Matematika pro geometrickou morfometrii

Václav Krajíček

Vaclav.Krajicek@mff.cuni.cz

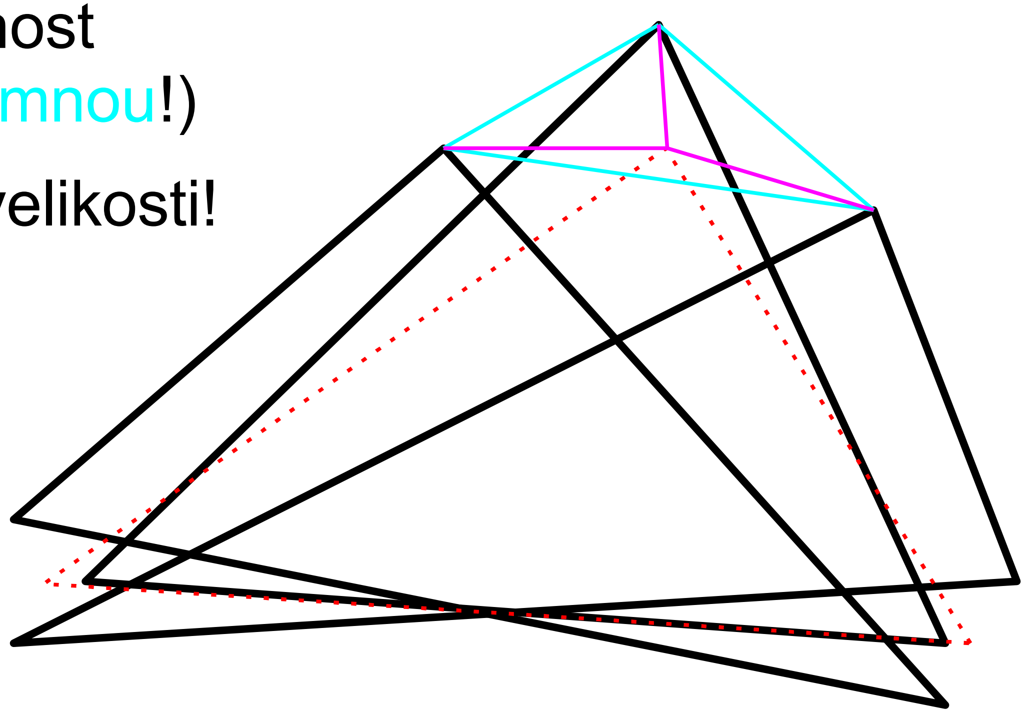
Department of Software and Computer Science Education
Faculty of Mathematics and Physics
Charles University

MFF UK CGG Prague

Přednáška 3

Opakování

- Prokrustovská analýza/transformace/registrace
  - Idea: „Pokud nalezneme takové posunutí, otočení a zvětšení, které minimalizuje **vzájemnou** vzdálenost eliminujeme rozdílnou polohu a velikost“
  - Rozklad na dva problémy (dvojice a množina)
  - Minimalizujeme vzdálenost od průměru (ne vzájemnou!)
  - Zachování jednotkové velikosti!



Prokrustovská analýza

- Norma a stopa matice

$$\|A\| = trace(A^T A)$$

- Dosazení

$$\|YH - \overline{X}\| = trace(Y^T Y + \overline{X}^T \overline{X}) - 2\, trace(\overline{X}^T YH)$$

- Maximalizace posledního členu a SVD

$$trace(\overline{X}^T YH) = trace(USV^T H) = trace(SV^T HU) = trace(SQ)$$

$$trace(SQ) \rightarrow max$$

- Q je jednotková, protože tak maximalizuje stopu

$$Q = V^T HU = I$$

$$\overline{X}^T Y = USV^T \qquad H = VU^T$$

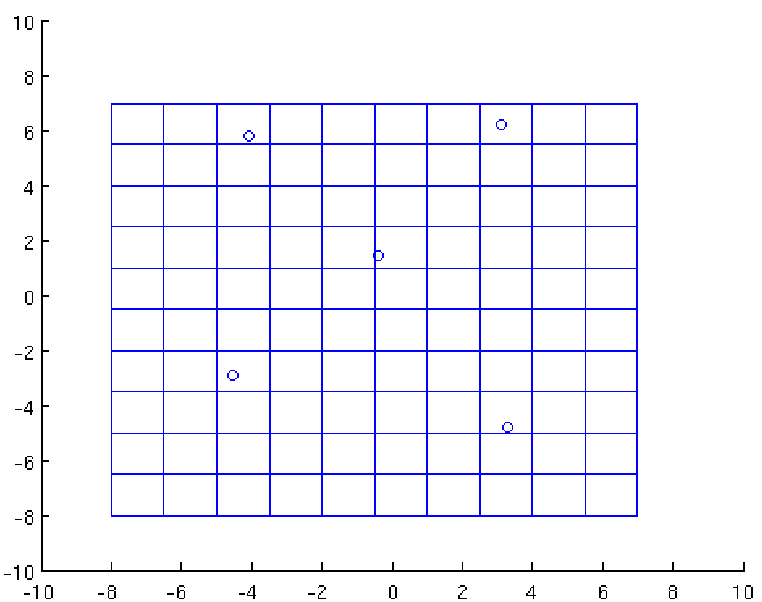
Co musíme udělat

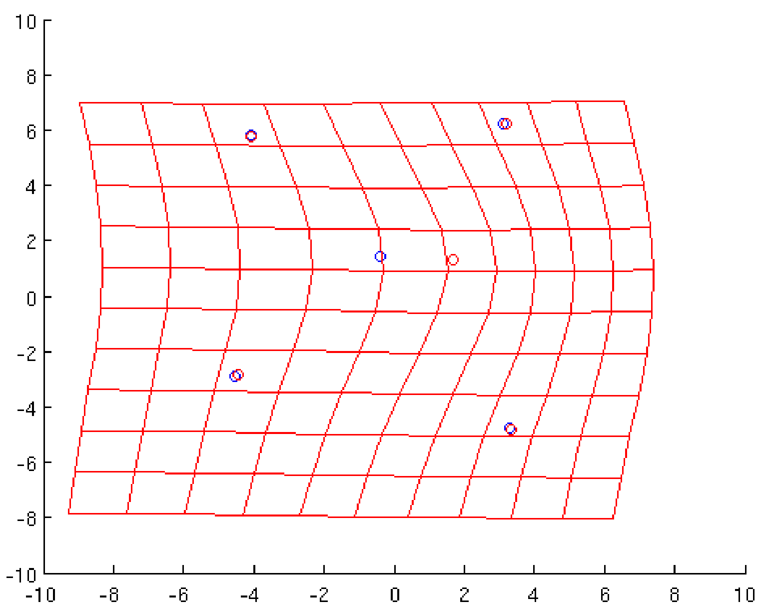
Opakování

- Teorie tvaru
  - Souřadnice – {poloha a velikost} = Tvarové proměnné
  - Leží na zakřivené ploše (hemisféře) ve vzdálenosti 1 od počátku v mnohorozměrném prostoru
  - Vzdálenosti mezi tvary → Prokrustovská vzdálenost
    - Částečná PV ~ eukleidovská vzdálenost proměnných
    - PV ~ vzdálenost na zakřivené ploše (oblouk)
    - Úplná PV ~ nejkratší vzdálenost bez ohledu na velikost
  - Úplná PV + referenční tvar → Kendáluv prostor
  - Projekce do tečné roviny v bodě referenčního tvaru
    - Použití eukleidovské vzdálenosti, statistických metod

Opakování

- Zobrazení rozdílů mezi tvary pomocí TPS
  - Prokrustovsky zarovnané objekty se liší tvarem
  - Zobrazení posunu landmarků jedince proti referenčnímu i mimo landmarky pomocí referenční mřížky
  - Prostor mezi landmarky → TPS interpolace





TPS - odvození

- Soustava rovnic

$$(1, p_{jx}, p_{jy}, U_{1j}, \dots, U_{nj})$$

$$TPS_x(\boldsymbol{p}_j) = a_{0x}1 + a_{1x}p_{jx} + a_{2x}p_{jy} + \sum_{i=1}^{n} w_{ix}U(\|\boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{p_j}\|) = q_{jx}$$

$$(a_{0x}, a_{1x}, a_{2x}, w_{1x}, \dots, w_{nx})$$

n+3 neznámých

$$\begin{bmatrix} 1 & p_{1x} & p_{1y} & U_{1j} & \dots & U_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & p_{nx} & p_{ny} & U_{nj} & \dots & U_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_{1x} & \dots & p_{nx} \\ 0 & 0 & 0 & p_{1y} & \dots & p_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0x} \\ a_{1x} \\ a_{2x} \\ w_{1x} \\ \vdots \\ w_{nx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{0x} \\ \vdots \\ q_{nx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

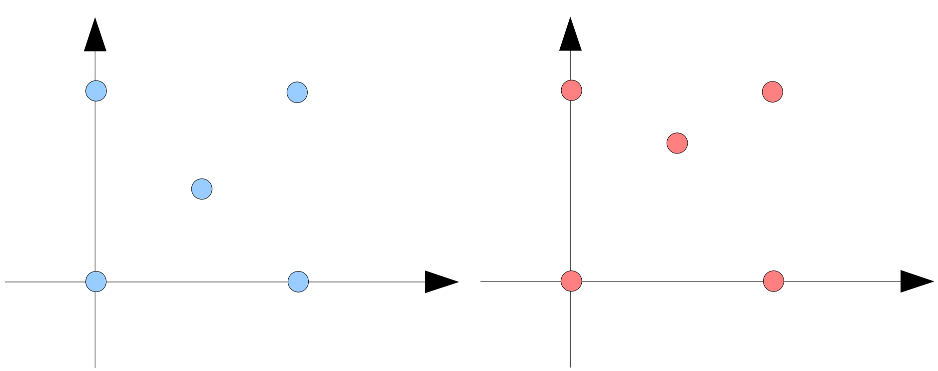
n podmínek daných

3 další podmínky

Warps

- V podstatě parametrický model tvaru odvozený z TPS
- Principal warps, Partial warps
  - Vlastní vektory *bending energy matrix* E
  - Setříděné nejvýraznější navzájem kolmé směry lokálních deformací
- Příklad

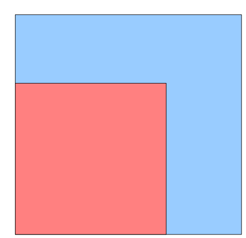
P=[0 0; 0 1; 1 1; 1 0; 0.5 0.5];
Q=[0 0; 0 1; 1 1; 1 0; 0.5 0.75];



$$M \rightarrow M^{-1} \qquad \boldsymbol{w} = M^{-1} \boldsymbol{x}$$

váhy

landmarky



$$M_E^{-1} \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

Vlastní vektor/principal warp

Warps - příklad

- Na spočtení M^-1 potřebuji pouze souřadnice vstupních landmarků, P

$$E=\begin{bmatrix} 0.4809 & -0.2404 & 0.4809 & -0.2404 & -0.4809 \\ -0.2404 & 0.4809 & -0.2404 & 0.4809 & -0.4809 \\ 0.4809 & -0.2404 & 0.4809 & -0.2404 & -0.4809 \\ -0.2404 & 0.4809 & -0.2404 & 0.4809 & -0.4809 \\ -0.4809 & -0.4809 & -0.4809 & -0.4809 & 1.9236 \end{bmatrix}$$

- Principal warp-y

$$v_1=\begin{bmatrix} -0.5000 & 0.5000 & -0.5000 & 0.5000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$v_2=\begin{bmatrix} 0.2236 & 0.2236 & 0.2236 & 0.2236 & -0.8944 \end{bmatrix}$$

- Tvoří komponenty deformační složky bez ohledu na cílové landmarky

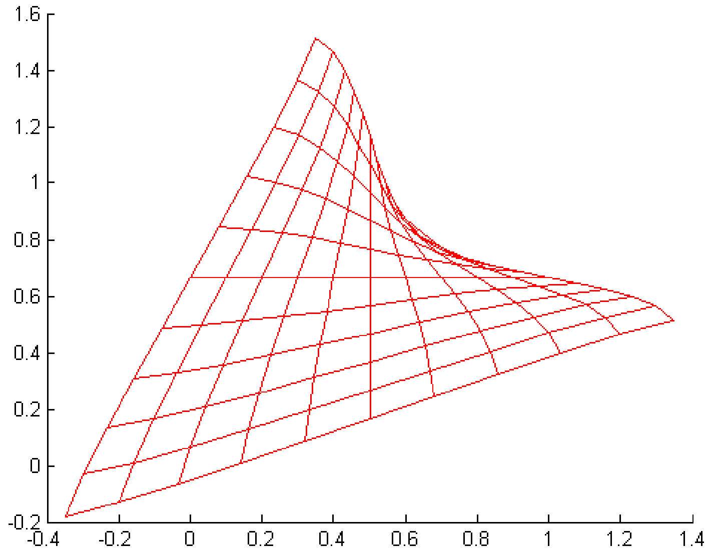
Warps - model

- Konkrétní exemplář získáme z
  - Afinní transformace vstupních landmarků
  - Lineární kombinace warpů

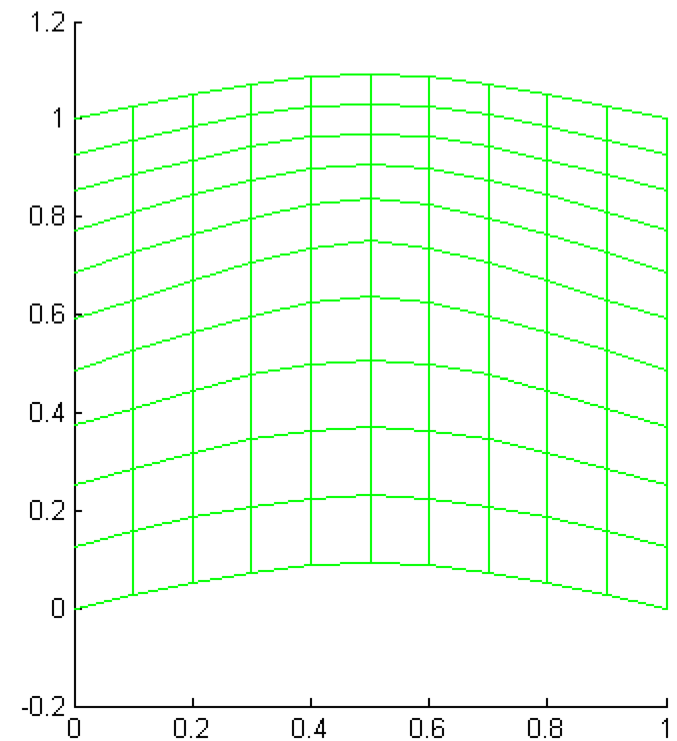
$$Q = PA + \sum \overbrace{(v_1 k_1^T + v_2 k_2^T)}_{i} U(\| \boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{x} \|)$$

- Koeficienty k se spočítají ze znalosti vstupních (P) a výstupních landmarků (Q), tedy z TPS koeficientů
  - Nazývají se *partial warps scores* a tvoří tvarové proměnné
- Je možné vizualizovat vliv jednotlivých warpů na tvar odděleně (nastavením ostatních k_i=0)

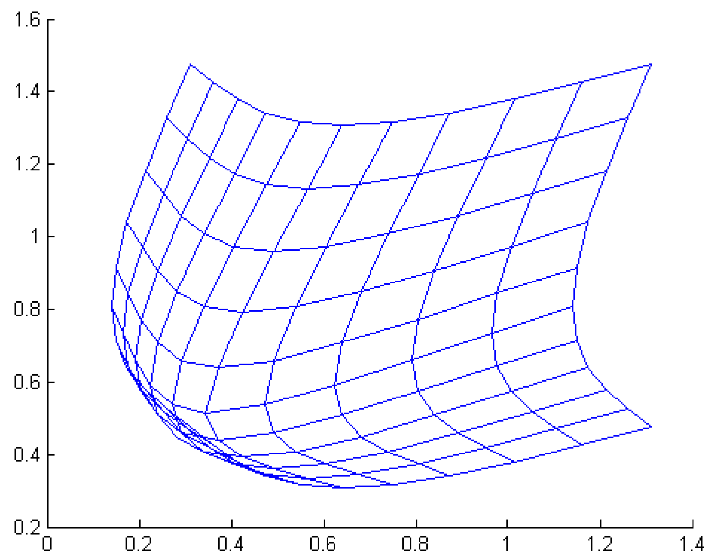
Warps dekompozice



$\cdot[k_{1x}, k_{1y}]$



$+$



$\cdot[k_{2x}, k_{2y}]$

Warps - terminologie

- Ukázka
  - tpsRelw
- Relative warps
  - PCA na koeficientech partial warps
- Vysvětlení i příklad později

Analýza konečných prvků

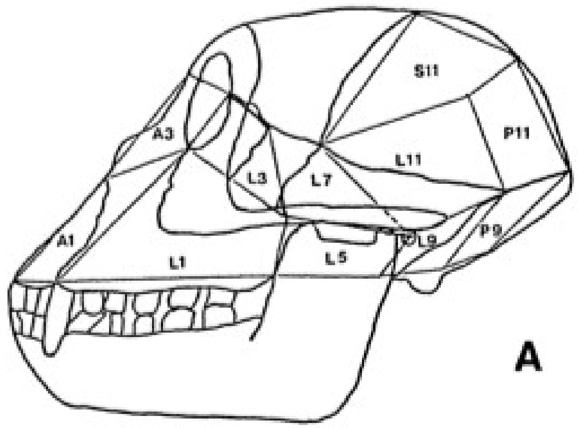
- Spojitá deformační funkce (TPS, nebo jiná) nenabízí přímo žádnou míru (číslo) hodnotící deformaci, nebo lokální změnu velikosti
- Motivace v mechanice kontinua

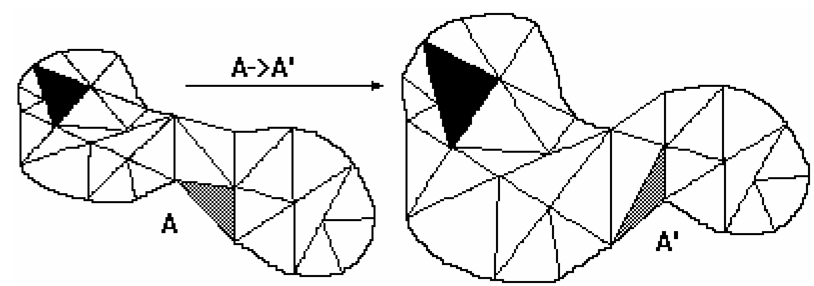
1) Popis <u>oblasti mezi landmarky</u> jako celku – konečné (uzavřené) prvky (většinou) trojúhelníkového tvaru

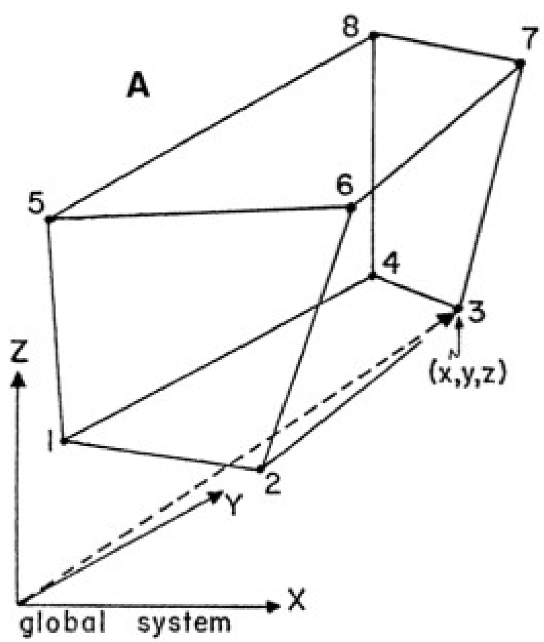
2) Přiřazení hodnoty popisující rozdíly v **tvaru**, nebo **velikosti**

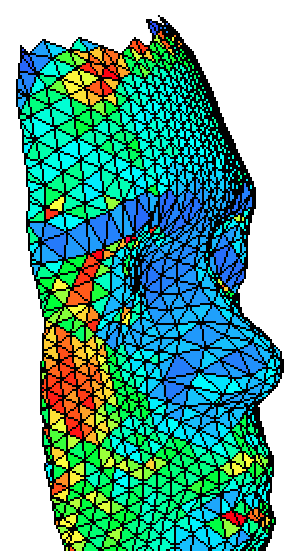
- FESA – Finite Element Scaling Analysis

Konečné prvky









Mechanika kontinua

- Je možné dodefinovat spojitou transformační funkci a analyzovat ji prostředky mechaniky kontinua (Cheverud & Richtsmeier 1986)
- *Strain tensor*

$$F = (\varepsilon_{i,j}) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

- Rozklad na dvojici tenzorů velikosti a deformace

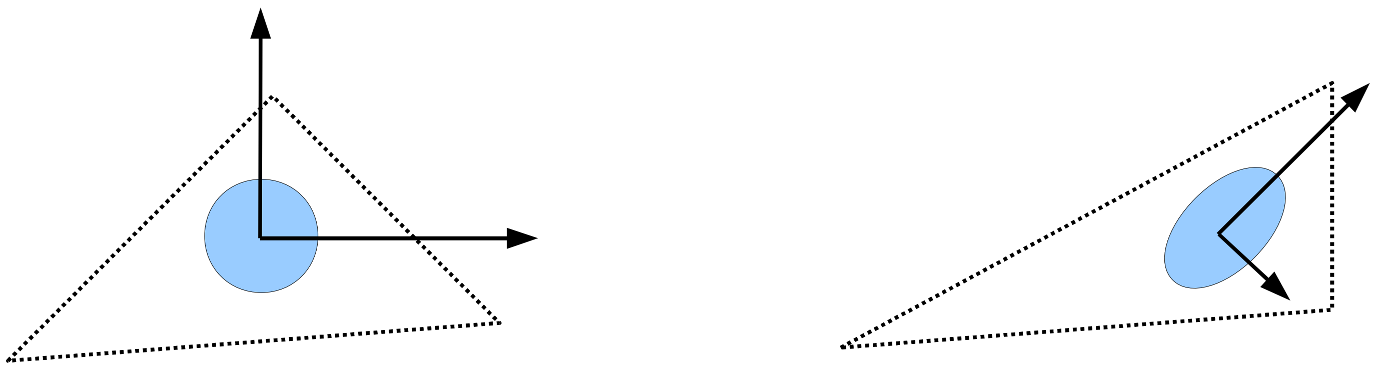
$$F = S + T$$

- Redukce každého tensoru na jediná skalár (lokální rozdíl velikostí, lokální rozdíl tvarů)

FESA na meshích

- Velikost je dána poměrem ploch odpovídajících si trojúhelníků
- Tvar je dán poměrem velikostí vlastních vektorů deformační matice

$$P = QA = \begin{bmatrix} \overline{x_1} & \overline{y_1} \\ \overline{x_2} & \overline{y_2} \\ \overline{x_3} & \overline{y_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$



Statistický model tvaru

- Model – matematický popis jevu z reálného světa
  - Reálné příklady ho mohou více či méně splňovat
- Příklad:
  - Model tvaru lebky může být jeden „vhodný“ reprezentant
    - Splňuje dokonale pouze on sám, extrémy jsou daleko
  - Může to být průměrný reprezentant ze zkoumané populace
    - Nesplňuje ho nikdo, ale všichni jsou mu dostatečně blízko
  - Průměr + tolerance
    - Takový model může popisovat i nemožné exempláře
- Parametrický model
  - Každý konkrétní exemplář odpovídá číselné konfiguraci

Statistický model tvaru

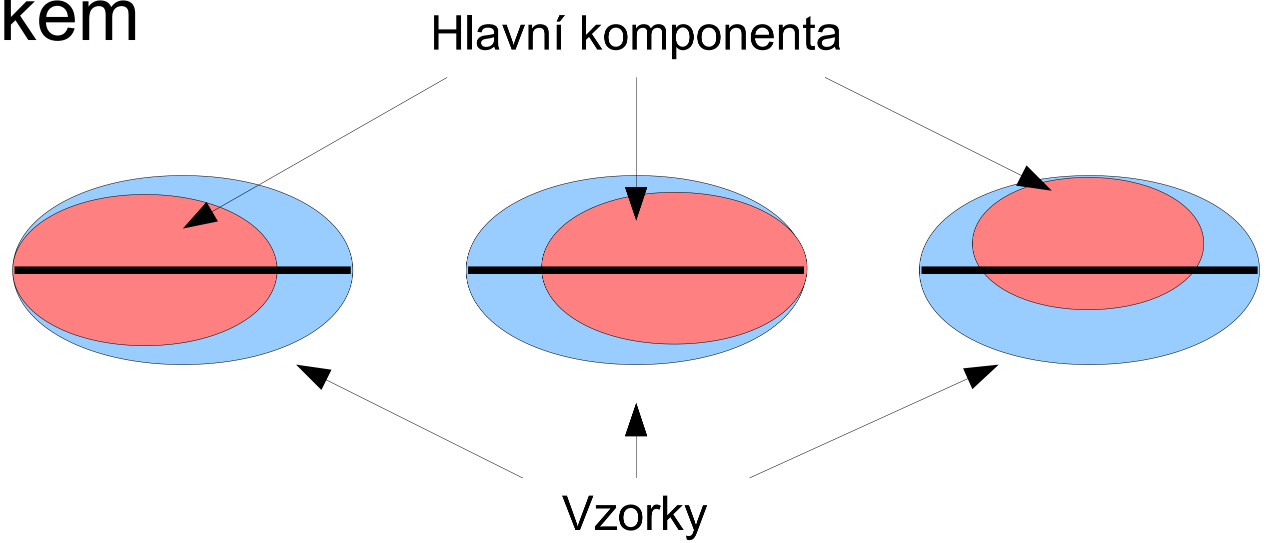
- Zohledňuje tendence vyskytující se v pozorované **množině** exemplářů, vzorku

$$\{P_1, P_{2,} \ldots, P_n\} \rightarrow F(k_1, \ldots, k_m)$$

- Takový model dokáže popsat nekonečně velkou populaci → generování exemplářů
- Matematický nástroj – Analýza hlavních komponent (Principal component analysis - PCA)
  - Jeden exemplář se skládá z příspěvků různých komponent
  - Hledáme komponenty, které nejvíc přispívají do každého exempláře ve vzorku

PCA

- Obrázkem



- Matematicky
  - Komponenta $\quad \boldsymbol{v_1} = [v_{1,1}, \ldots, v_{1,n}] \qquad \{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$
  - Vzorek $\quad P = P_0 + \sum \boldsymbol{v_i} k_i \qquad P_j \rightarrow \{k_{j,1}, \ldots, k_{j,n}\}$
  - Hodnoty k_i → *PCA score*
  - Komponenty jsou seřazeny podle míry přispění!

PCA

- Obvyklejší obrázek

$$P = P_0 + a\,\boldsymbol{v}_1 + b\,\boldsymbol{v}_2$$