Matematika pro geometrickou morfometrii

Václav Krajíček

Vaclav.Krajicek@mff.cuni.cz

Department of Software and Computer Science Education
Faculty of Mathematics and Physics
Charles University

Přednáška 5

Opakování

- Měření (Landmarky)
- Získávání tvarových proměnných
  - Registrace, Warp model – jednoznačný popis
  - Statistický model – relativně vzhledem k množině
- Statistické zpracování
  - Pravděpodobnost – náhodná veličina a její popis
  - Shrnutí množiny čísel/vektorů → 1 hodnota (t, F, lambda-hodnota), náhodná veličina a její rozložení
  - Určení odpovídající pravděpodobnosti (p-hodnota)
  - Porovnání s kritickou hodnotou (např. 0.05)
  - Přijetí/odmítnutí nulové hypotézy

Nelandmarkové metody

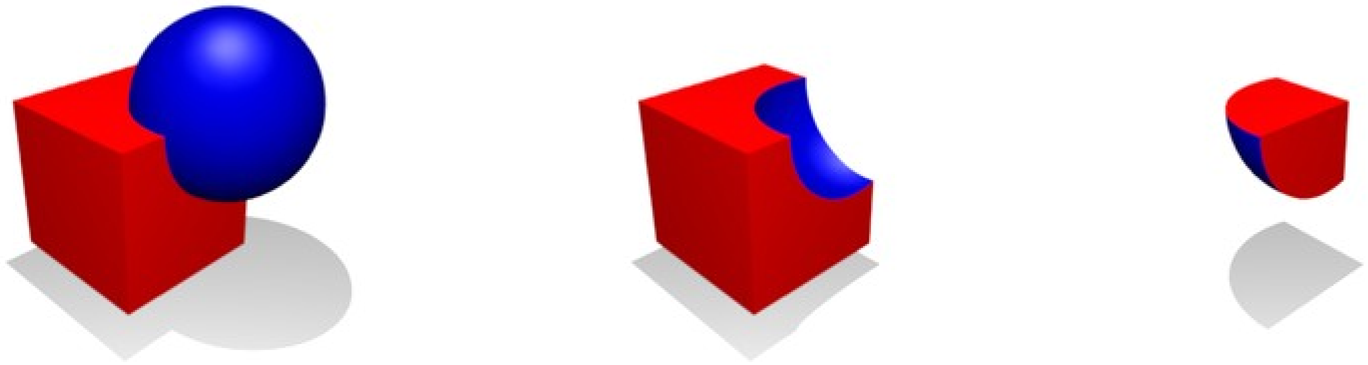
- Data
  - Neobsahují výrazné geometrické lokální vlastnosti
  - Obsahují jich mnoho
- Výběr landmarků zahrnuje ohromnou redukci informace
  - Několika megapixelová fotka → pár čísel
  - Objemová data z CT → pár čísel
- Můžu extrahovat složitější geometrické objekty
- Pracovat s hrubými daty

Geometrická primitiva

- <u>Rovinná</u>
  - Body
    - Landmark je nejjednodušší geometrické primitivum
  - Čárová
    - Přímky
    - Úsečka – spojnice dvou landmarků
    - Lomená čára – řetězec landmarků
    - <u>Křivka</u> – většinou „hladká čára“, často aproximována lomenou
  - Plošná – dělí prostor na vnitřní/vnější
    - Polygony – uzavřené lomené čáry, (neprotínají se)
    - Uzavřené křivky – hladká uzavřená hranice
    - Nadplochy – umožňují reprezentovat oddělené oblastí

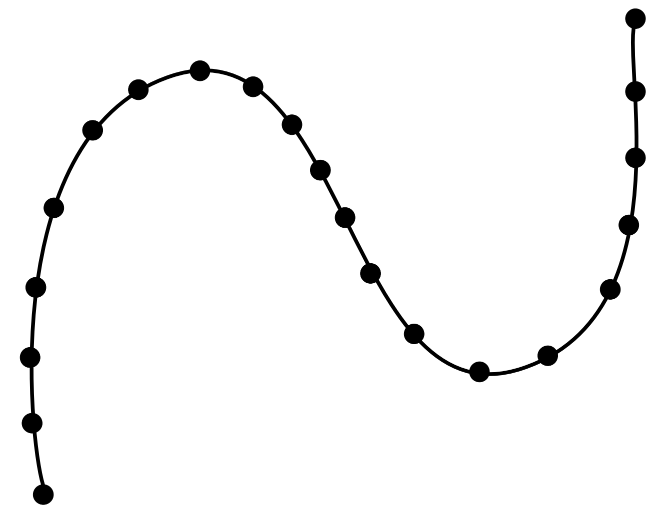
Geometrická primitiva

- Prostorová
  - Body, Úsečky, Polygony, Křivky
  - Roviny
  - Trojúhelníkové sítě
  - Plochy – hladké
  - Uzavřené sítě a plochy - izoplochy
  - CSG



Spojitá a diskrétní informace

- Diskrétní
  - Konečně mnoho měření
  - Vejde se do paměti počítačů
- Spojitý
  - Nekonečně čísel, měření
  - Libovolná přesnost
  - Pro každé dva body existuje bod ležící mezi
  - Existují konečné reprezentace spojitých struktur
- Studium kontur a křivek pro popis tvaru



Křivky a plochy

- Křivka - bodová podmnožina R^2 nebo R^3 definovaná zobrazením z uzavřené U podmnožiny R do příslušného prostoru

$$\boldsymbol{v} = \{(x, y) | x = f_x(t), y = f_y(t), \; f_x, f_y : U \subseteq \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}\} \subseteq \boldsymbol{R}^2$$

  – f_x, f_y většinou „hladké“

- Plocha - bodová podmnožina R^3 definovaná zobrazením z uzavřené U podmnožiny R^2 do R^3

$$\boldsymbol{V} = \{(x, y, z) | x = f_x(u, v), y = f_y(u, v), z = f_z(u, v)\} \subseteq \boldsymbol{R}^2$$

$$f_x, f_y, f_z : U \subseteq \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}$$

  – f_x, f_y, f_z většinou „hladké“

Křivky

- Úsečka je také křivka (podobně kružnice, elipsa, ...)

$$f_x(t) = a_x t + b_x, t \in (0,1)$$

$$f_y(t) = a_y t + b_y, t \in (0,1)$$

- Jak definovat libovolnou křivku složitější než úsečka?
  - Analyticky – rovnicí → speciální typy křivek
    - Pomocí konečně mnoha informací (kontrolní body, koeficienty) a kombinace spojitých funkcí → Bezierova křivka, B-Spline, Fergusonova, …
  - Vzorkováním – ztrácím informaci
    - Interpolací vyššího řádu dopočítám body mezi vzorky
    - (Lomená čára – interpolace prvního řádu)
    - „Lomená čára se zahlazenými rohy“

Křivka - příklad

- Chci křivku, která bude
  - Definovaná kubickým polynomem

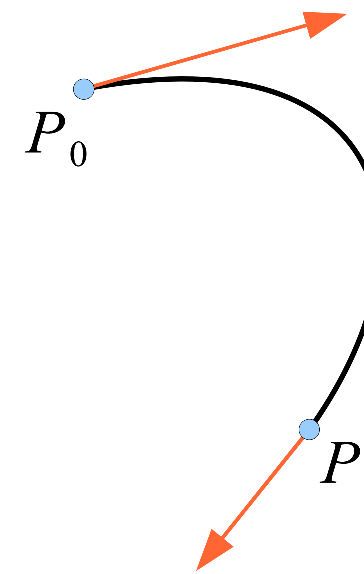
$$f_x(t)=a_x t^3+b_x t^2+c_x t+d_x$$

  - Začínat v bodě P_0 a končit v bodě P_1

$$f_x(0)=d_x=P_{0x}$$

  - Mít v P_0 tečnu P_0' a v P_1 P_1'

$$f'_x(0)=3a_x t^2+2b_x t+c_x=c_x=P'_{0x}$$



- Z těchto podmínek můžu sestavit rovnice a získat koeficienty polynomů
- Složitější křivky se sestavují z jednodušších

Analýza kontury

- Hladká hranice, kontura, nějakého tvaru neobsahuje landmarky (body jednoznačně definované)
- Získání kontury
- Jak <u>konturu reprezentovat čísly</u>, když nemůžu použít souřadnice landmarků?
- Semilandmarky - body
  - Pravidelné rozdělení kontury na úseky podle délky, nebo úhlu
- Transformace na vhodný soubor koeficientů
  - Aproximace nějakou křivkou a práce s koeficienty
  - Waveletová (vlnková) / Fourierova transformace navzorkované křivky

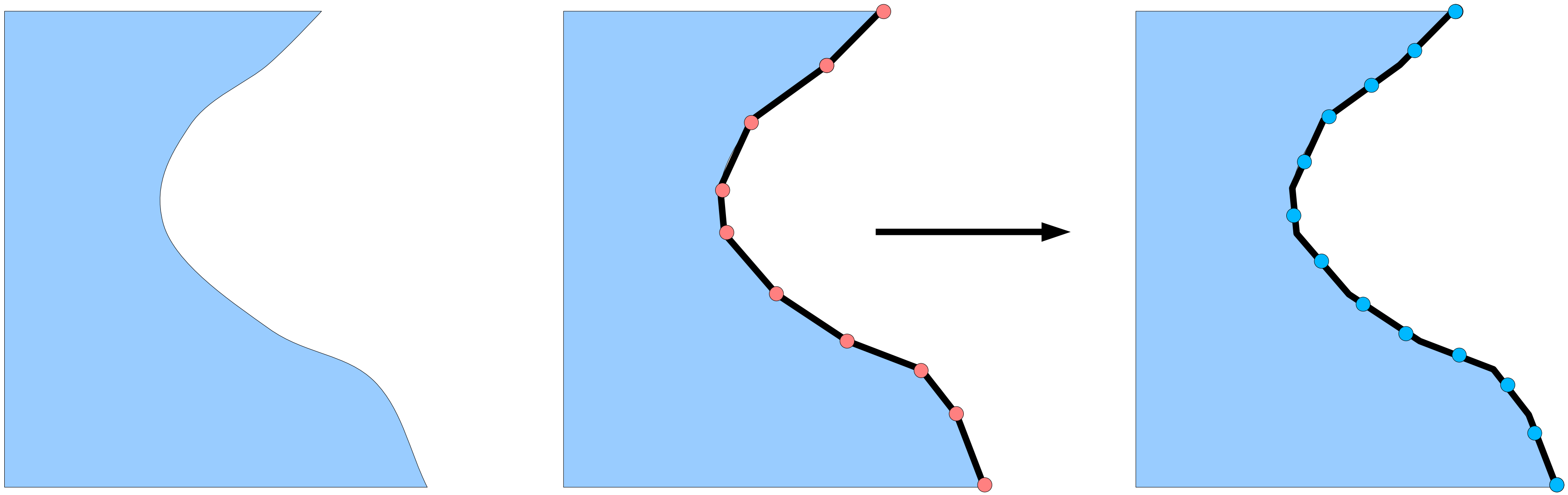
Semilandmarky

- Dělení podle délky na potřebný počet *n* úseků
  - Celková délka

$$l = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\| p_i - p_{i+1} \|}$$

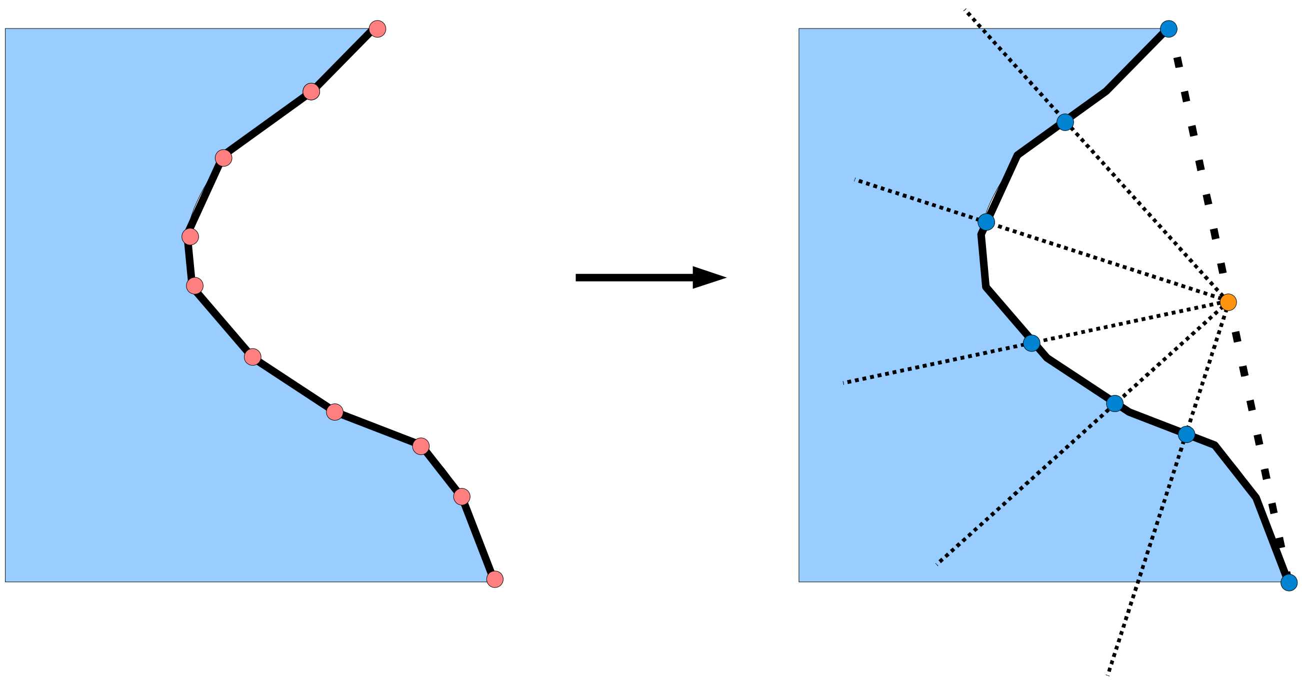
  - Délka jednoho úseku

$$l_1 = l / m$$



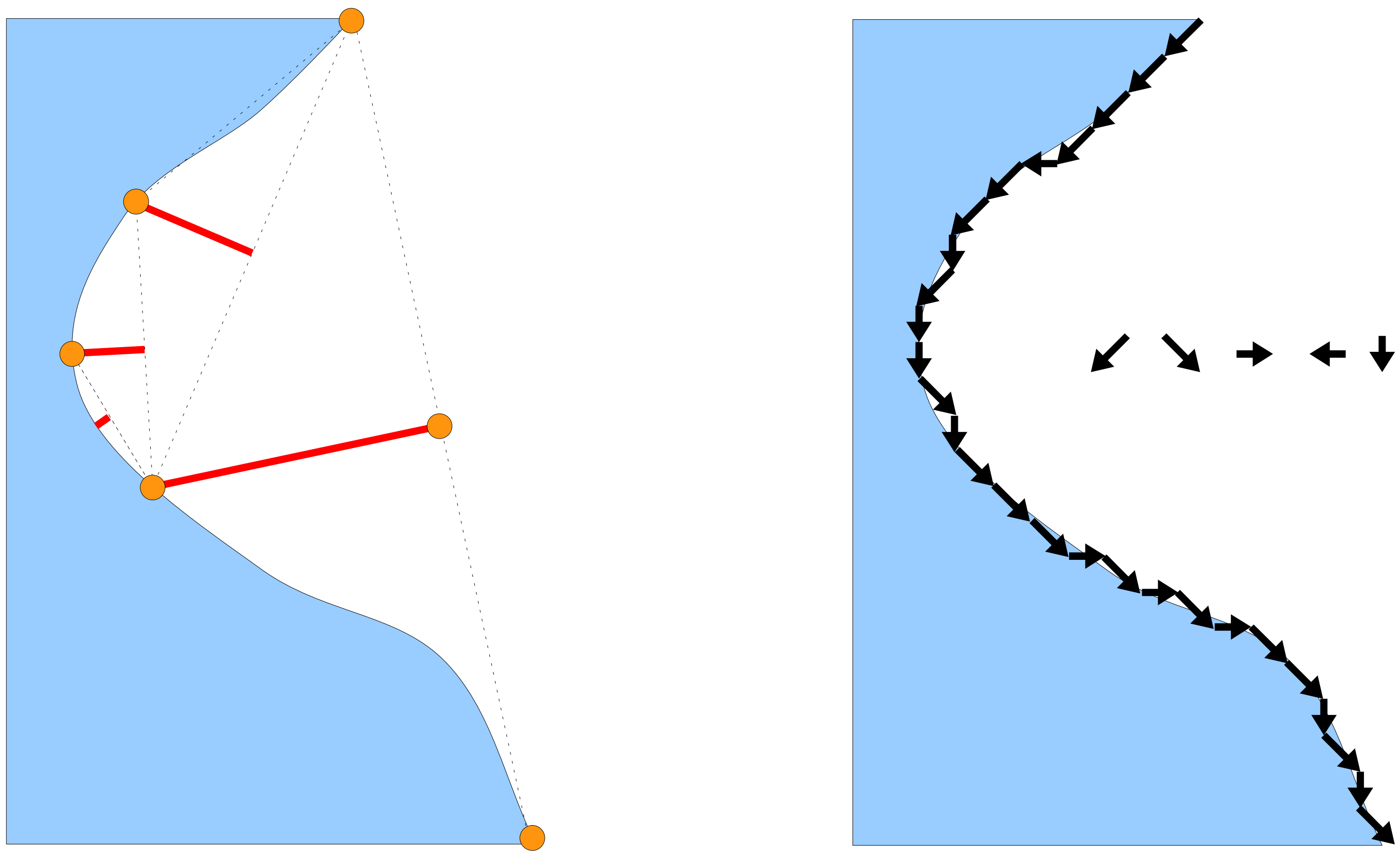
Semilandmarky

- Dělení podle úhlu
- Kdy je vhodné první, nebo druhé dělení?
  - Položit si otázku jestli mohou existovat dvě křivky, které v daném dělení dají stejné semilandmarky.



Jednoduché transformace

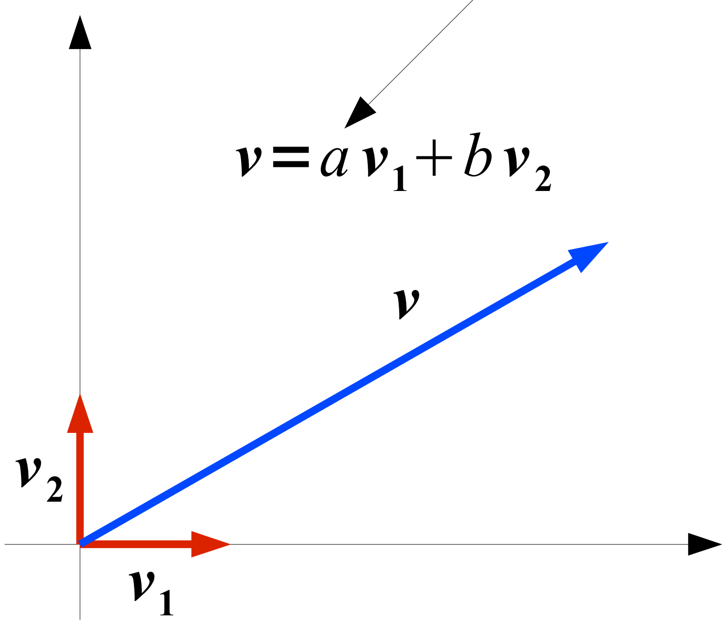
- Nespočet různých způsobu jak zachytit tvar kontury



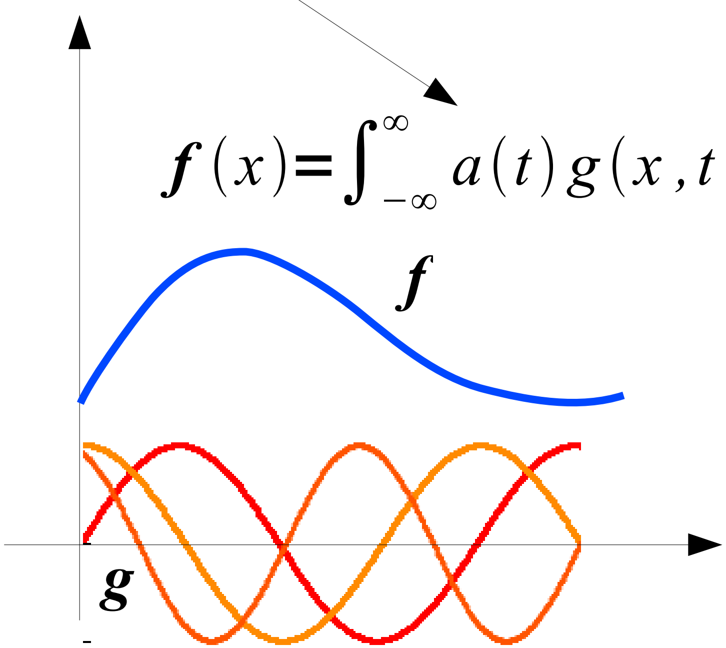
Integrální transformace

- Práce s konturou jako spojitou funkcí
  - Analogie s lineární algebrou, vektorovými prostory
    - Funkce ~ vektor, prostor funkcí ~ vektorový prostor, báze (množina vektorů) ~ množina bazických funkcí, Souřadnice ~ Spektrum

$$\boldsymbol{v} = a\,\boldsymbol{v}_1 + b\,\boldsymbol{v}_2$$



$$\boldsymbol{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, g(x,t)\, dt$$



- Diskretizace problému – spektrum → koeficienty

Fourierova transformace

- Báze transformace

$$g(x,t)=e^{-2\pi i x t}=\cos(2\pi x t)+i\sin(2\pi x t)$$

- Spektrum je komplexní funkce (do komplexních čísel)
- Předpokládá periodickou funkci!!
- Diskretizace + Použití amplitudového spektra

$$f_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{\frac{2i\pi}{N}kn} \qquad a_k=\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{-2i\pi}{N}kn}$$

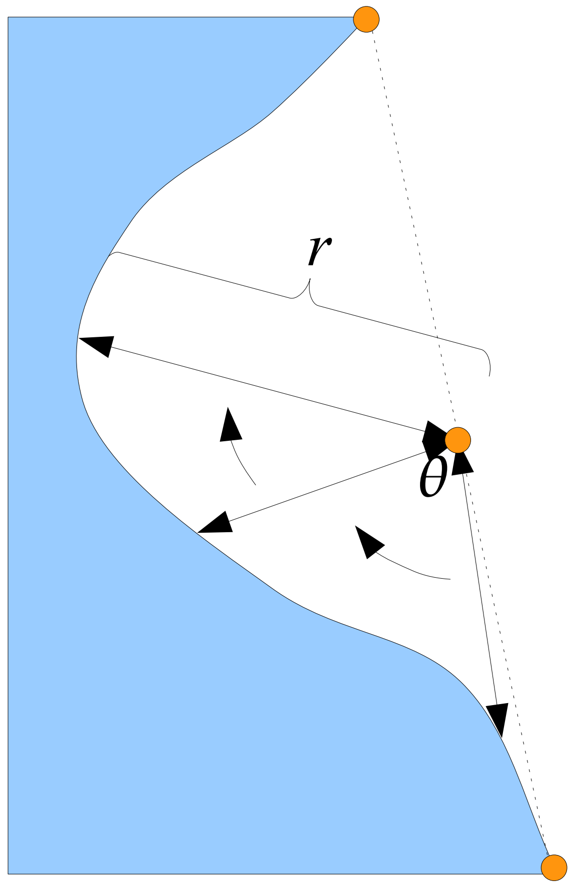
- Použití na kontury

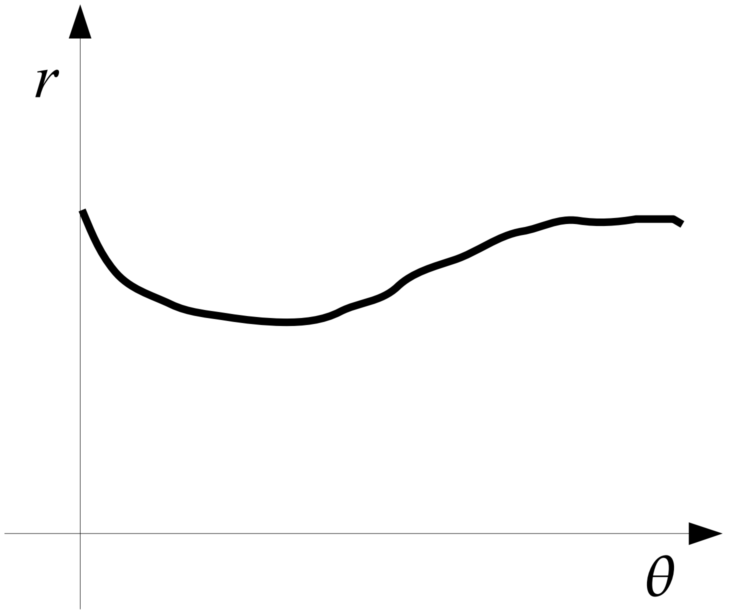
  1) Možná transformace do jiných souřadnic

  2) Každá kontura ve 2D je dvojice 1D funkcí pro x a y → FT na každou souřadnici → dvě sady spektrálních koeficientů

Polární transformace

- Chci vytvořit z vektorové funkce 1D funkci a mít jedno spektrum





FT - příklad

- Triviální příklad

$$f = [1, 2, 3, 4, 5];$$

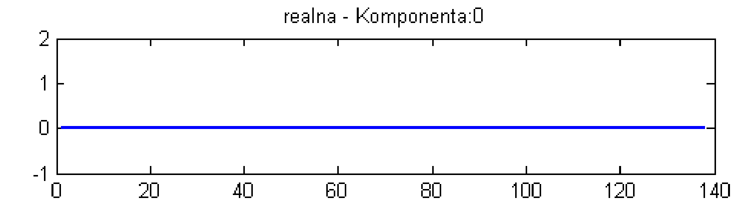
$$a = [15, -2.5+3.441\mathrm{i}, -2.5+0.8123\mathrm{i}, -2.5-0.8123\mathrm{i}, -2.5-3.441\mathrm{i}]$$

$$\begin{aligned} f_3 = \; & 15(\cos(0)+i\sin(0))+ \\ & (-2.5+3.441i)(\cos(2.5133)+i\sin(2.5133))+ \\ & (-2.5+0.8123i)(\cos(5.0265)+i\sin(5.0265))+ \\ & (-2.5+0.8123i)(\cos(7.5398)+i\sin(7.5398))+ \\ & (-2.5+3.441i)(\cos(10.0531)+i\sin(10.0531)) \quad = 3 \end{aligned}$$

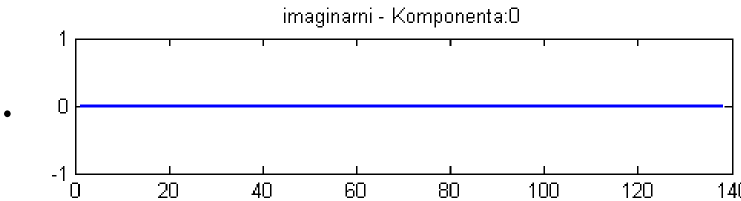
- Fourierova transformace obrazových souřadnice
- Fourierova transformace polárních souřadnice

FT - komponenty

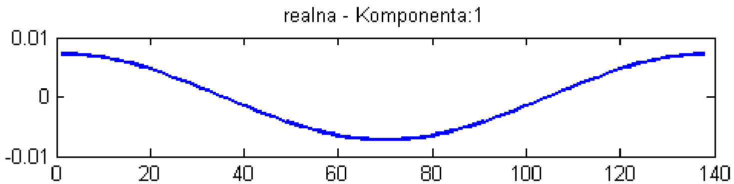
$\frac{1}{N}\Big($ $a_0 \cdot$



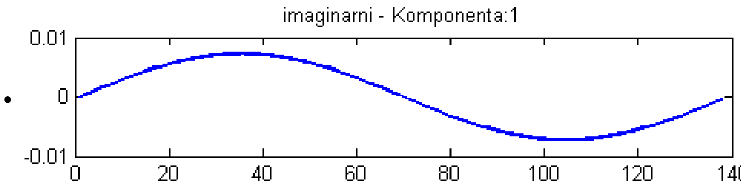
$+a_0 \cdot$



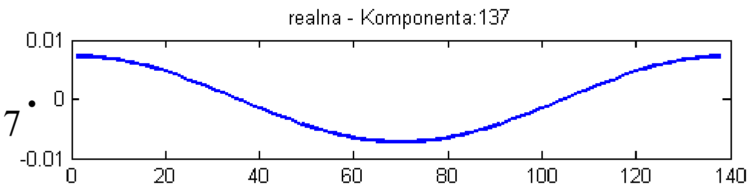
$+$ $a_1 \cdot$



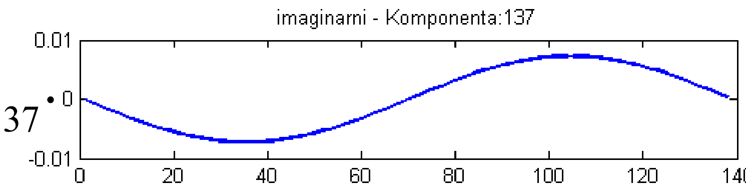
$+a_1 \cdot$



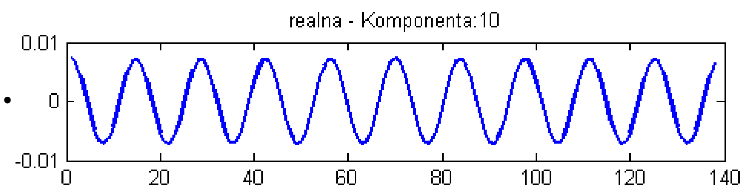
$+$ $a_{137} \cdot$



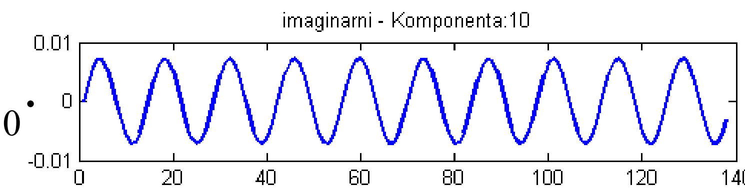
$+a_{137} \cdot$



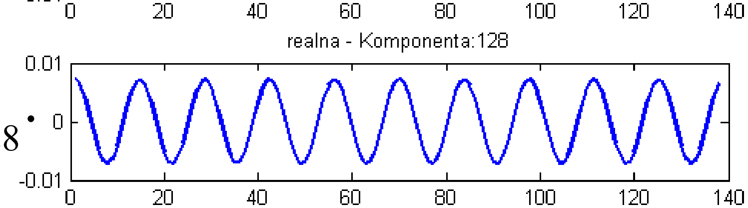
$+$ $a_{10} \cdot$



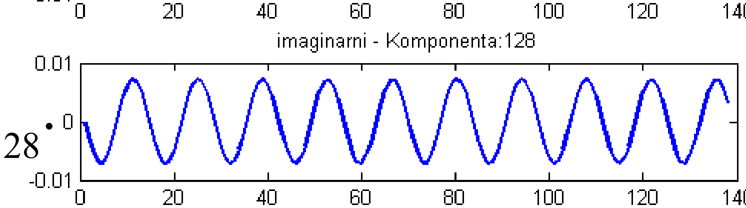
$+a_{10} \cdot$



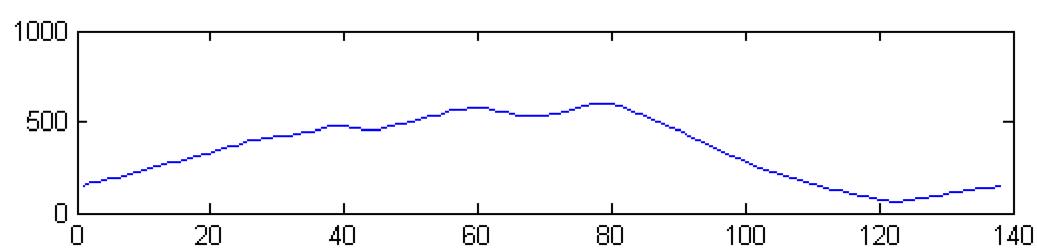
$+$ $a_{128} \cdot$



$+a_{128} \cdot$



$\Big) =$



$+0i$

Cirkulární harmoniky

- Pro reprezentaci funkce získané polární transformací
- Kombinace bazických funkcí

$$f(\theta)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i Y_i(\theta)$$

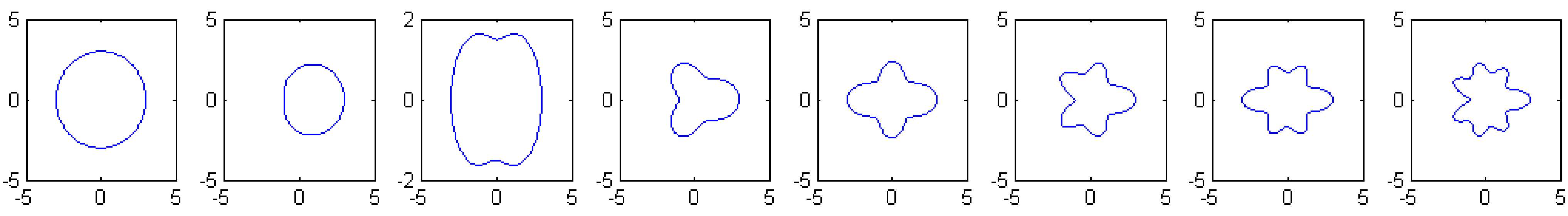
- Báze

$$Y_n(\theta)=P_n(\theta)\cos(\theta)$$

  - Lagendrovy polynomy:

$$P_0(x)=1, P_1(x)=x$$

$$P_{n+1}(x)=\frac{(2\mathrm{n}+1)\,x\,P_n(x)-n\,P_{n-1}(x)}{n+1}$$



Waveletová transformace

- Podobný princip jako FT
- Hlavní rozdíl je v použité bázi
  - Není jedna kanonická báze jako u FT pouze předpis jak mají vypadat, pro každou úlohu může být vhodná jiná
  - „Báze u FT je lokalizovaná ve spektru, u WT je lokalizovaná ve spektru i v čase“
    - Parametry báze jsou Škála, Posun
  - Mateřská funkce + posun a škálování → Wavelet (vlnka)

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c_{s,t}(x)\,\overbrace{\psi_{s,t}(x)}^{\text{vlnka}}\,dt\,ds \qquad \psi_{s,t}(t)=\frac{1}{\sqrt{s}}\,\psi\left(\frac{x-t}{s}\right)$$

velikost šířka poloha

Waveletová transformace

- Spojitá varianta (teorie) → Diskretizace (praxe)
  - Odstranit zbytečné komponenty → ortonormální báze
  - Horní strop pro šířku vlnky → škálovací funkce

$$\psi_{i,j}(t) = 2^{\frac{-i}{2}} \psi\left(2^{-i} t - j\right)$$

$$\begin{aligned} f \quad = \quad & c_{0,0}\phi + \\ & c_{1,0}\psi_{1,0} + c_{1,1}\psi_{1,1} + \\ & c_{2,0}\psi_{2,0} + c_{2,1}\psi_{2,1} + c_{2,2}\psi_{2,2} + c_{2,3}\psi_{2,3} \end{aligned}$$

- Různé pohledy na waveletovou transformaci
  - Kaskády filtrů
  - Lineární kombinace bázových funkcí
  - Vnořené prostory funkcí

WT – ukázka rozkladu

MFF UK CGG Prague

- Signál $s=[1,2,1,4]$
- Jak spočítat koeficienty c_{ij} → zvolené waveletové bázi odpovída dvojice filtrů

$$H_0=\frac{1}{2}[1,1] \quad H_1=\frac{1}{2}[1,-1]$$

Průměr/aproximace

Rozdíl/detaily

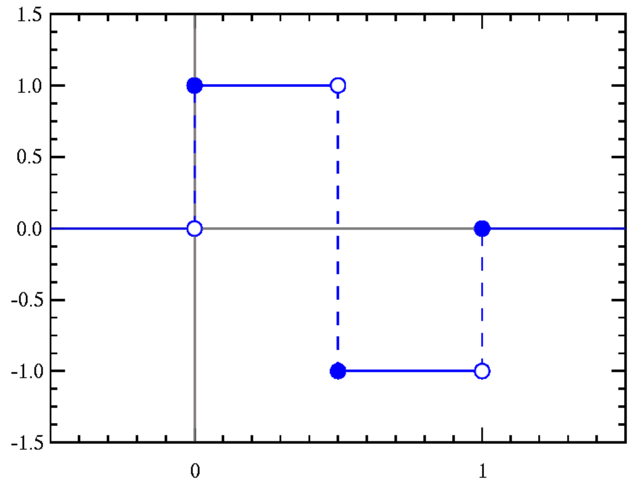
- Filtrace – transformace čísel, kdy zahazuji nezajímavou část informace

$$[s*H_0]_d=[1.5\,,2.5] \qquad [s*H_1]_d=[0.5\,,1.5]$$

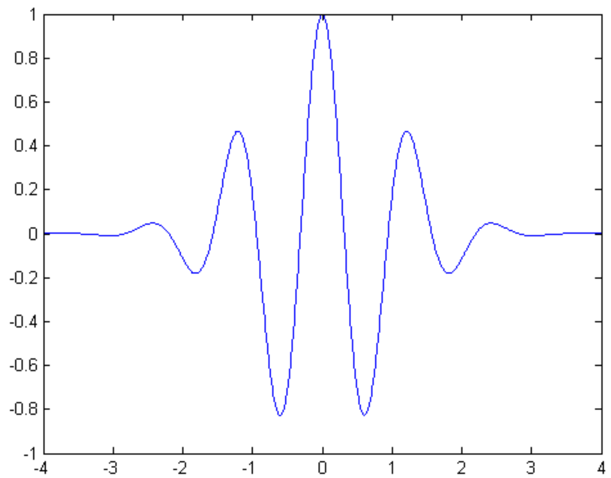
$$[[s*H_0]_d*H_0]_d=[2] \qquad [[s*H_0]_d*H_1]_d=[0.5]$$

WT – příklady bází

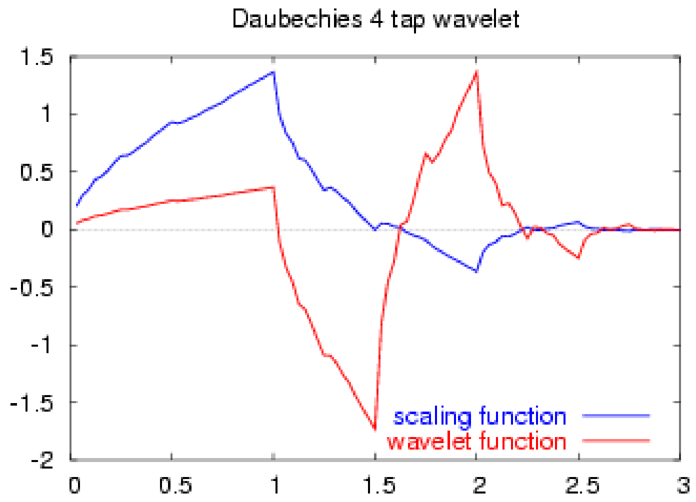
- Hárova báze



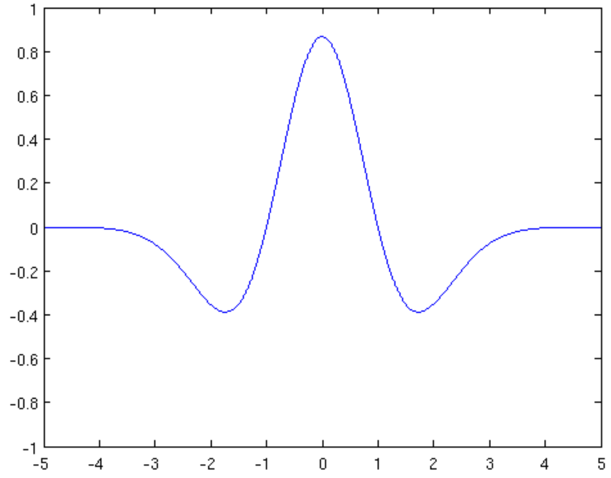
- Morlet



- Daubechies



- Mexican hat



WT - demonstrace

- Matlab demo

- Reprezentace křivek
  - L.M.Reissell: Wavelet multiresolution representation of curves and surfaces, 1995, pseudocoiflets
  - Chuang, Kuo: Wavelet descriptor of planar curves: Theory and applications, 1996, srovnání různých bazí
  - Li, Qin, Sun: Curve modeling with constrained B-spline wavelets, 2005, zaměřeno na editaci

Výhody WT

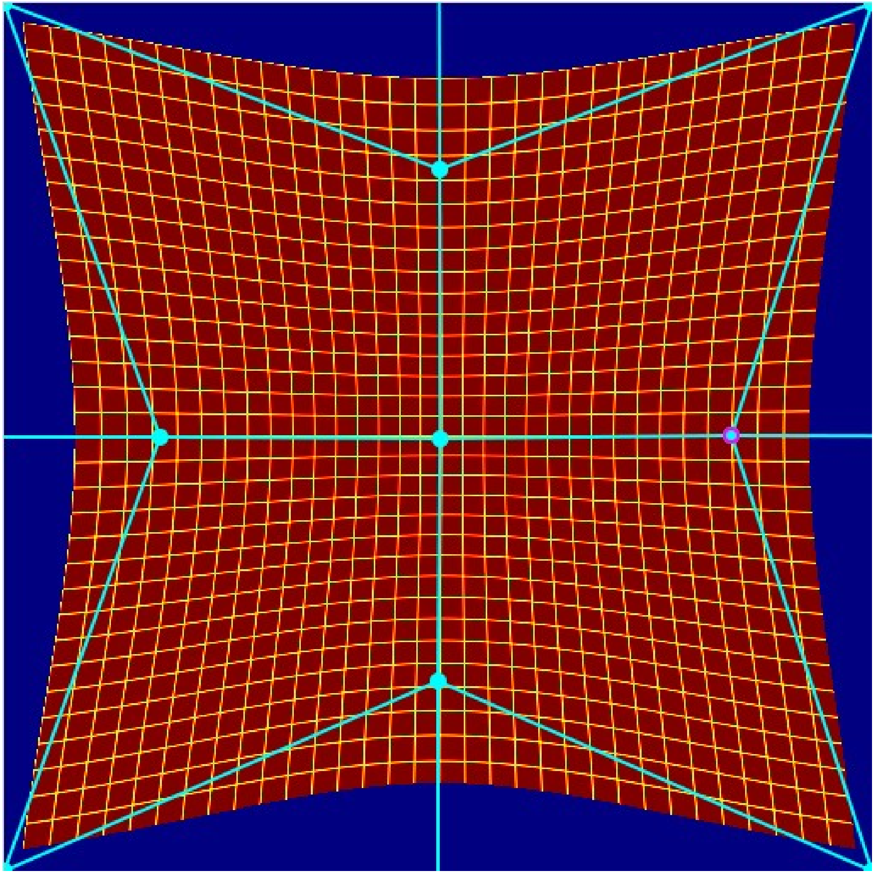
- „Lépe“ reprezentuje data obsahující ostré hrany
  - Koeficienty lépe odráží vliv jednotlivých landmarků
- Signál nemusí být periodický (křivky uzavřené)
- Možnost volby vhodné wavelet báze
- (Méně výpočetně náročná)

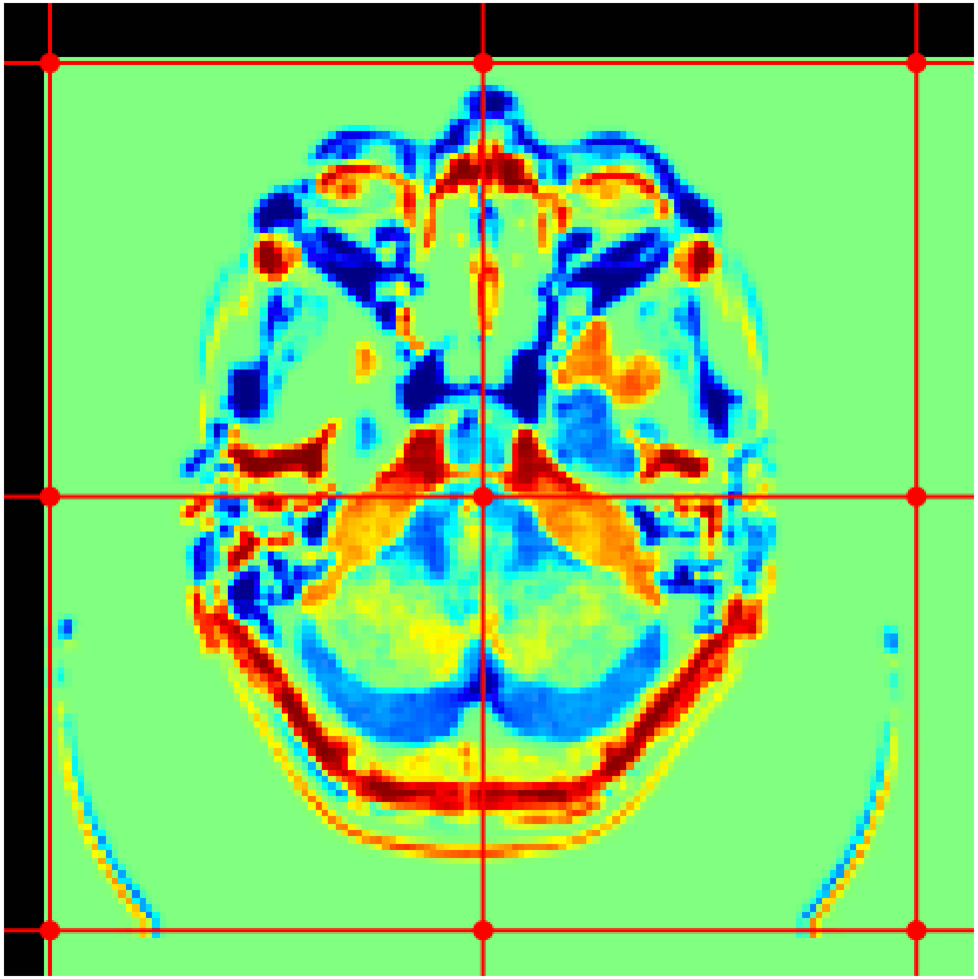
Jiné typy registrace

- Bez landmarků
- Registrace ploch/meshů
  - Umí nová verze programu RapidForm (rigidní)
  - Rigidní – pro zarovnání (podobně jako GPA) a spojování několika meshů do jednoho
  - Elastická – pro zobrazení rozdílů (podobně jako „neafinní“ složka TPS), např. FFD
- Registrace rastrů
  - Součet čtverců rozdílů (nebo jiná kriteria) přímo na hodnotách pixelů
  - Použití jak na 2D obrázky, tak na objemová data

Elastická registrace rastrů

- Ukázka





Dense correspondence

- Registrace trojúhelníkových sítí za účelem konstrukce na PDM na nelandmarkových datech
- (Vrcholy sítě nejsou landmarky ve smyslu GMM)
- Hlavní kroky
  - GPA pro rigidní registraci
  - TPS pro přiblížení jedinců (jedince a vybraného zakladního)
  - Hledání nejbližších vrcholů sítě (prah tolerance)
  - Přenesení topologie (možnost FESA analýzy)
  - PCA na odpovídajících si vrcholech

Reference

- Zelditch, Swiderski, Sheets, Fink: Geometric Morphometrics for Biologist: A Primer
- Dennis E. Slice: Modern Morphometrics
- F.L.Bookstein: Morphometric Tools for Landmark Data Geometry and Biology (Orange Book)
- S. R. Lele, J. T. Richtsmeier: An Invariant Approach to Statistical Analysis of Shapes
- Wikipedia: The Free Encyclopedia
- Andrea Cardini: GMM_2008_York