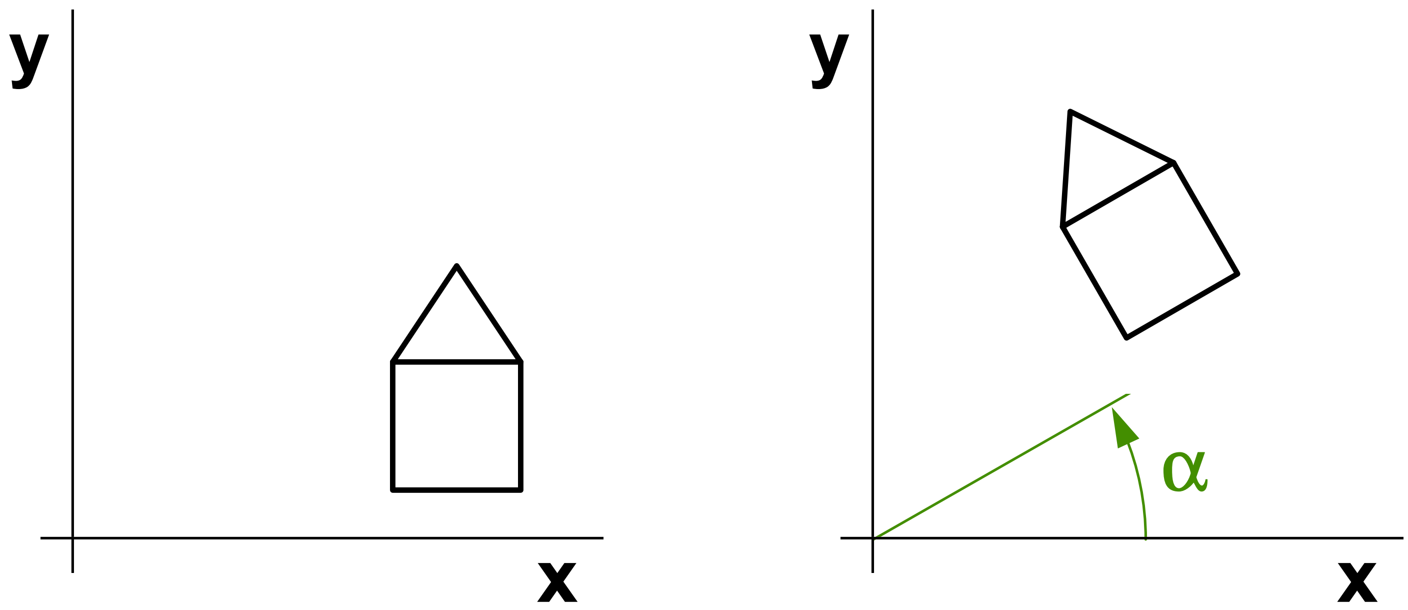
$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x & d_y \end{bmatrix}$$

Maticové transformace

- násobení vektoru souřadnic **maticí zprava**
  - kartézské souřadnice bodu **[x,y]** tvoří **řádkový vektor**
  - **transformační matice** je čtvercová (v rovině má rozměr 2×2)

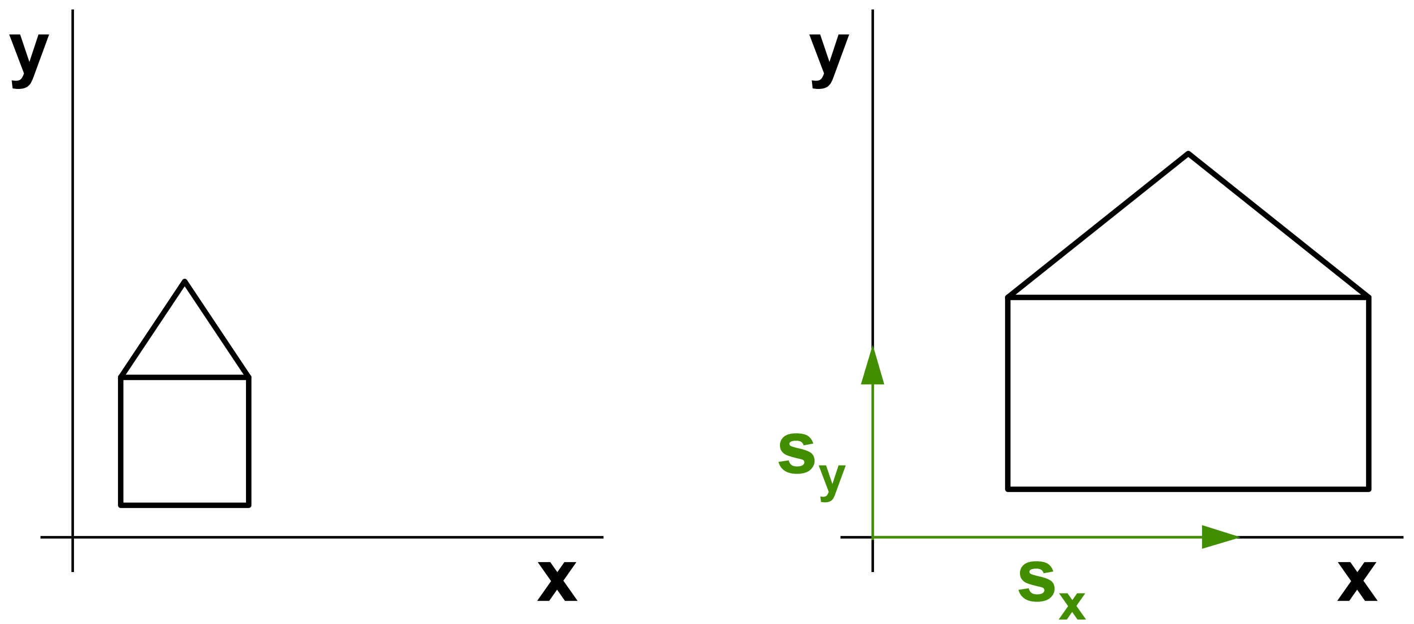
$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$$

Otočení v rovině (kolem počátku)



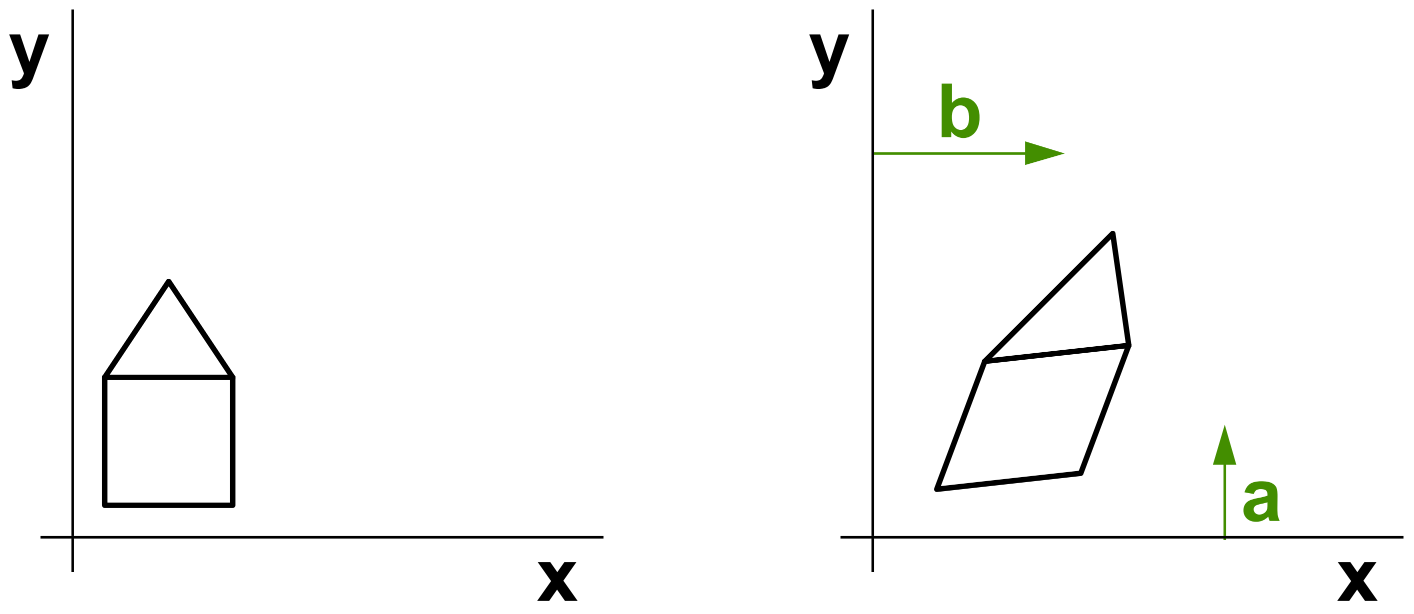
$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Zmenšení/zvětšení v rovině



$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

Zkosení v rovině



$$\mathbf{Sh}(a,b)=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 1\end{bmatrix}$$

Homogenní souřadnice

- jednotná reprezentace **afinních transformací**
  - transformace zachovávající rovnoběžnost
  - **posunutí** nelze v kartézských souřadnicích reprezentovat maticově
- nejpoužívanější **neafinní transformace**
  - **perspektivní transformace** (projekce)
- reprezentace složených transformací
  - násobení matic (asociativita)

Algebraická motivace

Přímka v rovině má souřadnice **[a,b,c]** (mnohoznačné):

$$a\cdot x + b\cdot y + c = 0,$$

bod v rovině má souřadnice **[x,y]** (jednoznačné).

Úloha 1: hledání **přímky [a,b,c]** procházející dvěma danými body $[x_1,y_1]$ a $[x_2,y_2]$:

$$a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c = 0$$
$$a\cdot x_2 + b\cdot y_2 + c = 0$$

soustava **(1)**

Algebraická motivace

Úloha 2: hledání **bodu [x,y]**, ve kterém se protnou dvě dané přímky $[a_1,b_1,c_1]$ a $[a_2,b_2,c_2]$:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 &= 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{soustava } \mathbf{(2)}$$

Soustava (1) má vždy (nekonečně mnoho) řešení,
soustava (2) má řešení jen pokud není $a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$

Algebraická motivace

Po rozříření roviny o **nevlastní body** a zavedení **homogenních souřadnic [x,y,w]** budou obě předchozí úlohy symetrické a soustava **(2')** bude vždy řešitelná:

$$\begin{aligned} a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c\cdot w_1 &= 0 \\ a\cdot x_2 + b\cdot y_2 + c\cdot w_2 &= 0 \end{aligned}$$

soustava **(1')**

$$\begin{aligned} a_1\cdot x + b_1\cdot y + c_1\cdot w &= 0 \\ a_2\cdot x + b_2\cdot y + c_2\cdot w &= 0 \end{aligned}$$

soustava **(2')**

Převody souřadnic

Kartézské na homogenní:

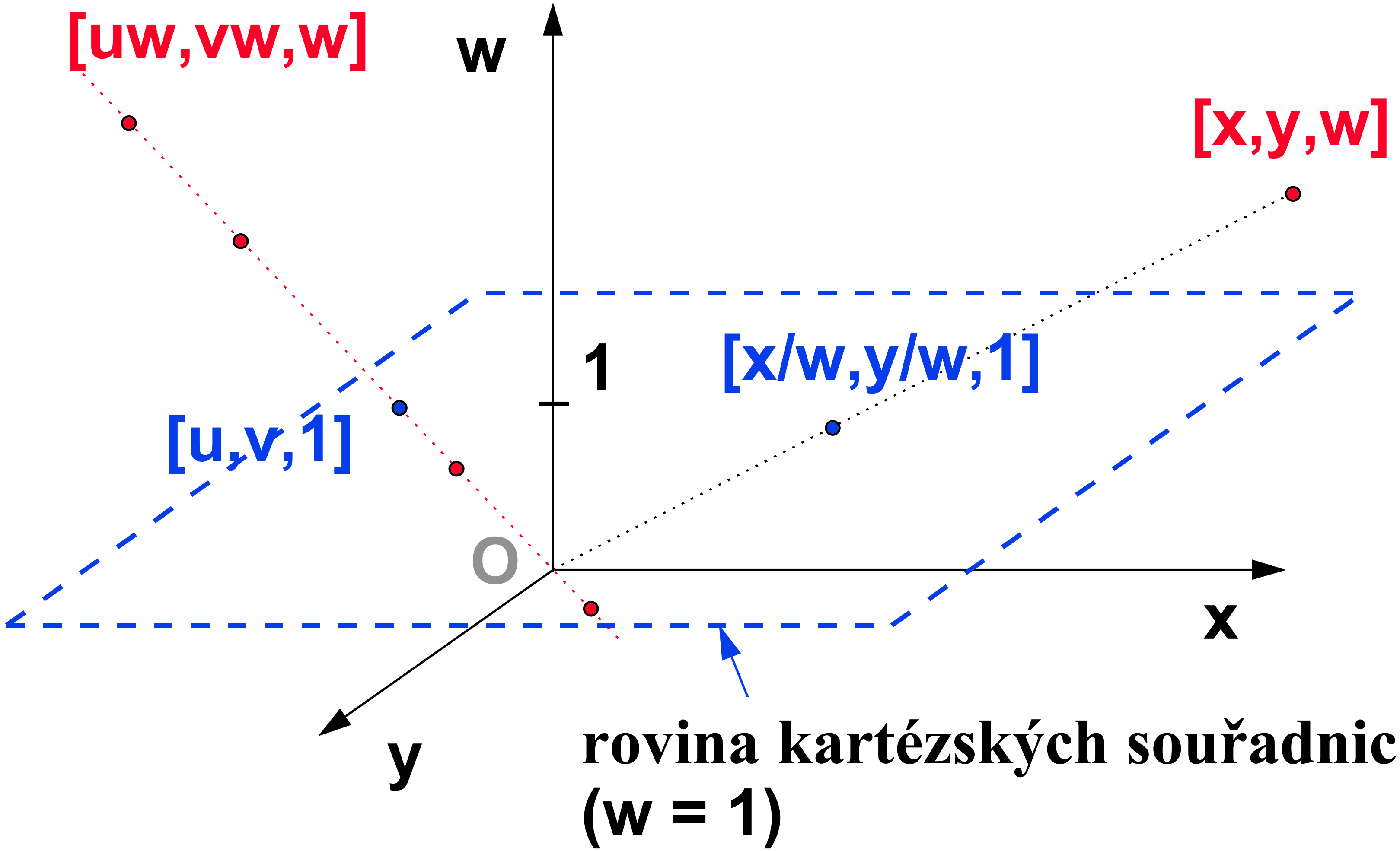
$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Homogenní na kartézské (jen vlastní body):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{w} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{w}} & \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{w}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$$

Geometrická představa



Homogenní transformační matice

Posunutí
(“translation”)

$$T(t_x, t_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}$$

Otočení (“rotation”)
kolem počátku

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zmenšení/zvětšení
(“scale”)

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogenní transformační matice

Zkosení
("shear")

$$\mathbf{Sh(a,b)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

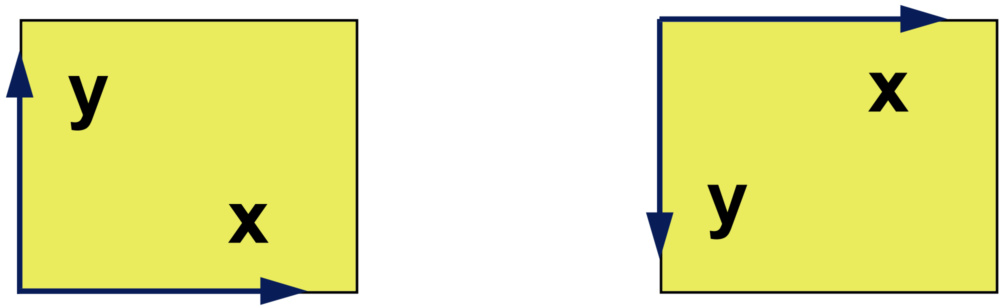
Složené transformace:

$$\left(\left(\left(\mathbf{[x,y,w]} \cdot \mathbf{T_1}\right) \cdot \mathbf{T_2}\right) \cdot \mathbf{T_3}\right) = \mathbf{[x,y,w]} \cdot \left(\mathbf{T_1} \cdot \mathbf{T_2} \cdot \mathbf{T_3}\right)$$

Otočení o úhel α kolem bodu **[x,y]**:

$$\mathbf{R(x,y,\alpha)} = \mathbf{T(-x,-y)} \cdot \mathbf{R(\alpha)} \cdot \mathbf{T(x,y)}$$

Transformace v průmětně



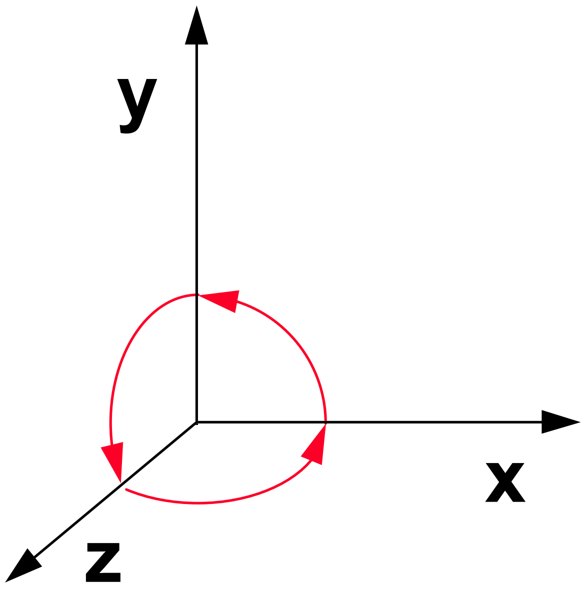
souřadné systémy na obrazovce

Převod reálných souřadnic do **souřadnic zobrazovaného okna:**

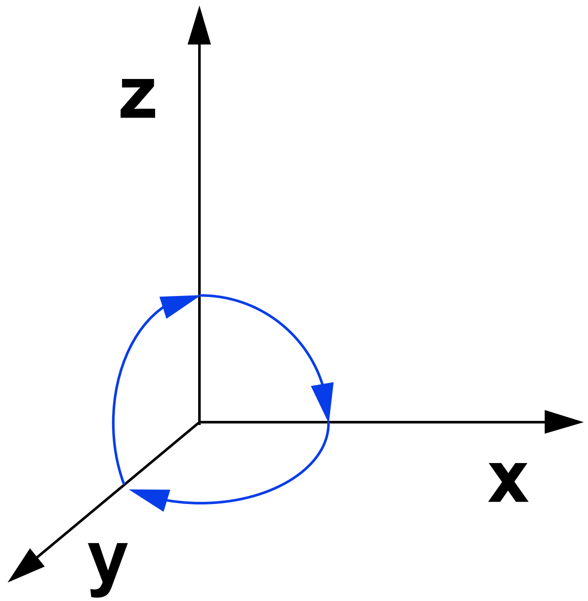
$$X_{int} = \text{round}\ (\ D_x + S_x * X_{re}\ )$$

$$Y_{int} = \text{round}\ (\ D_y + S_y * Y_{re}\ )$$

Prostorové souřadnice



levotočivý systém
("right-handed")



pravotočivý systém
("left-handed")

Homogenní souřadnice

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{w} & \frac{y}{w} & \frac{z}{w} \end{bmatrix} \quad (w \neq 0)$$

Maticová transformace:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}$$

Homogenní transformační matice

Posunutí

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

Zkosení

$$Sh(a, b, c, d, e, f) = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ c & 1 & d & 0 \\ e & f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogenní transformační matice

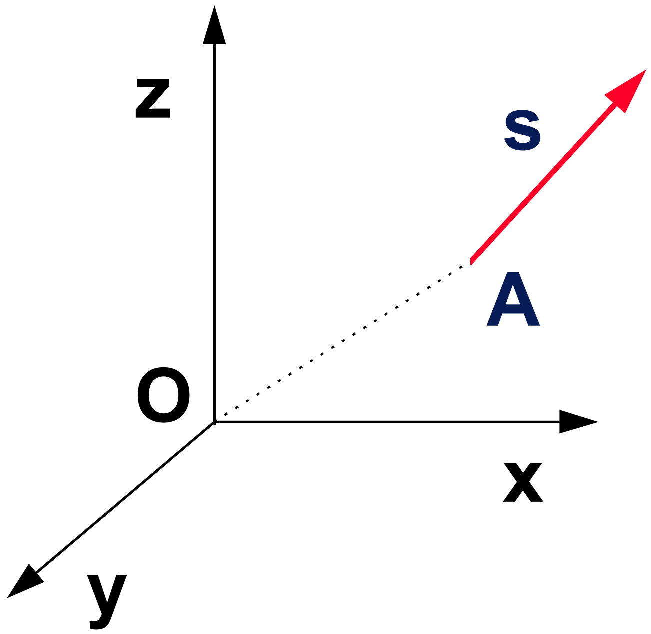
Otočení
kolem osy **y**

$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Otočení
kolem osy **z**

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Přenos polopřímky do osy **z**



Polopřímka je zadána bodem **A** a směrovým vektorem **s**

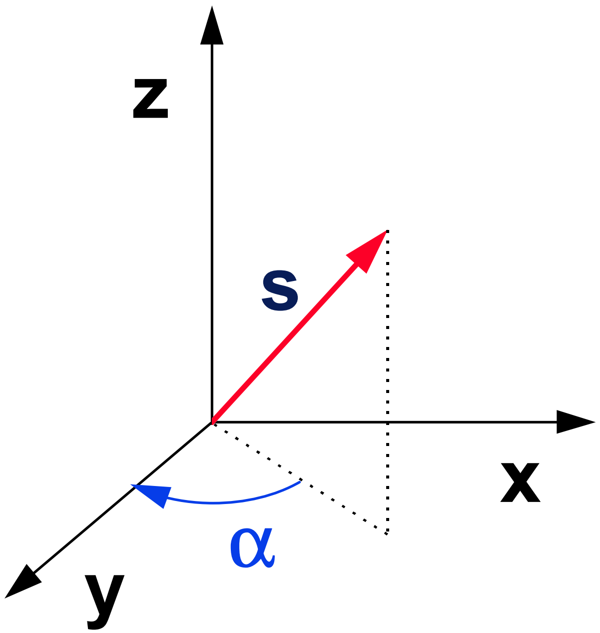
$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(-\mathbf{A})$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{T}(\mathbf{A})$$

1. krok:

přenesení bodu **A** do počátku

Přenos polopřímky do osy **z**



$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(-\mathbf{A}) \cdot \mathbf{R_z}(\alpha)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{R_z}(-\alpha) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{A})$$

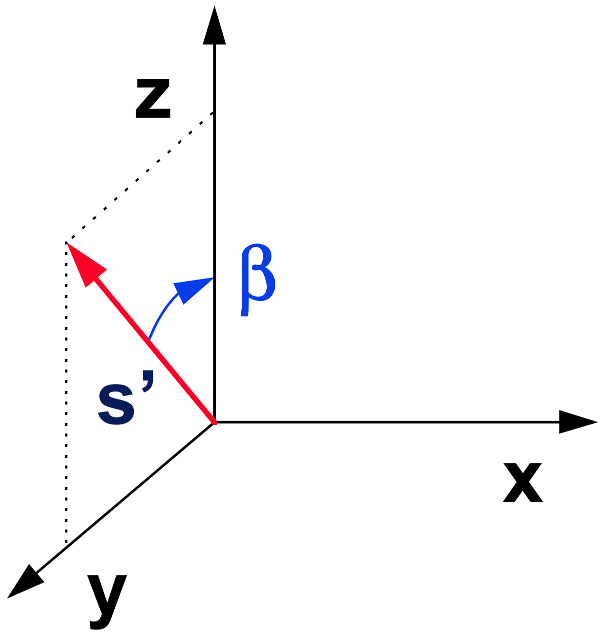
$$\cos\alpha = \frac{s_y}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{s_x}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

2. krok:

otočení polopřímky do roviny **yz** (okolo osy **z**)

Přenos polopřímky do osy **z**



$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(-\mathbf{A}) \cdot \mathbf{R_z}(\alpha) \cdot \mathbf{R_x}(\beta)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{R_x}(-\beta) \cdot \mathbf{R_z}(-\alpha) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{A})$$

$$\cos\beta = \frac{s_z}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}}$$

$$|\sin\beta| = \frac{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}}$$

3. krok:

otočení polopřímky do osy **z** (okolo osy **x**)

Aplikace transformace **M**

$$M(A,s) = T(-A) \cdot R_z(\alpha) \cdot R_x(\beta)$$

$$M(A,s)^{-1} = R_x(-\beta) \cdot R_z(-\alpha) \cdot T(A)$$

Otočení kolem dané osy:

$$R(A,s,\theta) = M(A,s) \cdot R_z(\theta) \cdot M(A,s)^{-1}$$

Zrcadlové převrácení podle dané roviny:

$$Mirror(A,n) = M(A,n) \cdot S(1,1,-1) \cdot M(A,n)^{-1}$$

Výpočet inverzní transformace

1. inverze matice: $\mathbf{M}^{-1}$

2. po krocích:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \boxed{\mathbf{C}}$$

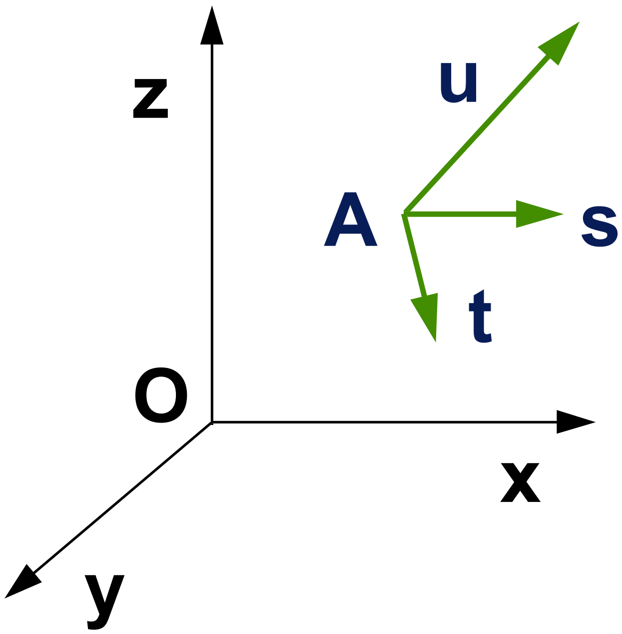
$$\mathbf{M}^{-1} = \boxed{\mathbf{C}^{-1}} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

3. transpozice (ortonormální matice):

$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}$ **pro ortonormální matici R**

(ortonormální jsou např. všechny **rotační matice**)

Převod mezi souřadnými systémy



Souřadný systém je zadán svým počátkem **A** a trojicí vektorů **s, t, u**

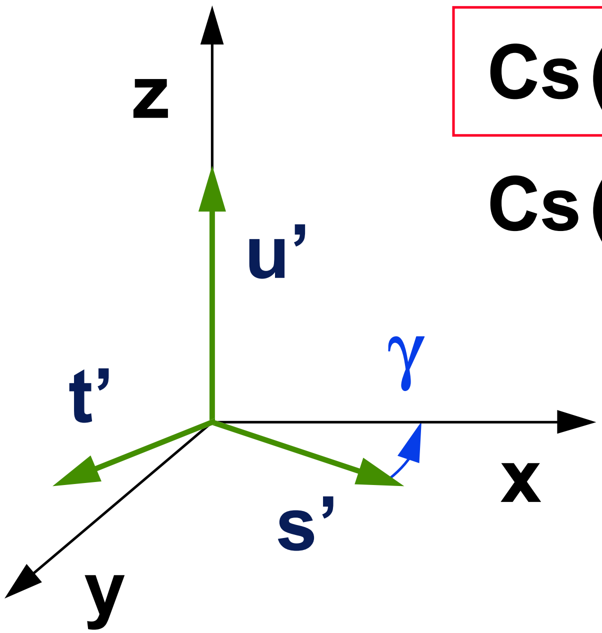
$$Cs = M(A, u)$$

$$Cs^{-1} = M(A, u)^{-1}$$

1. krok:

přenesení polopřímky **(A,u)** do osy **z**

Převod mezi souřadnými systémy



$$\boxed{Cs(A,s,t,u) = M(A,u)\cdot R_z(\gamma)}$$

$$Cs(A,s,t,u)^{-1} = R_z(-\gamma)\cdot M(A,u)^{-1}$$

$$\cos\gamma = \frac{\left|s\cdot M(A,u)\right|_x}{\left|s\cdot M(A,u)\right|}$$

$$\sin\gamma = \frac{\left|s\cdot M(A,u)\right|_y}{\left|s\cdot M(A,u)\right|}$$

2. krok:

ztotožnění os **s'**$\rightarrow$**x** a **t'**$\rightarrow$**y** (otočením kolem **z=u'**)

Konec

Další informace:

- **J. Foley, A. van Dam, S. Feiner, J. Hughes**: ***Computer Graphics, Principles and Practice***, 201-227
- **Jiří Žára a kol.**: ***Počítačová grafika***, principy a algoritmy, 73-84
- **LAN** na Malé Straně:
  - **barbora\usr:\vyuka\pelikan\6**