Matematika pro geometrickou morfometrii

Václav Krajíček

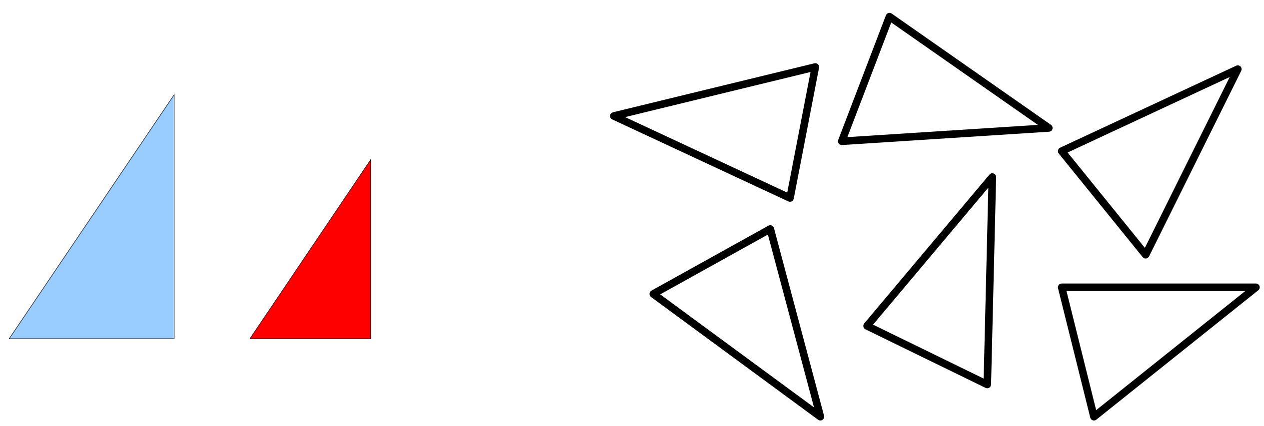
Vaclav.Krajicek@mff.cuni.cz

Department of Software and Computer Science Education
Faculty of Mathematics and Physics
Charles University

Přednáška 2

Opakování

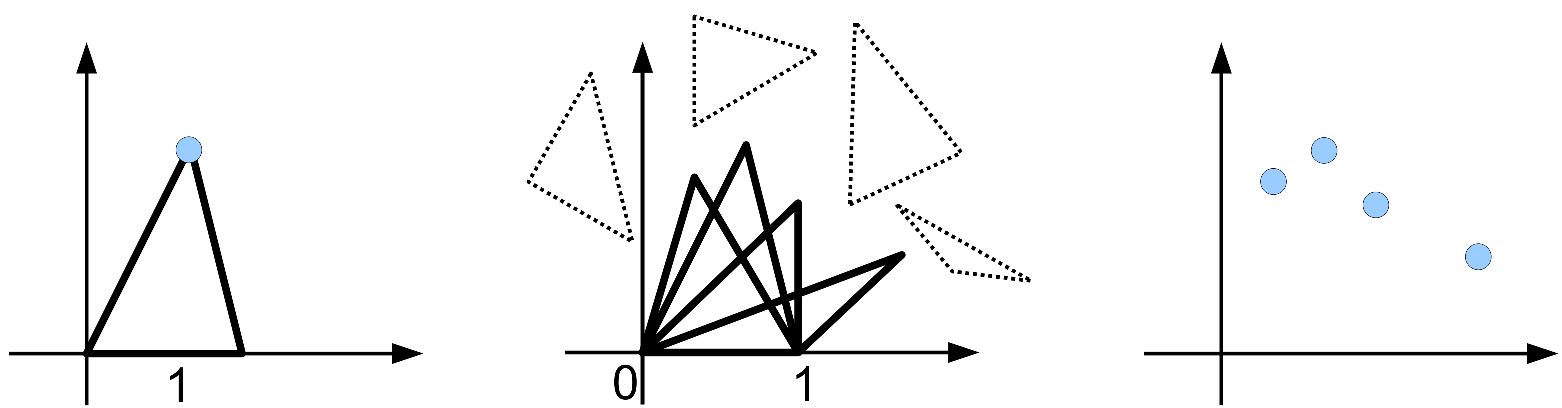
- http://cgg.mff.cuni.cz/~vajicek/gmm/
- GMM = {geometrie, statistika, biologie, antropologie,...}
  - Studium tvaru a jeho změn
- Tvar = Geometrická data (souřadnice) - {velikost (zvětšení), poloha (posunutí, otočení)}



- Zvětšení, posunutí, otočení → transformace souřadnic
  - lineární, realizovatelné maticemi (lineární algebra)

Opakování

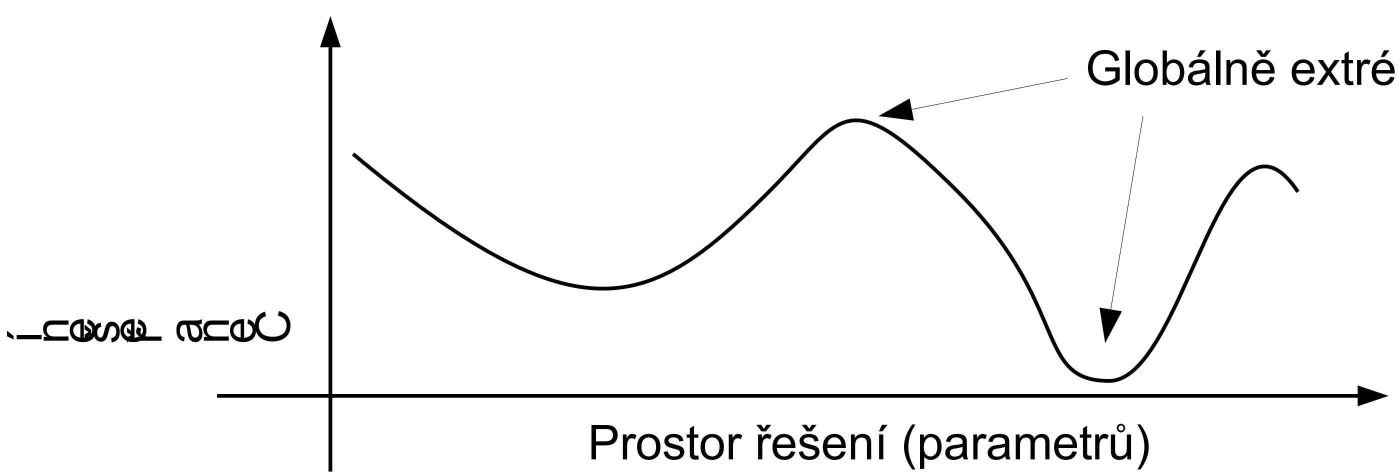
- Tvarové proměnné
  - Jednoznačnost, porovnatelnost mezi tvary ve skupině
  - Eliminace rozdílné velikosti a polohy



- Registrace – obecně hledání transformace jednoho datového souboru na druhý
  - V našem případě pouze posunutí, otočení, zvětšení
- Dvoubodová registrace (Booksteinova registrace)

Prokrustovská analýza

- „Lepší“ alternativa
  - Funguje v 3D, není ovlivněna výběrem žádné základny
- Hledání nejlepších parametrů transformace (posunutí, škálování, rotace) ve smyslu nejmenší vzdálenosti odpovídajících si landmarků (nejmenších čtverců)
- Optimalizační problém
  - Určit cenu (ohodnotit) řešení,hledat nejlevnější řešení



Prokrustovská analýza

(1) Problém množiny vzorků

- Hledám takové transformace jednotlivých vzorků, aby celkový součet vzdáleností (přes všechny vzorky a jejich landmarky) od průměru byl nejmenší
- Problém: Průměr se počítá až z transformovaný vzorků

(2) Problém dvojice

- Referenční a pohyblivý tvar
- Transformace pohyblivého tvaru aby se přiblížil referenčnímu

- Problém (1) pomocí řešení posloupnosti problémů (2)
  - Jeden z vzorků vybrán jako průměr
  - Zarovnání po dvou a spočítání nového průměru

Prokrustovská analýza

- Jak ohodnotit transformaci?

$$X' = \frac{X - \mathbf{1}^T \boldsymbol{t}}{CS} H = YH \qquad \left\| YH - \overline{X} \right\| \to min$$

  - $\overline{X}$ referenční tvar, kterému se chci nejvíc přiblížit
  - **t** je poloha těžiště, posun těžiště do počátku
  - CS je středová velikost, škálování na jednotkovou velikost
  - H je rotační matice, úhel který ji definuje se spočítá minimalizací vzdálenosti k referenčnímu tvaru
  - Norma || || odpovídá součtu čtverců (součtu vzdáleností na druhou odpovídajících si landmaků)

Prokrustovská analýza

MFF UK
CGG
Prague

- Norma a stopa matice

$$\|A\| = trace\left(A^T A\right)$$

- Dosazení

$$\|YH - \overline{X}\| = trace\left(Y^T Y + \overline{X}^T \overline{X}\right) - 2\,trace\left(\overline{X}^T YH\right)$$

- Maximalizace posledního členu a SVD

$$trace\left(\overline{X}^T YH\right) = trace\left(USV^T H\right) = trace\left(SV^T HU\right) = trace\left(SQ\right)$$

$$trace\left(SQ\right) \rightarrow max$$

- Q je jednotková, protože tak maximalizuje stopu

$$Q = V^T HU = I$$

$$\overline{X}^T Y = USV^T \qquad H = VU^T$$

Co musíme udělat

OPA - demonstrace

- Problém (2)
- Octave/Matlab

$$Y = \frac{X - \mathbf{1}^T \boldsymbol{t}}{CS}$$

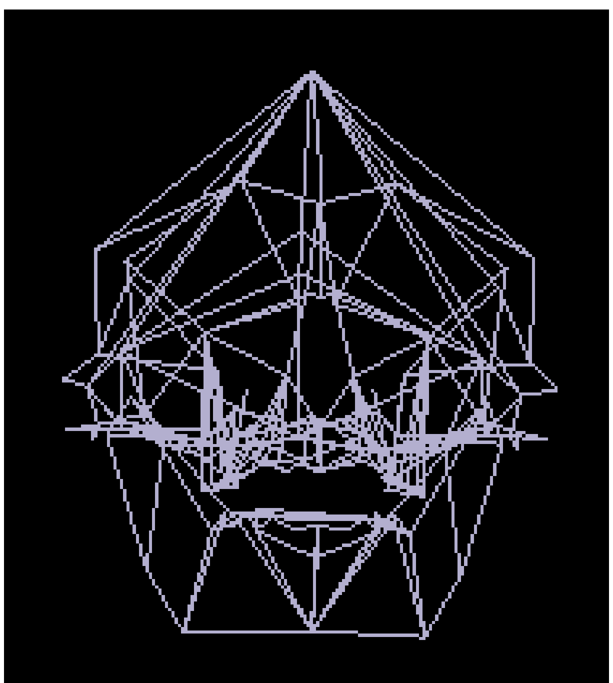
```
>> n=size(X, 1);
>> t=sum(X)./n;
>> XX=X-repmat(t,n,1);
>> ssd=sum(sum(XX.^2)');
>> cs=sqrt(ssd);
>> res=lmc./cs;
```

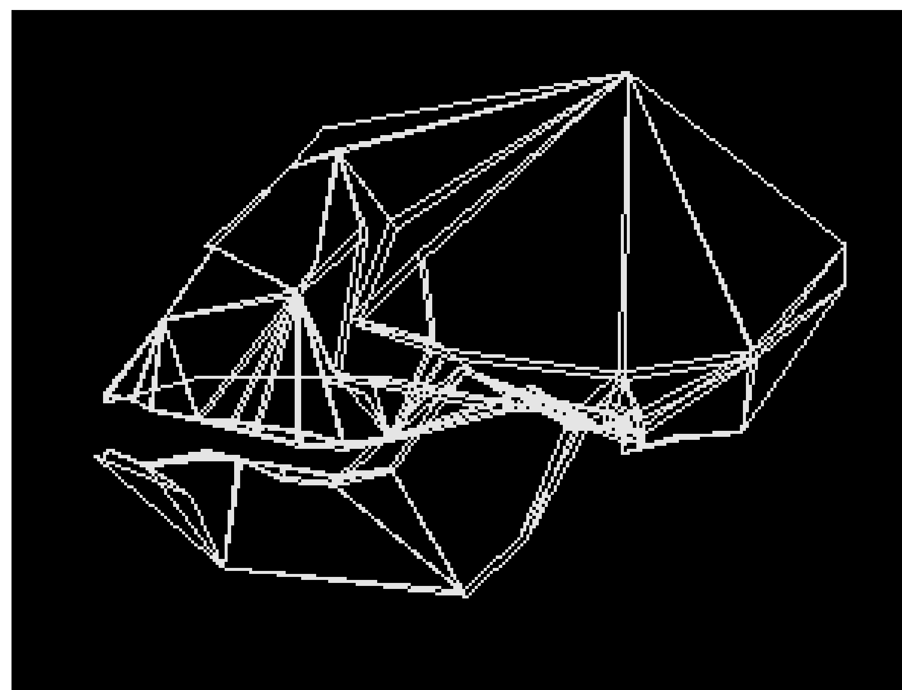
$$\overline{X}^T Y = USV^T \qquad H = VU^T$$

```
>> M=nB'*nA;
>> [U S V]=svd(M);
>> H=V*(U');
>> nAH = nA*H;
```

GPA - demonstrace

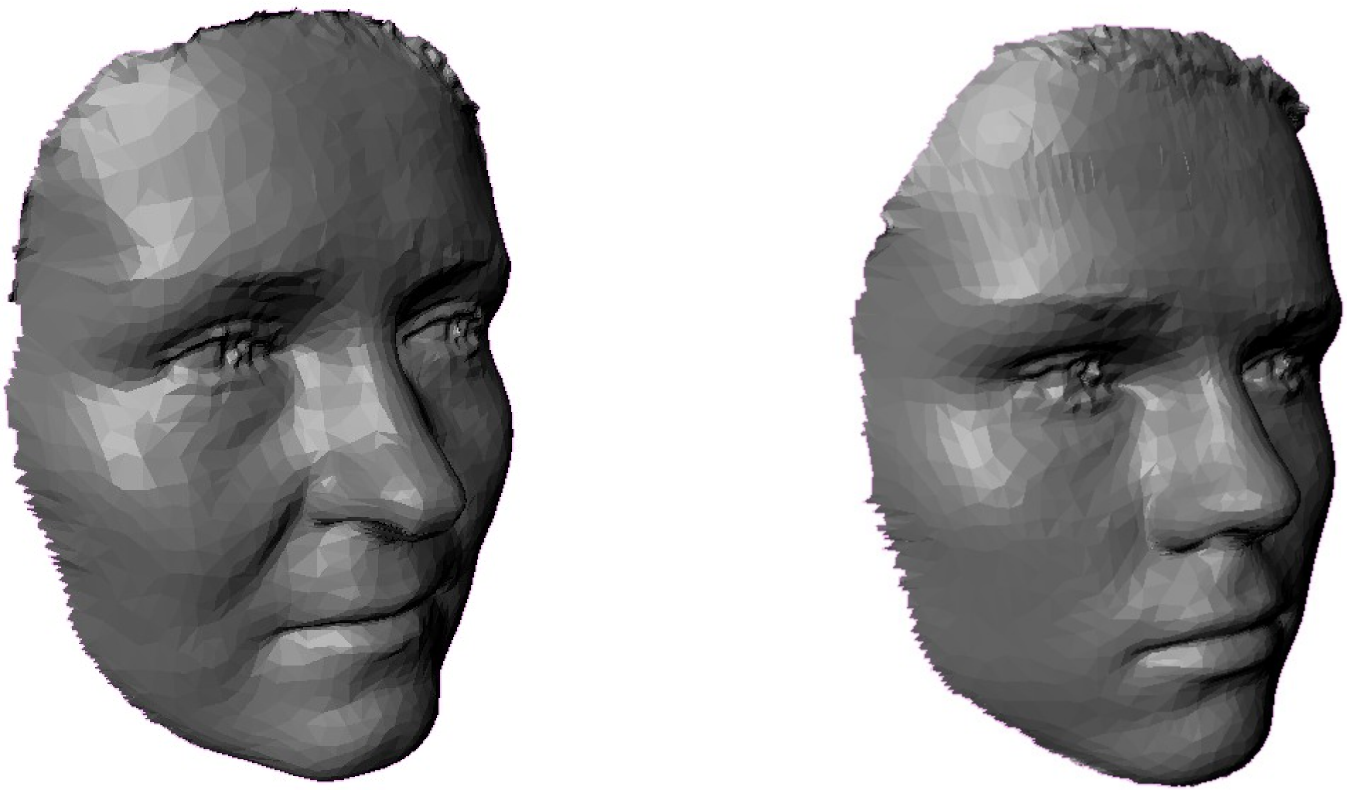
- Proces zarovnání celé množiny, problém (1)
  - Matlab/Octave
- Past/Morphologica
- Ukázka ve 3D





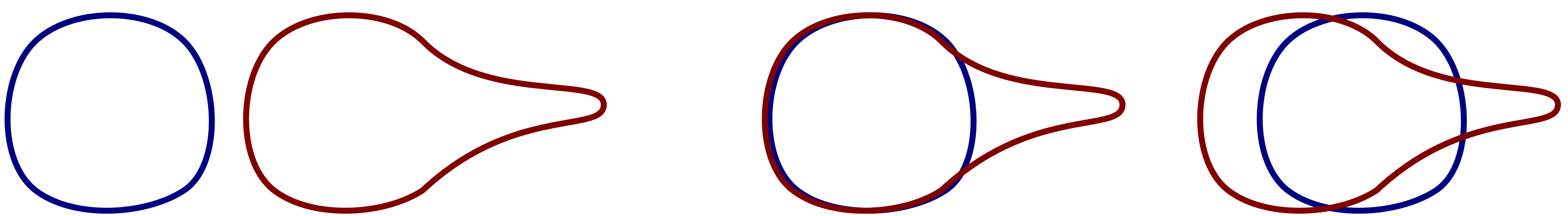
3D GPA

- Obličeje



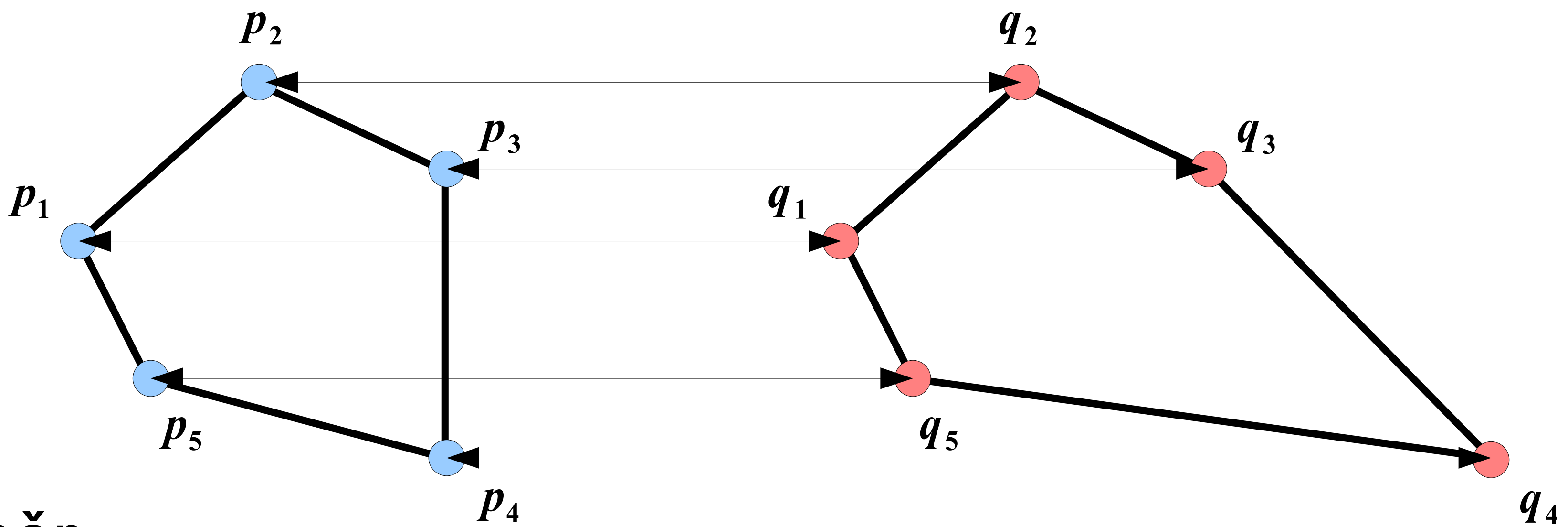
GPA - shrnutí

- Výhody
  - Rozšiřitelné do 3D, Stabilní, rychlá
- Nevýhody
  - Všechny landmarky mají stejnou váhu, není podchycena možná různá stabilita landmarku
  - Extrémní jedinec může rozhodit zarovnání celé skupiny, protože chyba se rozloží do všech vzdáleností
  - Řešení: použití mediánu, předvýběr



Resistant-fit analýza

- Posunutí, otočení a rotace v GPA se určí pomocí mediánu jednotlivých odpovídajících si landmarků



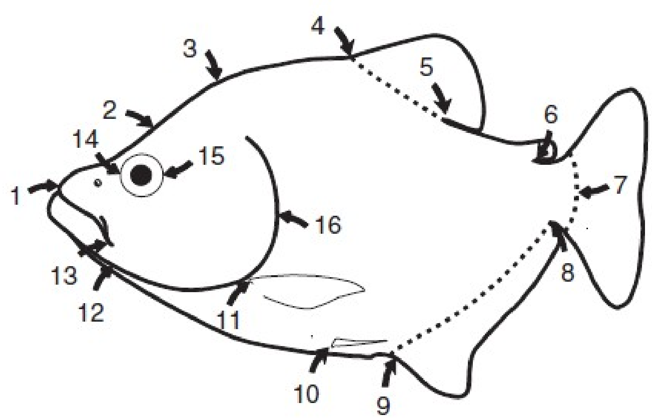
- Průměr

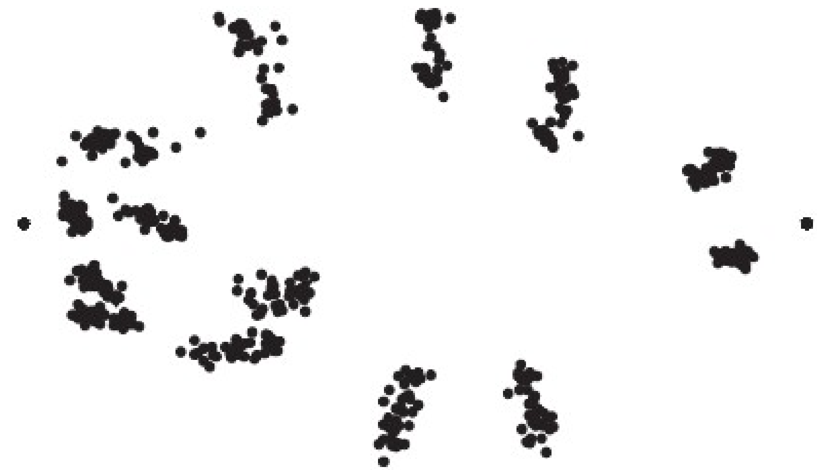
$$t=((p_1-q_1)+(p_2-q_2)+(p_3-q_3)+(p_4-q_4)+(p_5-q_5))/5=3.2$$

- Medián

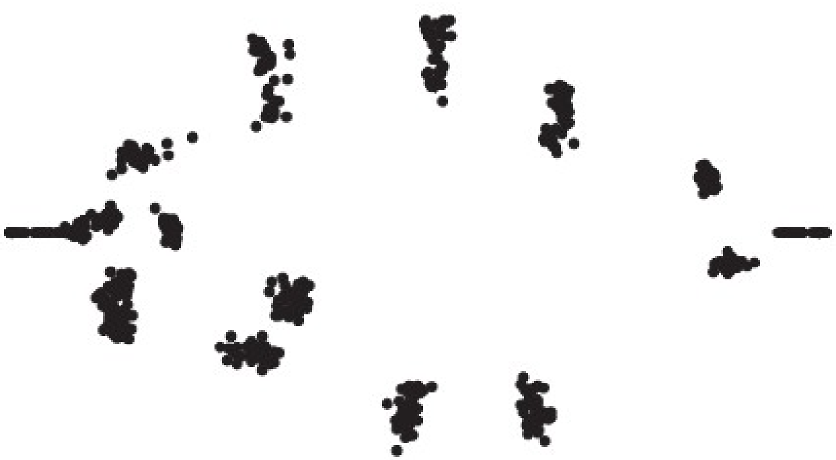
$$t=\{p_1-q_1, p_2-q_2, p_3-q_3, p_4-q_4, p_5-q_5\}=\{3,3,\mathbf{3},3,4\}=3$$

Srovnání registrací





Bookstainova registrace

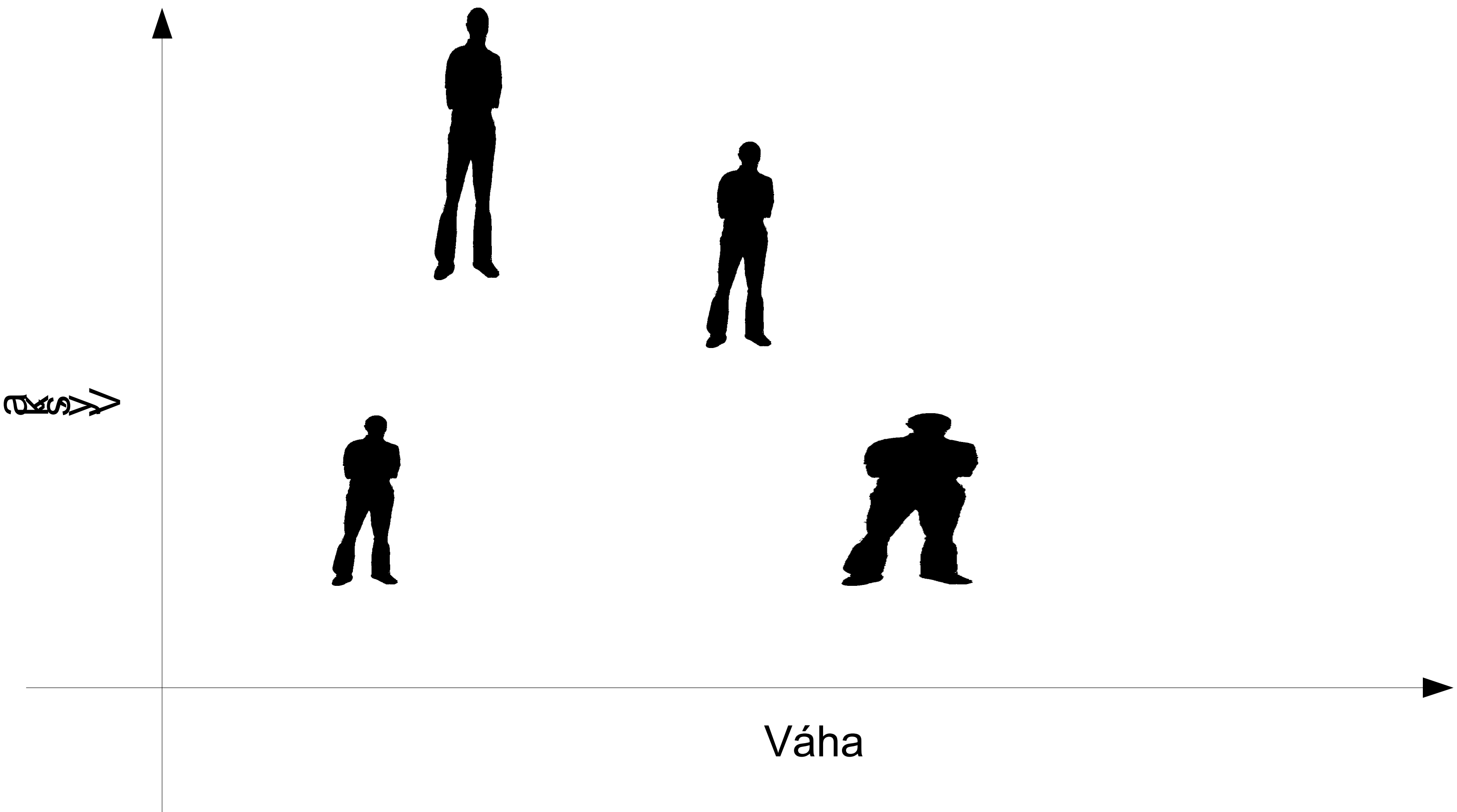


Klouzavá základna

Prokrustovská registrace

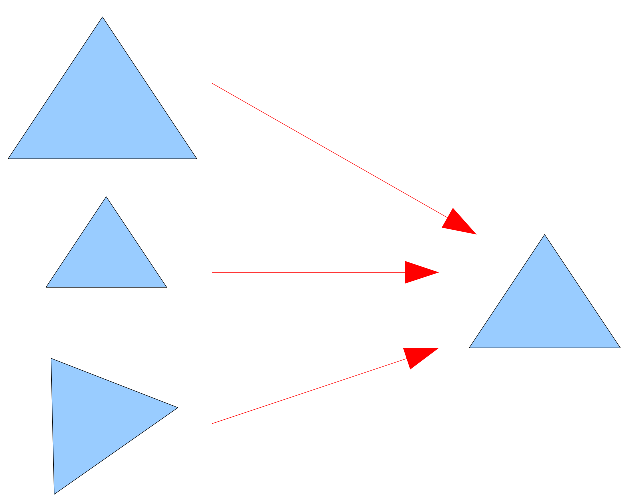
Parametrický prostor

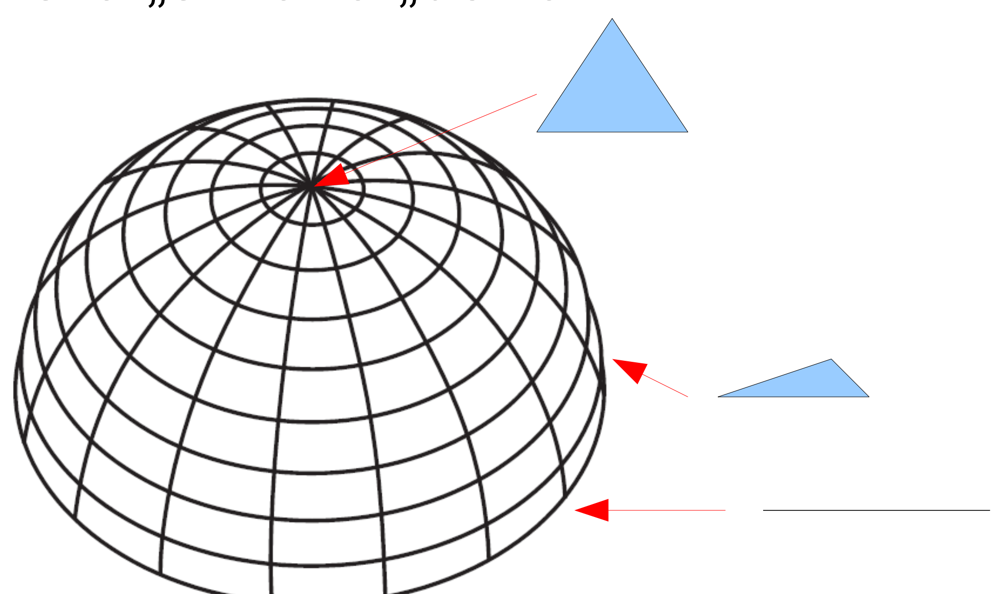
- Prostor lidí



Prostor trojúhelníků

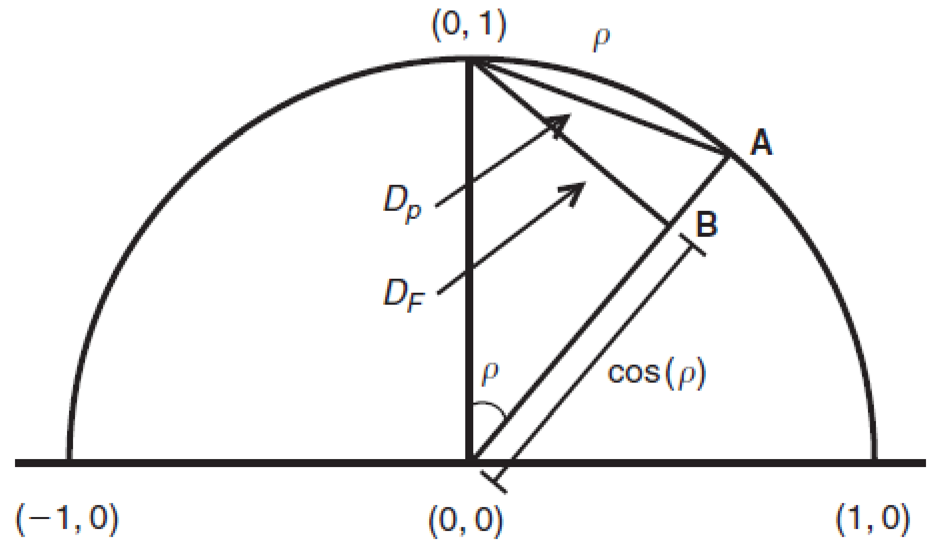
- Na začátku mám souřadnice vrcholů trojúhelníků (konfigurační prostor)
- Po zarovnání trojúhelníků získám prostor, který má ve skutečnosti jen dva stupně volnosti
- Prostor je omezený → tvoří povrch polokoule
  - Dva parametry jsou zemská „šířka“ a „délka“





Prostor trojúhelníků

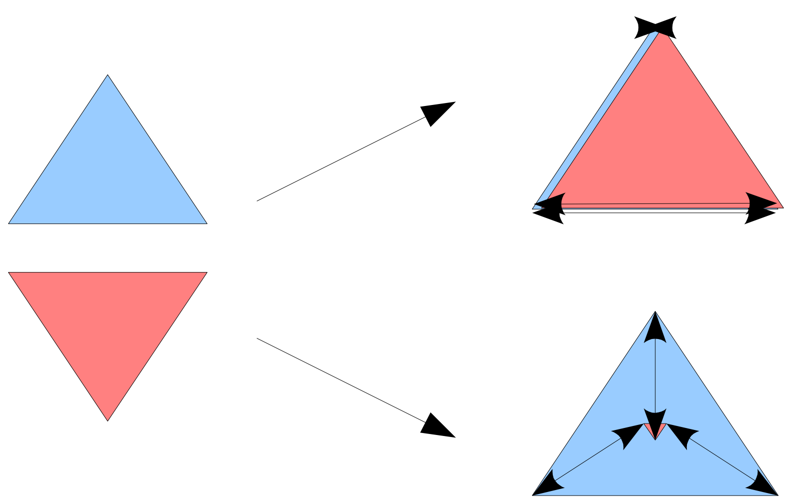
- Částečná prokrustovská vzdálenost
  - Přímá vzdálenost mezi dvěma body na povrchu
  - Tvar přecházející z jednoho do druhého nemá jednotkovou velikost
  - Odpovídá 2 sin(φ/2)
- Prokrustovská vzdálenost
  - Vzdálenost po povrchu
  - Odpovídá φ

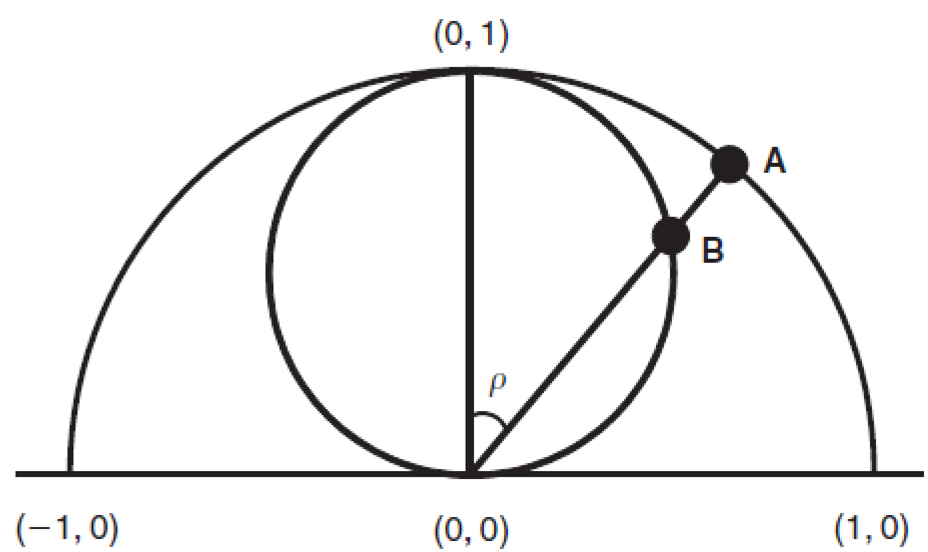


- Úplná prokrustovská vzdálenost
  - Bez ohledu na jednotkovou velikost, velikost je cos(φ)
  - Vzdálenost nejkratší, odpovídá sin(φ)

Kendáluv prostor

- Prostor indukovaný úplnou prokrustovskou vzdálenosti
- Vzájemné vzdálenosti libovolných bodů v prostoru odpovídají úplné prokrustovské vzdálenosti
  - To neplatilo u prostoru trojúhelníků
- Odpovídá povrchu koule o poloměru 1/2





Důsledky zakřivení prostoru

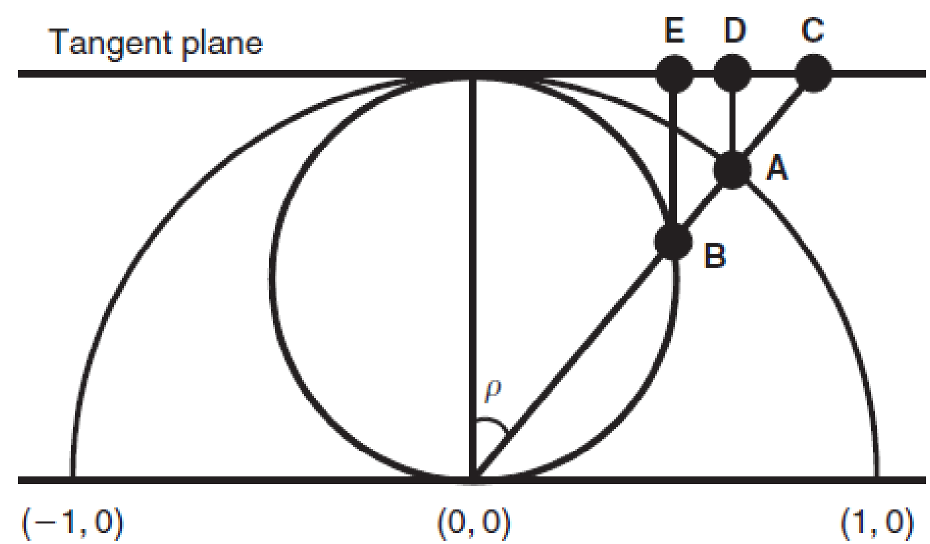
- Statistické metody pracují na ploše a ne sféře
  - Některé mohou pracovat v zakřiveném prostoru, jiné ne
- Chceme používat jednoduchou eukleidovskou vzdálenost mezi vektory tvarových proměnných

$$E_d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sqrt{\sum_i^n (a_i-b_i)^2}$$

- Dá se použít pro porovnávání podobných tvarů při projekci do tečné roviny okolo referenčního tvaru
- Příklad:
  - Teoreticky můžu srovnávat lebky odlišných živočichů pokud mají stejný počet landmarků
  - Vzdálenosti nebudou extrémně odlišné (řádově)

Tečný prostor

- Rovina (platí eukleidovská vzdálenosti, LA)
- Dotýká se prostoru tvarů v jednom bodě (referenční tvar, např. průměrný tvar)
  - Čím dále od tohoto bodu tím více jsou **vzájemné** vzdálenosti deformované
- Dvě možnosti, projekce
  - Pravoúhlá
  - Stereografická

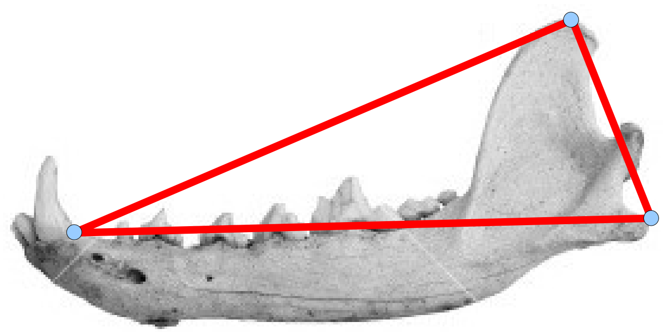


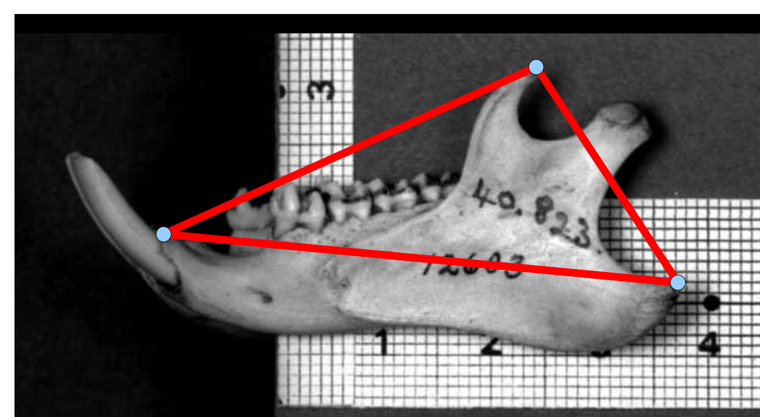
Příklad

- Částečná prokrustovská vzdálenost vs. úplná prokrustovská vzdálenost dvou odlišných tvarů
- tpsSmall

Svišť, Kojot, Lev

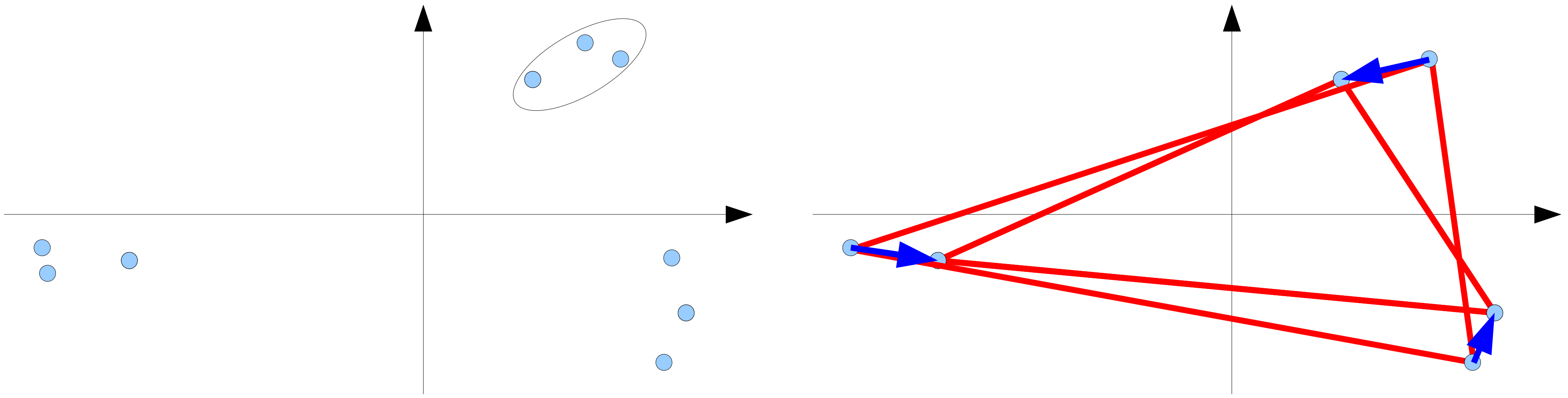
- Pokus o porovnání neporovnatelného
  - GPA + měření jedinec-průměr a OPA a jedinec-jedinec
  - Prokrustovská vzdálenost jedinec-jedinec + měření





Zobrazení rozdílů

- Skupina, nebo dvojice
- Pro jednoduché konfigurace mohou stačit překryté exempláře
- Scatterplot

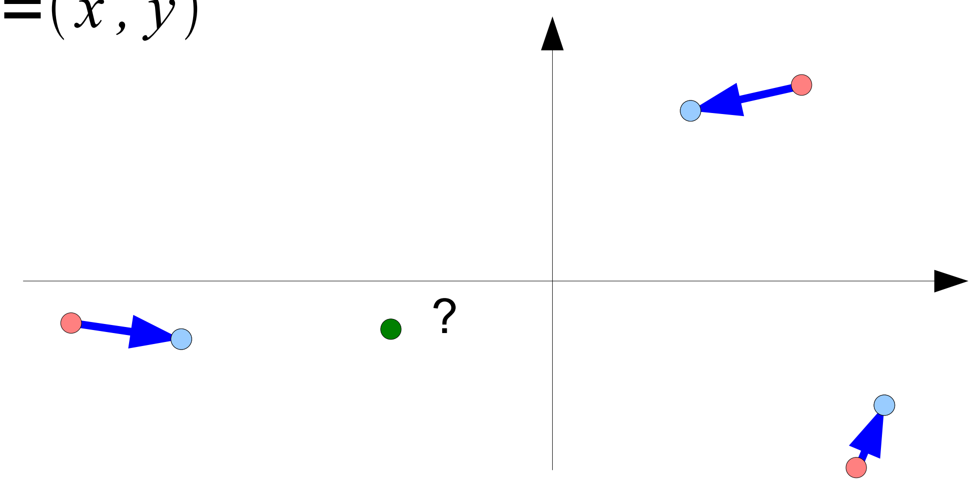


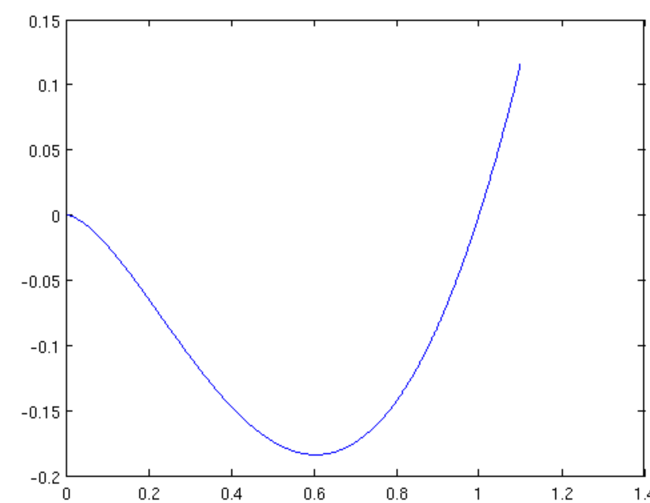
TPS

- Větší počet landmarků → mnoho šipek, nepřehledné
- Zobrazení pomocí deformované mřížky
- Vytvoření spojitého prostoru pomocí interpolace
  - Přesně znám posun landmarků
  - Co je mezi, spočítám TPS interpolací

$$\boldsymbol{TPS}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_1 x + \boldsymbol{a}_2 y + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i U(\|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{x}\|) \qquad U(t) = t^2 \ln(t)$$

$$\boldsymbol{x} = (x, y)$$





TPS odvození

$$TPS_x(\boldsymbol{x}) = \overbrace{a_{0x} + a_{1x}x + a_{2x}y}^{\text{Afinní část}} + \overbrace{\sum_{i=1}^{n} w_{ix} U(\|\boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{x}\|)}^{\text{Elastická část}}$$

Neznám

- Znám

$$TPS_x(\boldsymbol{p_j}) = q_{jx} \; pro \; \forall \; j \in (1, n)$$

- 3+n neznámých, n rovnic → chybí tři rovnice abychom měli jednoznačné řešení

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} w_{ix} p_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} w_{ix} p_{iy} = 0$$

TPS - odvození

- Soustava rovnic

$$(1, p_{jx}, p_{jy}, U_{1j}, \dots, U_{nj})$$

$$TPS_x(\boldsymbol{p}_j) = a_{0x} 1 + a_{1x} p_{jx} + a_{2x} p_{jy} + \sum_{i=1}^{n} w_{ix} U(\|\boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{p_j}\|) = q_{jx}$$

$$(a_{0x}, a_{1x}, a_{2x}, w_{1x}, \dots, w_{nx})$$

n+3 neznámých

$$\begin{bmatrix} 1 & p_{1x} & p_{1y} & U_{1j} & \dots & U_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p_{nx} & p_{ny} & U_{nj} & \dots & U_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_{1x} & \dots & p_{nx} \\ 0 & 0 & 0 & p_{1y} & \dots & p_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0x} \\ a_{1x} \\ a_{2x} \\ w_{1x} \\ \vdots \\ w_{nx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0x} \\ \vdots \\ q_{nx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

n podmínek daných

3 další podmínky

TPS - odvození

- Soustava rovnic

$$M\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}$$

$$M^{-1} M\,\boldsymbol{w} = M^{-1}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{w} = M^{-1}\boldsymbol{x}$$

- Získám potřebné parametry **w** pro transformační funkci
- Provedu vykreslení
- Levá dolní část M^-1 velikosti n x n se nazývá matice ohybové energie (*Bending energy matrix*)

TPS - ukázka

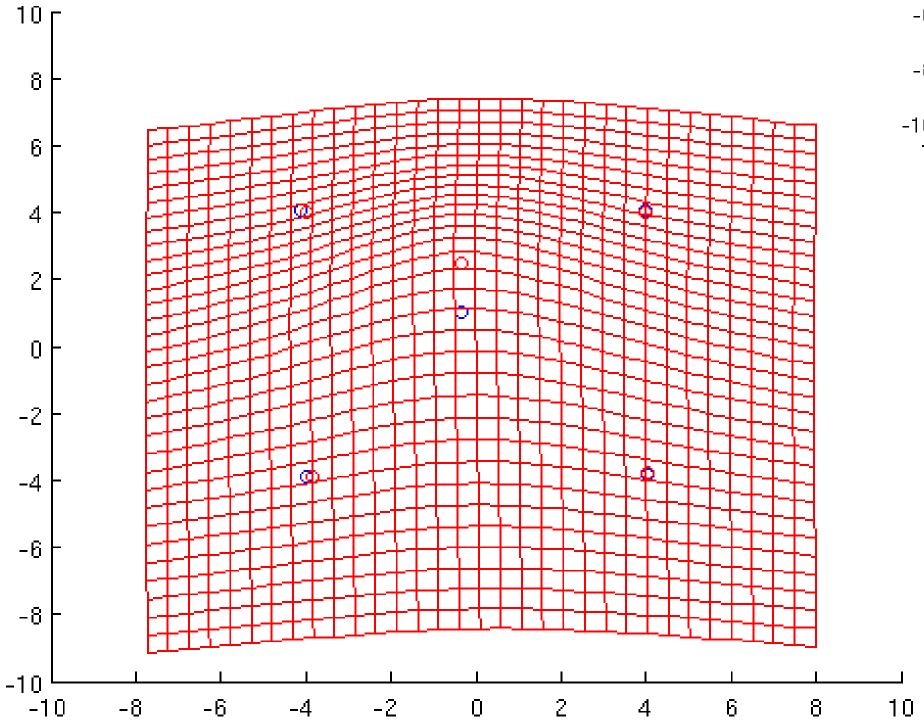
- TPSSplin
- Matlab/Octave
- Získat data → Vyřešit koeficienty → Dosadit

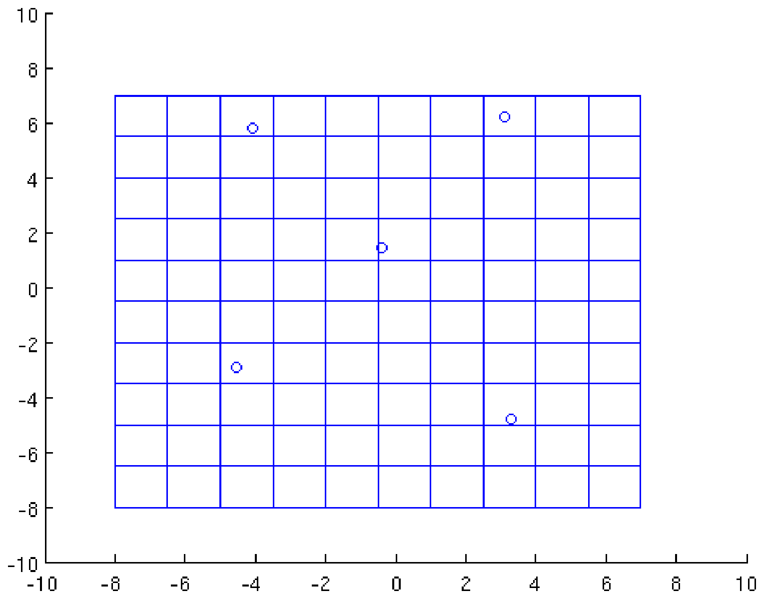
```
>> norm = (repmat(Px', n, 1)-repmat(Px, 1, n)).^2 +
          (repmat(Py', n, 1)-repmat(Py, 1, n)).^2;
>> U = RBF(sqrt(norm));
>> M = [ones(n,1) Px Py U;
        zeros(3,3) [ones(1, n); Px'; Py']];
>> Mi = inv(M);
>> x=[Px; zeros(3,1)];
>> y=[Py; zeros(3,1)];
>> wx=Mi*x;
>> wy=Mi*y;
```

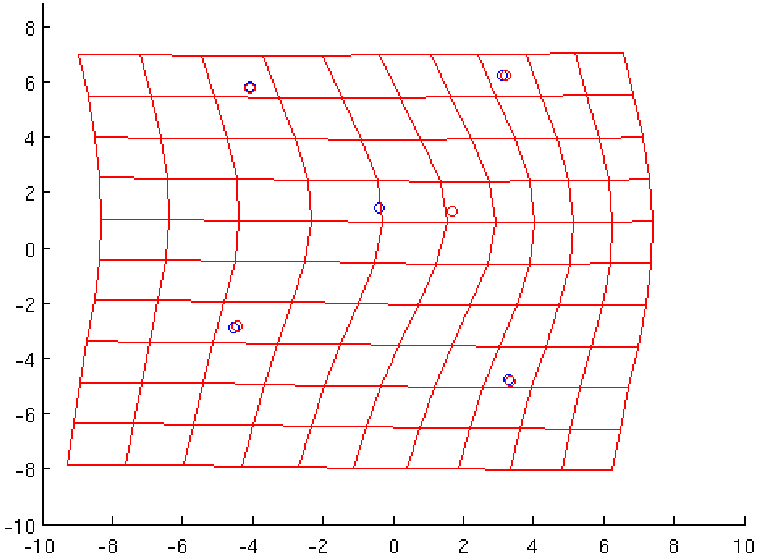
```
>> norm = sum(([Px Py] -
   repmat(X,n,1)).^2, 2);
>> U=RBF(sqrt(norm'));

>> Yx=[1 X U]*wx;
>> Yy=[1 X U]*wy;
```

TPS - ukázka


10 8 6 4 2 0 -2 -4 -6 -8 -10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10


10 8 6 4 2 0 -2 -4 -6 -8 -10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10


8 6 4 2 0 -2 -4 -6 -8 -10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10

TPS - shrnutí

- První použití, D'Arcy Tompson, ruční kreslení
- Inspirace v matematice strojního inženýrství
  - Nekonečně tenký kovový plátek
- Interpolace definovaná všude
  - Může vést k falešným závěrům
- Důležité je husté pokrytí landmarky
- Vizualizace rozdílů jako deformací ve 2D
  - Lze snadno i do 3D, ale problém se zobrazováním
  - Nejčastěji jako 2D řezy, nebo 3D mřížky
- Landmarky se nesmějí nikde „křížit“ → nestabilita

Pozdravte pana Spoka!

- Jiné použití TPS → Rektifikace obrazu
  - Problémy při použití TPS k lokální deformaci obrazu

Přitáhnout prsty k sobě

Vznikající nestabilita

Vzdálená deformace